This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

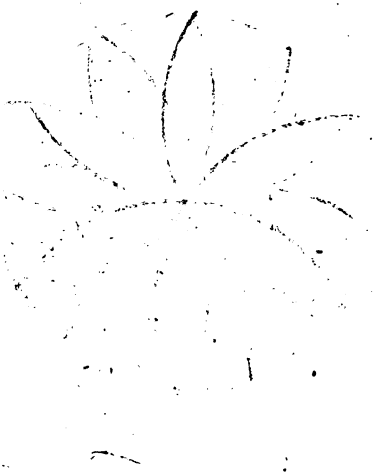
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

QA
35
.L869
1793



Die Elemente der Mathematik

verfaßt

von

Johann Friedrich Lorenz.

1738–1807

Erster Theil.

Die reine Mathematik,

mit 10 Kupfertafeln.

Zweyte gänzlich umgearbeitete Ausgabe.

Leipzig
im Verlag der J. G. Müllerschen Buchhandlung
1793.

Die

Schmiede

der

Gerechtigkeit

Vorrede

der vorigen Ausgabe vom Jahre 1785.

Die Mathematik, welche von je her die erste unter den Wissenschaften gewesen, und deren Werth zu allen Zeiten anerkannt worden ist, gewährt nicht nur Kenntnisse, die man nicht ohne Nutzen und Vergnügen erlernt, und in denen Niemand, der auf Stand und Erziehung Anspruch macht, ein völliger Fremdling seyn darf, sondern ist auch wegen ihrer vorzüglichen Methode Jedem, dem es um Bildung des Verstandes zu thun ist, nicht genugsam zu empfehlen.

334545

Insbesondre ist, wie mich dünkt, der ihr eigene Gang, den sie in Entwickelung ihrer Lehren nimmt, an ihr zu rühmen; indem sie nicht nur mit den gemeinsten und einfachsten Sätzen den Anfang macht, immer allmälig zu zusammengesetztern Wahrheiten fortschreitet, und zuletzt von Dingen, die alle Kräfte des menschlichen Verstandes zu übersteigen schienen, befriedigende Aufschlüsse giebt, sondern auch überhaupt sich mit einer mäßigen Anzahl von völlig festgesetzten Grundlehren begnügt, auf deren Anwendung alle noch so schwere Untersuchungen, die sie anstellt, sich einschränken. Diese Grundlehren, die man unter dem Namen der Elemente begreift, machen demnach bey ihr die Hauptsache aus, so daß der, welcher sich solche recht zu eigen gemacht hat, keines weitern Unterrichts bedarf, um in das Verborgenste seiner Wissenschaft einzudringen. Wie sehr man auch zu allen Zeiten bemühet gewesen sey, diese Elemente auf das sorgfältigste zu bearbeiten, das beweisen die Schriften der alten und neuen Mathematiker, welche sich hiedurch um ihre Wissenschaft Verdienste erworben haben. Diesen nicht sowohl nachzueifern, denn hiezu fühle ich meine Kräfte zu schwach, als vielmehr durch eine vorläufige Zubereitung ihnen geschickte Schüler zuzuführen, war die Absicht, in welcher ich die Elemente der Mathematik nach einem Plan auszufüh-

führen unternommen habe, der meines Bedünkens das Studium einer so vorzüglichen Wissenschaft Anfängern zu erleichtern geschickt ist. Freylich verstehe ich durch diese Erleichterung kein Zusammenstoppeln seichter, durch und durch mangelhafter Kenntnisse, die in keiner Wissenschaft, am wenigsten in der Mathematik, wo strenge Methode die einzige Methode ist, Nutzen bringen; sondern eine sorgfältige Wahl der Grundwahrheiten, eine genaue Anordnung des Ganzen und der Theile, einen bestimmten Ausdruck der einzelnen Sätze, und eine Entwickelung der Beweise, die solche durch kürzern Vortrag nur desto einleuchtender machet. Daß nur hierauf jede Erleichterung gehen müsse, werden mir die, welche die Mathematik kennen, und überhaupt alle, welche wissen, was zur Würde einer Wissenschaft gehört, gern zugeben; aber ein Punkt ist noch übrig, der zweifelhaft seyn könnte, und den ich nicht verschweigen darf, da ich unter zweyen Wegen, die ich gehen konnte, einen erwählen mußte. Es ist nämlich die Frage: ob man Anfängern die trockenen Lehren vorlegen, oder deren Vortrag mit nutzbaren Anwendungen verweben solle; und durch welches von beyden das Studium der Wissenschaft am meisten erleichtert werde? Die eine Parten stimmt für die unmittelbare Anwendung eines jeden Satzes; theils

weil der Lehrling, natürlicherweise zu wissen verlange, wozu das, was er lernen soll, nützlich sey; theils weil der Satz selbst durch seine Anwendung in mehreres Licht gesetzt werde, theils weil der Vortrag durch die specielle Behandlung viel von seiner Trockenheit verliere, und durch die Mannichfaltigkeit der Sachen an Lebhaftigkeit und Interesse gewinne. Die andere Parten fodert eine gedrängte Behandlung der Lehren und Vorschriften, die nur durch wenige, aber ausgesuchte, Beyspiele erläutert werden, und verwirft die Anwendung der abstracten Lehren für die im Folgenden häufig vorkommenden Gelegenheiten, wo erst ein weiter Gebrauch davon zu machen ist. Ich getraue mir zwar nicht, zwischen diesen Partenen zu entscheiden; aber das dünkt mich doch, daß man bey letzterer wichtigere Vortheile gewinnen, und der Natur der Sache viel näher kommen könne. Denn wird nur das, was zur Hauptsache gehört, ohne fremde Einmischung gesagt, und daher in einen engern Raum zusammengebracht; so wird nicht nur die Aufmerksamkeit des Lehrlings auf die Sache allein geheftet, sondern auch die Uebersicht des Ganzen, und der Gebrauch des Erlernten, um ein Grosses erleichtert. Hiezu kommt noch, welches vorzüglich zu bedenken ist, daß frühzeitige Anwendungen schwieriger sind, als es vielen, denen

nen

nen nicht alle es dazu erforderliche Bekannt ist, so
seyn scheint. Und überhaupt genommen, glaube
man, einem nicht ganz seltenen Vorurtheile nach,
ja nicht, daß man jemanden durch das Studium
mathematischer Schriften [illegible]. Denn
die Absicht allen unserer Abstractionen, die zu den
nothwendigen Vervollkommnungen endlichen Ge-
stes gehören, ist ja, so möglich wenigstens Kinder
zusammenzufassen, zum weitern eingeschränkten
Blicke zu statten zu kommen, da jedem bekannt ist,
jede Aufgabe um desto schwerer zu übersehen ist, je
mehrere besondere Bestimmungen darein verwebt
sind. Die Erlernung abstracter Regeln ist daher
nicht das Schwerste der Wissenschaft, welches man
zu überwinden hat, sondern die Anwendung dieser
Regeln ist es, wozu mehr Kenntniß, mehr Uebung
und mehr Kopf erfodert wird, als man beym ersten
Anfange der Erlernung voraussetzen kann. Die-
ses wird mich hoffentlich rechtfertigen, daß ich bey
meinem Plane nicht diejenigen Lehrlinge vor Au-
gen gehabt, welche nur für specielle Absichten die
Mathematik erlernen, und sich auch nur auf einen
besondern Theil derselben einschränken wollen, wel-
che daher zur frühesten Anwendung des wenigen
eilen, was sie nun etwa wissen, so mangelhaft
solche auch seyn mag; sondern mich vielmehr nach
dem bessern Theile gerichtet habe, welcher das

Ganzen zu umfassen strebt, und nicht eher Anwendungen verlangt, als bis solche in ihrer Vollkommenheit gemacht werden können. Auch konnte es mir an solchen Anwendungen, jede an dem ihr zugehörigen Orte, nicht fehlen, da die Wissenschaft, die ich zu bearbeiten hatte, von einem so weitem Umfange, und von so vielem und mannichfaltigem Inhalte ist, auch alle ihre Theile solche Beziehungen auf einander haben, daß der eine der Hülfe des andern nicht entbehren kann.

Vorrede
zu der gegenwärtigen Ausgabe.

Alle Lehrbücher einer Wissenschaft, welche von Alters her so sehr bearbeitet, und auf so feste Gründe gebauet ist, als die Mathematik, und vielleicht diese allein, von sich rühmen darf, können und müssen auch nur einerley enthalten, und sich im Ganzen immer ähnlich bleiben. Auch beweist die Geschichte dieser Wissenschaft, worin man von je her so durchgängig einverstanden gewesen ist, genugsam, daß man darin zu jeder Zeit,

und bey jedem Volke, nur einerley Sprache geführt, und nur einerley Lehren vorgetragen habe. Das Lehrbuch der Geometrie, das vor mehr als 2000 Jahren geschrieben worden ist, hat noch jetzt denselben Werth, den es auch in aller Zukunft behalten wird, und von den ersten Lehrbüchern in andern Theilen der Mathematik gilt ein Aehnliches. Bey diesen Umständen sollte man glauben, daß in dieser Wissenschaft die Zahl der Lehrbücher nur sehr klein, wenigstens geringer, als in jeder andern, seyn müsse; dennoch findet sich hiervon gerade das Gegentheil, und ich getraue mir zu behaupten, daß, die hier so wie in den übrigen Wissenschaften entbehrlichen abgerechnet, keine andere Wissenschaft so viele gute Lehrbücher aufzuweisen habe, als eben die Mathematik, wovon sich auch die Ursachen leicht angeben lassen:

Diese Wissenschaft nämlich, welche stets eine Beschäftigung der Denker aller Zeiten und Nationen gewesen ist, hat von Zeit zu Zeit weitere Fortschritte gemacht, und besonders in den drey letztern Jahrhunderten ihr Gebiet zum Erstaunen erweitert. Auch ist dieses das Eigenthümliche einer völlig zur Wissenschaft gediehenen Disciplin, daß sie nicht auf einem gewissen Punkte stehen bleibt, sondern immer wei-

weiter vorrückt, ein Umstand, dessen sich der berühmteste Philosoph unsrer Zeit zum Beweise bedient, daß Etwas, was den Namen Metaphysik mit Grunde führen könne, noch gar nicht existire. Nun macht aber jede merkliche Erweiterung in einer Wissenschaft, indem sie, wie in der Mathematik alles auf das genaueste zusammenhängt, und sie innig in einander verwebt ist, nöthwendig, wo nicht gänzlich rathsam, ihnen wieder ein neues Gebäude aus den alten noch stets brauchbaren Materien derselben und dem neuen Ganzen anzupassen. Auch war dies bey der Mathematik öfters der Fall, daß die großen Baumeister blos in das Große und Weite arbeiteten, ohne sich um mit allen kleinen Vertheilungen und Anlagen, selbst um einer größern Sicherung einzelner Stücke des Fundaments abzugeben; daher wieder andere große Baumeister, die nach ihnen kamen, das Verlassene erst nachzuholen suchten, ehe sie das ganze Gebäude weiter fortsetzten. Wie solchergestalt das bereits Erfundene immer mehr bearbeitet und mit neuen Erfindungen bereichert wurde, so mußte es nöthig werden, immer wieder neue Lehrbücher zu verfassen, welche dem jedesmaligen Zustande der Wissenschaft angemessen waren, und deren jedes zu seiner Zeit vortreflich [illegible] wenn man die Wolfischen Elemente, und die Kästnerschen

Anfangsgründe mit einander genau in die Reihe der Zwischenzeit gemachten Fortschritten zusammenhielte.

Eine zweyte Quelle, woraus die Mannichfaltigkeit mathematischer Lehrbücher entspringt, ist die verschiedene Rücksicht, in welcher sie abgefaßt worden sind. Denn je mehr man einsehen lernte, welchen Nutzen und welches Vergnügen das Studium der Mathematik gewähre, desto mehrere Liebhaber gewann dasselbe, und desto mehr ward es nöthig, für die verschiedenen Fähigkeiten, Absichten und Bedürfnisse derselben, vermittelst zweckmäßiger Lehrbücher zu sorgen, die sich durch Auswahl, Anordnung und Vortrag mannichfaltig von einander unterschieden, und ihnen hierdurch nicht wenig beytrugen, eine Wissenschaft immer weiter zu bearbeiten, welche es so sehr verdient, allgemein bearbeitet zu werden. Und hier sey es mir vergönnt, meiner geringen Bemühungen zur Mitbeförderung dieser Absicht im Etwas zu gedenken, welches ich nicht wohl thun kann, da ich meinen Lesern von gegenwärtiger neuen Ausgabe des Elements Rechenschaft ablegen habe.

In dem Grundrisse der Mathematik, Helmstädt 1791 und 92, lehre ich blos die gemeine Arith-

metik

metik und Geometrie, und von der angewandten Mathematik dasjenige, was sich aus diesen wenigen Principien herleiten und deutlich erkennen läßt. Hierdurch glaubte ich denjenigen Liebhabern und Freunden mathematischer Kenntnisse einigen Dienst zu leisten, deren Hauptgeschäffte ihnen nur wenige Zeit auf dieses Studium zu wenden verstattet. Zugleich aber sollte dieser Vortrag als erster Cursus, oder als Vorbereitung zu weitern Fortschritten, auch denjenigen dienen, welche die Mathematik in ihrem ganzen Umfange zu erlernen gesonnen sind. Der weitern Ausführung dieses Planes gemäß habe ich die neue Ausgabe meiner Elemente einzurichten gesucht, die nunmehr ein gänzlich umgearbeitetes Lehrbuch geworden ist, welches sich von obgedachtem Grundrisse dadurch unterscheidet, daß beyde für zwey ganz verschiedene Classen von Lehrlingen abgefaßt worden, und dadurch wieder mit demselben in Verbindung steht, daß das eine den Weg zu dem andern bahnen kann. In diesem Gesichtspunkte, aus dem ich nunmehr meinen Plan anzulegen hatte, glaubte ich mich berechtigt, mich derjenigen Fesseln zu entschlagen, durch die der Verfasser eines Lehrbuchs beschränkt wird, welches Alten, die sich auf Mathematik legen, Absicht, Fähigkeit und Eifer mag bey ihnen auch noch so verschieden seyn, genugthun solle. Ueber die Art der

Aus-

Ausführung brauche ich hier nichts besonders beyzufügen, da die vorangeschickte Einleitung, und das ausführliche Inhalts-Verzeichniß, den Ueberblick des Ganzen mit hinlänglicher Deutlichkeit gewähren. Nur ein Paar Anmerkungen sey mir noch hinzuzuthun verstattet.

Die Geometrie ist hier noch genauer nach dem Vortrage des Euklides abgefaßt, als in der vorigen Ausgabe, wo ich bereits den Wunsch und Vorsatz geäußert hatte, den geometrischen Theil seiner Elemente meinem Lehrbuche ganz einzuverleiben. Außerdem, daß Eins und das Andre in der Art des Vortrags zu ändern, und Mancherley noch beyzufügen war, habe ich mich bestrebt, dieses unvergleichbare Muster beständig vor Augen zu haben, und selbst in der Ordnung und Folge der Sätze so wenig als möglich davon abzuweichen. Gar sehr sind mir hiebey die Bemerkungen des Herrn Professor Pfleiderer zu Tübingen, in dessen kleinen akademischen Schriften zu statten gekommen, welche ich überhaupt bey der neuen Ausgabe meiner Elemente, besonders dem geometrischen Theile derselben, aufs beste zu benutzen gesucht habe.

Die Analysis, die gleichsam einen abgesonderten Theil meines hauptsächlich für die niedere Ma-

the-

themat bestimmten Lehrbuches ausmacht, ist ein kurzer Auszug aus des Herrn Hofrath Kästners Anfangsgründen der Analysis des Endlichen und des Unendlichen. Meine Absicht dabey war, Anfängern einen ächten Vorschmack von diesem Theile der Mathematik zu geben, und dieselben schon durch dieses Wenige zum mannichfaltigen Gebrauche desselben vorzubereiten, auch sie zur weitern Verfolgung dieser reizenden Wissenschaft eben dadurch zu ermuntern und beherzt zu machen. Zu Erreichung dieser Absicht schien es mir nöthig, der Analysis des Endlichen eine Art von Vollständigkeit, so weit solches ein beschränkter Auszug verstattet, zu geben; und hinreichend, aus der Analysis des Unendlichen blos die ersten Kapitel auszuheben. Bey letzterer habe ich mich aller Ausdrücke des Unendlichkleinen, und der verschiedenen Ordnungen des Unendlichen enthalten; nicht, weil ich sie unter solchen Einschränkungen und Erklärungen, wie man sie z. B. beym Herrn Hofrath Kästner findet, für unstatthaft hielte, sondern weil man in unsern Tagen wiederum angefangen hat, mit diesen unschuldigen Worten Krieg zu führen, und ich für rathsam halte, die Liebhaber der Mathematik von Allem, was ein polemisches Ansehen hat, so lange als möglich zurückzuhalten. Die Lehre von den Logarithmen kann zwar viel kürzer, als es hier geschehen ist, behandelt

handelt werden, aber anderen, denn dazu muß noch andere Kenntnisse vorausgeschickt sind, halte ich die hier gebrauchte Methode gerade wegen einer größern Uebung der Anfänger für vortheilhafter, und glaube, daß solche von Herrn Hofrath Kästner, dem ich auch hierin gefolgt bin, aus eben den Gründen erwählt worden ist. Kloster Berge bey Magdeburg, im Junius 1793.

J. F. Lorenz.

Ein-

Einleitung in die gesammte Mathematik.

1. Der Gegenstand der Mathematik ist überhaupt die Größe, oder alles, was an einem Dinge einer Vermehrung sowohl, als einer Verminderung fähig ist; insbesondere aber ertheilt die Mathematik solche allgemeine Begriffe und Lehren von den Größen, aus denen sich ihre Vergleichung durch Schlüsse herleiten läßt.

2. Die reine oder abstracte Mathematik, mathesis theoretica, seu pura, die auch schlechthin Mathematik heißt, betrachtet die Größe an sich, ohne auf die anderweitigen Eigenschaften der Dinge, an denen sich die Größe befindet, zu sehen.

3. Die Größe aber ist theils abgesondert, quantitas discreta; theils zusammenhangend oder stetig, continua. Jene betrachtet man bloß als eine Menge von Dingen, die entweder wirklich von einander abgesondert sind, oder auf deren Verbindung man nicht achten will. Diese findet sich an allen ausgedehnten Dingen, deren Theile so mit einander verbunden sind, daß das Ende eines jeden Theils zugleich der Anfang eines andern Theils ist; ob es gleich auch verstattet ist, diese Verbindung der Theile aus der Acht zu lassen, also selbst das Ausgedehnte als eine abgesonderte Größe zu behandeln.

4. Die abgesonderte Größe gehört für die Arithmetik, (in der weitesten Bedeutung) die, weil ihre Untersuchungen allgemein von beyden Arten der Größe gelten, mathesis universalis heißen könnte. Die stetige Größe gehört für die Geometrie (in der weitesten Bedeutung), die, weil sie alles, was ausgedehnt ist, umfaßt, mathesis extensorum genannt werden könnte.

5. Diese beyden Theile der (reinen) Mathematik sind von einem so weiten Umfange, daß man zur bequemen Erlernung und Uebersicht einer so großen Menge von Wahrheiten besondere Abtheilungen nöthig gefunden hat, die nunmehr so angegeben werden sollen, wie sie in den Lehrbüchern dieser Wissenschaft eingeführt sind.

6. Die Arithmetik ist die Wissenschaft der Zahlen, und enthält theils die gemeinen Rechnungsarten; theils die Potenzen der Zahlen, und die Ausziehung ihrer Wurzeln der niedrigsten Grade; theils die verschiednen Arten, Zahlen mit einander zu vergleichen, oder die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen.

7. Man zertheilt die Arithmetik in die gemeine, vulgaris, oder die Rechnung mit Ziffern; und in die allgemeine, universalis, oder die Buchstabenrechnung, calculus literalis, welche die Buchstaben als allgemeine Zeichen der Zahlen gebraucht. Diese Absonderung aber ist der Wissenschaft selbst nachtheilig, welche ohne Hülfe allgemeiner Zeichen nie recht vollständig, deutlich und überzeugend abgehandelt werden kann; nur müssen freylich die ersten ganz gemeinen Rechnungen nicht auf Buchstabenrechnung gebauet werden.

8. Die Analysis lehret das Unbekannte mit dem Bekannten verbinden, um dadurch zu finden, wie das Unbekannte aus dem Bekannten bestimmt werden könne. Besonders geschiehet dieses mittelst der Gleichungen, welche in verschiedenen Ausdrücken einer und ebenderselben Größe bestehen. Deshalb heißt die Analysis auch

Alge-

Algebra; wiewohl diese eigentlich nur ein Theil von jener ist. Die Algebra nämlich ist die Wissenschaft von den Gleichungen, deren sich die Analysis zu ihren Untersuchungen bedient, und wird in die gemeine, und die allgemeine eingetheilt, so daß erstere nur einzelne Vorschriften und nur für niedrigere Gleichungen enthält; letztere aber die Theorie aller auch der höhern Gleichungen umfaßt. Diese Absonderung ist für Lehrbücher der Mathematik vortheilhaft, worin man mit den Gleichungen der beyden ersten Grade schon ziemlich weit reichen, folglich die allgemeine Algebra, oder die Analysis in engerer Bedeutung, vorerst noch beyseit setzen kann.

9. Da man jede wirkliche Größe mit bestimmten und gegebenen Größen ihrer Art vergleichen kann: so sagt man von ihr, daß sie sich angeben lasse, oder daß sie endlich sey. Alles also, was sich nicht angeben ließe, was entweder größer oder kleiner als alles Endliche wäre, müßte man unendlich nennen. So viel muß vorerst hinreichen, die Analysis des Endlichen, analysis finitorum, von der Analysis des Unendlichen, analysis infinitorum, oder Infinitesimalrechnung, calculus infinitesimalis, zu unterscheiden.

10. Zu der Analysis des Unendlichen gehört die Differential- und Integralrechnung, calculus differentialis et integralis. Erstere lehrt, aus Vergleichungen endlicher Größen die Vergleichung ihrer unendlichkleinen Theile zu finden; letztere aber, aus Vergleichung ihrer unendlichkleinen Theile, die Vergleichung der Größen selbst wieder darzustellen.

11. Die Geometrie ist die Wissenschaft des Ausgedehnten, und besteht aus der Planimetrie und Stereometrie, wovon jene, oder die ebene Geometrie, alle ihre Untersuchungen auf einerley Ebene einschränkt; diese, oder die körperliche Geometrie, zwey oder mehrere Ebenen, selbst auch gebogene Flächen betrachtet.

12. Ein wichtiges Capitel der Geometrie ist die Lehre von den Triangeln, welche die Geometrie selbst, zu verzeichnen lehrt; die Trigonometrie aber berechnet. Auch erstreckt letztere ihre Untersuchungen selbst auf solche Triangel, die man auf der Oberfläche einer Kugel beschreibt, und wird deshalb in die ebene und sphärische, trigonometria plana et sphaerica, eingetheilt.

13. Die niedere oder gemeine Geometrie, geometria elementaris, schränkt sich blos auf die gerade Linie und den Kreis ein; die höhere, sublimior, aber begreift alle Arten von krummen Linien, und heißt daher auch geometria curvarum, zu deren Untersuchung man alle Kunstgriffe der Analysis anwenden muß.

14. Eben so pflegt man auch die ganze Mathematik abzutheilen, indem man zu der niedern oder Elementarmathematik die Arithmetik, Algebra, gemeine Geometrie und Trigonometrie; zu der höhern aber die eigentliche Analysis nebst ihrer Anwendung auf die gesammte Geometrie rechnet.

15. Die gemischte oder angewandte Mathematik, mathesis mixta seu applicata, wendet die reine Mathematik (2. 14.) auf besondere Gegenstände an, von deren anderweitigen Eigenschaften sie auch eine oder die andere zugleich mit in Betracht zieht. Da solche Gegenstände und deren Eigenschaften zu dem Gebiete der Physik gehören, und nur zu mathematischen Untersuchungen ausgehoben werden: so heißen diese auch physisch-mathematische Wissenschaften, doctrinae physico-mathematicae, welche die sogenannte gemischte oder angewandte Mathematik ausmachen, und füglich unter vier Classen gebracht werden können:

1) Die dynamischen oder mechanischen Wissenschaften, von den Kräften der Körper.
2) Die optischen Wissenschaften, von den Erscheinungen, die das Licht gewährt.

3) Die

3) Die astronomischen Wissenschaften, von den Körpern des Weltgebäudes.

4) Die technische Mathematik, von einigen der vorzüglichsten Künste.

16. I. Die mechanischen Wissenschaften handeln von den Kräften der Körper, die, wenn sie sich entgegenwirken, einander entweder ganz, oder zum Theil aufheben; da dann im ersten Falle das Gleichgewicht, im zweyten die Bewegung entsteht.

17. Der erste Theil der mechanischen Wissenschaften handelt vom Gleichgewichte, und zwar

1) in der Statik vom Gleichgewichte überhaupt, besonders bey festen Körpern;

2) in der Hydrostatik, vom Gleichgewichte flüssiger unelastischer Körper;

3) in der Aërostatik, oder Aërometrie, vom Gleichgewichte flüssiger elastischer Körper.

18. Der zweyte Theil der mechanischen Wissenschaften handelt von der Bewegung und zwar

1) in der Mechanik, von der Bewegung überhaupt, besonders bey festen Körpern.

2) in der Hydraulik, von der Bewegung flüssigen Körper.

19. II. Die optischen Wissenschaften handeln vom Lichte, und den Gesetzen des Sehens, welches entweder mit bloßen Augen, oder durch geschliffene Gläser, oder vermittelst der Spiegel geschieht. Daher entstehen die drey Theile der optischen Wissenschaften: die Optik, Dioptrik, Catoptrik.

20. Die Optik handelt von den allgemeinen Gesetzen des Sehens, und betrachtet die Lichtstrahlen, als kämen sie von den Gegenständen in geraden Linien in unser Auge; kurz, handelt von geraden Lichtstrahlen.

21. Eine besondere Anwendung der Optik ist die Perspectiv, welche lehrt, die Gegenstände auf einer Flä-

che so abzubilden, daß die Gemählde eben die Wirkung, als die Gegenstände selbst, im Auge machen.

22. Die Dioptrik handelt von den Erscheinungen durch geschliffene Gläser, und überhaupt von Lichtstrahlen, die, wenn sie aus einer durchsichtigen Masse in eine andere von mehrerer oder minderer Dichtigkeit übergehen, von ihrer Richtung abgeleitet, das ist, gebrochen werden; kurz, handelt von gebrochenen Lichtstrahlen.

Anmerk. Diese Wissenschaft giebt uns Aufschlüsse über den Bau und die Einrichtung unserer Augen, und über die Beschaffenheit der Augengläser, Vergrößerungsgläser, und dioptrischen Fernröhre.

23. Die Catoptrik handelt von den Erscheinungen durch Spiegel, und überhaupt von Lichtstrahlen, die, indem sie auf die glatte und polirte Oberfläche eines undurchsichtigen Körpers fallen, nach einem bestimmten Gesetze davon zurückprallen, das ist, reflectirt werden; kurz, handelt von reflectirten Lichtstrahlen.

Anmerk. Diese Wissenschaft untersucht die Wirkungen verschiedener Arten von Spiegeln, und die Werkzeuge, die aus Spiegeln und geschliffenen Gläsern zusammengesetzt werden.

24. III. Die astronomischen Wissenschaften handeln von den Körpern des Weltgebäudes, und der davon abhängenden Ausmessung des Raums und der Zeit auf unserer Erde. Sie enthalten die Astronomie, Geographie, Chronologie, und Gnomonik.

25. Die Astronomie betrachtet die Lage, Entfernung, Figur, Größe und Bewegung der Körper im Weltgebäude, und wird in die sphärische und theorische eingetheilt. Jene betrachtet die Weltkörper so wie sie unsern Augen erscheinen; diese erforscht, wie die Weltkörper beschaffen seyn müssen, daß sie solche Erscheinungen hervorbringen können.

Anmerk. Diese Untersuchungen, welche von der Größe und Weisheit des Schöpfers würdige Begriffe in uns erwecken, und uns zu seiner Anbetung hinreißen, setzen die optischen und dynamischen Wissenschaften und überhaupt alle im Vorhergehenden vorgetragenen mathematischen Kenntnisse voraus, welche sich in der Astronomie gleichsam concentriren.

26. Die Geographie betrachtet insbesondere unsere Erdkugel nach ihrer Gestalt, Größe und Lage im Weltraume, und der hievon abhangenden Eintheilung und Abmessung ihrer Oberfläche.

27. Die Chronologie lehrt die Zeit auf unserer Erdkugel nach den Bewegungen der Weltkörper in großen und kleinen Abschnitten bestimmen.

28. Die Gnomonik lehrt die kleinen Abtheilungen der Zeit nach der Lage des Schattens bestimmen, den ein dunkler, besonders von der Sonne erleuchteter Körper auf eine Fläche wirft.

29. IV. Die technische Mathematik enthält die Anwendung der Mathematik auf verschiedne erhebliche Künste; von denen blos die Baukunst, oder Architectur; die Geschützkunst, oder Artillerie; und die Befestigungskunst, oder Fortification, in den Lehrbüchern der gesammten Mathematik, und zwar nur als ein Anhang, vorzukommen pflegen.

30. Die mathematische Lehrart, welche allen andern Wissenschaften zum Muster dient, kann und muß aus der Mathematik selbst erlernt werden. Nur einige Kunstwörter, die, ob sie gleich nicht das Wesen der Lehrart ausmachen, dennoch zur deutlichern und leichtern Einsicht nicht ohne Nutzen sind, sollen hier noch kürzlich angezeigt werden.

31. Eine Erklärung, definitio, ist die Anzeige des bestimmten Begriffs, welcher unveränderlich mit einem Worte verknüpft wird.

Anmerk. Es iſt erlaubt, einen beliebigen Begriff mit einem Worte zu verknüpfen, wenn dies nur unveränderlich geſchieht, und ſolcher Begriff nichts unmögliches enthält: daher Euklides und ſeine Nachfolger immer die Möglichkeit ihrer Begriffe ſorgfältig zeigen, und die Worte durchgängig in der einmal feſtgeſetzten Bedeutung gebrauchen.

32. Beſtehen die Erklärungen in der Anzeige der Art, wie die Sache entſtehen kann, woraus ihre Möglichkeit von ſelbſt einleuchtet: ſo heißen ſie Sacherklärungen, definitiones reales, ſeu genetiçae; alle übrige nennt man Worterklärungen, nominales.

33. Ein Satz, der blos behauptet, daß Etwas ſo ſey oder nicht ſey, heißt ein Grundſatz, axioma, wenn ſeine Wahrheit ſogleich erkannt wird, ſo bald man nur die Worte verſteht; ein Lehrſatz, theorema, aber, wenn ſeine Wahrheit erſt aus andern Wahrheiten hergeleitet werden muß.

34. Ein Satz, der Etwas zu bewerkſtelligen verlangt, heißt eine Foderung, poſtulatum, wenn die Art der Bewerkſtelligung und deren Richtigkeit von ſelbſt in die Augen fällt; eine Aufgabe, problema, aber, wenn die Art der Verrichtung gelehrt, und deren Richtigkeit dargethan werden muß.

35. Ein Satz, der in einem andern Satze enthalten iſt, oder daraus gefolgert werden kann, heißt ein Zuſatz, corollarium.

Anmerk. Die Grundſätze machen mit den Zuſätzen, welche aus Erklärungen gezogen werden, die Grundlehren einer Wiſſenſchaft aus.

36. Das, was einer Erklärung, einem Lehrſatze, einer Aufgabe, oder einem Zuſatze, zur Erläuterung, Geſchichte, Lehrvortrag, oder Anwendung beygefügt wird, heißt eine Anmerkung, ſcholion.

37. Zuweilen wird ein Satz, der an ſich in den Zuſammenhang des Vortrags nicht gehört, in der Abſicht, einge-

eingeschoben, daß ein folgender Satz durch dessen Hülfe bewiesen werden könne, und heißt alsdann ein Lehrsatz, lemma.

38. Zu einem Lehrsatze gehört:

1) Der Satz selbst, der aus dem Angenommenen, und der Aussage besteht.
2) Die Construction, oder Verzeichnung der Hülfslinien zur Führung des Beweises.
3) Der Beweis, der die Aussage aus dem Angenommenen herleitet.

39. Zu einer Aufgabe gehört:

1) Die Frage selbst, die aus dem Gegebenen und dem Gesuchten besteht.
2) Die Auflösung, die das Gesuchte aus dem Gegebenen finden lehrt.
3) Der Beweis, der die Richtigkeit der Auflösung zeigt.

40. Der Beweis, demonstratio, besteht in der augenscheinlichen Darstellung der Verbindung des zu beweisenden Satzes mit ungezweifelten Gründen, welche entweder für sich einleuchtend sind, als die Erklärungen, Grundsätze und Foderungen; oder im Vorhergehenden bereits bewiesen worden sind.

41. Der synthetische Beweis geht von den Gründen aus, und führt zur Conclusion fort.

42. Der analytische Beweis geht von der Conclusion aus, und führt zu den Gründen zurück.

43. Der apagogische Beweis geht von dem Gegentheil der Aussage aus, und führt bis zu einem Widerspruche mit dem Angenommenen, oder mit andern bereits erkannten Gründen.

44. Die Induction beweist den Satz für alle einzelne Fälle, und schließt daraus auf die Allgemeinheit des Satzes.

45. Die Umkehrung ist die Verwechselung des Angenom-

genommenen und der Aussage bey einem Lehrsatze; oder das Gegebenen und des Gesuchten bey einer Aufgabe.

46. Nimmt man ohne Beweis an, daß Etwas so sey oder nicht sey: so heißt ein solcher Satz, wofern er nicht für sich einleuchtend ist, eine Hypothese.

Anmerk. Diesen Namen führt ein möglicher Fall, den man setzt, als das Angenommene bey einem Lehrsatze, oder das Gegebene bey einer Aufgabe; ferner das, was man zur Erklärung einer Erscheinung beliebig annimmt, um zu sehen, ob alles, was bey solcher Erscheinung vorkommt, mit der angenommenen Erklärung übereinstimme, und daraus hergeleitet werden könne; desgleichen das, was man unter mehrern gleich richtigen Dingen willkührlich erwählt, welches daher füglich ein Wahlsatz heißen kann.

47. Zu den unzureichenden Beweisen, wenn ein Beweis aus Gründen, a priori, möglich ist, gehören die Erfahrungen, oder Beweise a posteriori. Diese werden in Beobachtungen und Versuche eingetheilt, und dienen den erwiesenen Sätzen zu Beyspielen und Proben. Allemal sind sie von großem Nutzen; in manchen Fällen aber unentbehrlich, und ohne sie keine Erkenntniß möglich, da sie dann sogar zu den Grundsätzen mit gehören.

Inhalt

Inhalt
des erſten Theils.

Allgemeine Zeichen. S. 1
Allgemeine Grundſätze. S. 2.

I. Die Arithmetik.

A. Von den gemeinen Rechnungsarten.

1. Grundlehren von den Zahlen. S. 3.
Erklärung der Zahlen. §. 1—7. Der Addition und Multiplication. 8—19. Der Potenzen und Wurzeln. 20. Der Subtraction und Diviſion. 21—34. Der Rechnungsarten. 35. 36.

2. Geſetze der Decimalzahlen. S. 8.
Ordnungen der Einheiten. §. 37—40. Stellen der Ziffern. 41—46. Numeration. 47—50.

3. Rechnung mit Decimalzahlen. S. 12.
Regeln der Addition und Subtraction. §. 51—53. Der Multiplication und Diviſion. 54—59. Die Rechnung in benannten Zahlen. 60.

4. Abmeſſung der Zahlen. S. 18.
Erklärung des Zahlen-Maaßes, der geraden Zahlen, der Primzahlen. §. 61—71. Kennzeichen relativer Primzahlen. 72. Das größte Maaß gegebener Zahlen zu finden. 73—78.

5. Rechnung mit Brüchen. S. 20.
Beſchaffenheit der Brüche. §. 78—94. Brüche aufzuheben und gleichnamig zu machen. 95—97. Regeln für die Rechnungsarten in Brüchen. 98—116.

6. Rech-

6. Rechnung mit entgegengeſetzten Größen. S. 29.

Vorbereitungsaufgabe. §. 117. 118. Beſchaffenheit entgegengeſetzter Größen. 119—129. Addition und Subtraction. 130—133. Zeichen der Producte und Quotienten. 134. 135. Multiplication und Diviſion. 136—138.

7. Rechnung mit Buchſtaben. S. 37.

Vom arithmetiſchen Betrachte der Buchſtaben. §. 139—149. Potenzen von einerley Wurzel mit einander zu multipliciren und zu dividiren. 150—162. Vielfältige Größen zu ordnen. 163—167. Zu addiren und zu ſubtrahiren. 168—173. Zu multipliciren. 174—182. Zu dividiren. 183—188. Brüche in Reihen aufzulöſen. 189—195. Von den Reihen. 196—203.

8. Rechnung mit Decimal- und Sexageſimalbrüchen. S. 57.

Beſchaffenheit der Decimalbrüche. §. 204—211. Addition und Subtraction. 212. Multiplication. 213—215. Diviſion. 216. 217. Von den Sexageſimalbrüchen. 218. 219. Von den Zahlenſyſtemen. 220.

B. Von den Potenzen und Wurzeln der Zahlen.

1. Grundlehren von den Potenzen. S. 64.

Eine Zahl auf ihre Potenz zu erheben. §. 221—228. Von den Irrationalzahlen. 229—232.

2. Quadratzahlen und Quadratwurzeln. S. 67.

Vom Quadrate einer zweytheiligen Wurzel. §. 233—239. Die Quadratwurzel aus 4ziffrigen Zahlen. 240. Vom Quadrate einer vieltheiligen Wurzel. 241—243. Die Quadratwurzel aus vielziffrigen Zahlen. 244—248. Das Ausziehen der Quadratwurzel in Buchſtaben. 249—252.

3. Cubikzahlen und Cubikwurzeln. S. 80.

Vom Würfel einer zweytheiligen Wurzel. §. 253—258. Die Cubikwurzel aus 6ziffrigen Zahlen. 259. Vom Würfel einer vieltheiligen Wurzel. 260—262. Die Cubikwurzel aus vielziffrigen Zahlen. 263—267. Das Ausziehen der Cubikwurzel in Buchſtaben. 268—270. Von Wurzeln höherer Grade. 271.

4. Rech.

4. Rechnung mit Wurzelgrößen. S. 92.

Quovis dato minus. §. 272—275. Von unendlichen Näherungen. 276—282. Der Wurzelgrößen Erklärung. 283—285. Sie gleichnamig zu machen. 286—288. Ihre Multiplication und Division. 289. Ihre Potenzen und Wurzeln. 290—292. Ihre Addition und Subtraction. 293. Rechnung mit zusammengesetzten Wurzelgrößen. 294—300. Potenzen der Irrationalgrößen. 301. Der bejahten und verneinten Größen. 302—309. Der eingebildeten Größen. 310. Rechnung mit eingebildeten Größen. 311.

C. Von der Vergleichung der Zahlen.

1. Arten Zahlen zu vergleichen. S. 105.

Erklärung der Verhältnisse. §. 312—318. Der Proportionen. 319—321. Der Progreßionen. 322.

2. Arithmetische Proportionen. S. 107.

Von den Hintergliedern. §. 323—325. Summe der äußern und der mittlern Glieder. 326—328.

3. Arithmetische Progreßionen. S. 108.

Von den folgenden Gliedern. §. 329—335. Summe der äußersten Glieder. 336. Summe der Reihe. 337—342.

4. Geometrische Proportionen. S. 113.

Von den Hintergliedern. §. 343—348. Arten der geometrischen Verhältnisse. 349—351. Verhältnißglieder aufzuheben. 352—359. Produkte der äußern und der mittlern Glieder. 360—365. Kleinster Dividuus gegebener Zahlen. 366—372. Summen und Differenzen der Glieder. 373—376. Zusammensetzung der Proportionen. 377—381.

5. Rechnungsregeln. S. 122.

Einfache Regel Detri. §. 382—385. Theilrechnung. 386—390. Zusammengesetzte Regel Detri. 391—396.

6. Geometrische Progreßionen. S. 128.

Von den folgenden Gliedern. §. 395—398. Differenzreihen. 400—403. Produkt der äußersten Glieder. 404. Summe der Reihe. 405—411.

7. Zusammensetzung der Verhältnisse. S. 132.

Zusammensetzung der Verhältnisse überhaupt. §. 412—416. Bey Produkten. 417—424. Bey geometrischen Reihen. 425—434. Eine Verhältniß ohne Ende zu theilen, und zu vervielfältigen. 435—439.

8. Logarithmen. S. 140.

Verhältnißsysteme. §. 440. 441. Logarithmische Systeme. 442—449. Logarithmen der Produkte und Quotienten. 450. Der Potenzen und Wurzeln. 451. Das gemeine System. 452—455. Für eine Zahl den Logarithmus 456, und für einen Logarithmus die Zahl zu finden. 457.

Anhang.

Beylagen zu der Arithmetik für die Rechnung in benannten Zahlen. S. 150.

II. Die Algebra.

1. Gleichungen überhaupt. S. 159.

Erklärung der Gleichungen. §. 1. Der Algebra. 2—4. Von den Gliedern einer Gleichung. 5—9.

2. Einfache Gleichungen. S. 161.

Erklärung der einfachen Gleichungen. §. 10. Auflösung einfacher Gleichungen mit einer unbekannten Größe. 11—22. Mit zweyen. 23—26. Mit dreyen und mehrern. 27—30.

3. Zusammengesetzte, besonders quadratische Gleichungen. S. 173.

Arten der Gleichungen: bestimmte. §. 31. 32. Rationale. 33. 34. Zusammengesetzte. 35. Reine und gemischte. 36. 37. Wurzeln der Gleichungen. 38. Auflösung reiner Gleichungen. 39—42. Gemischter quadratischer Gleichungen. 43—48.

4. Progreßions- und Zinsenrechnung. S. 177.
Arithmetische Reihen. §. 46—49. Geometrische Reihen. 50—60. Unendliche Reihen. 61—65. Capital und Zinsen. 66. 67. Renten. 68.

5. Unbestimmte Gleichungen. S. 188.
Unbestimmte Analytik. §. 69—74. Beyspiele. 75—77.

III. Die Geometrie.

A. Die Planimetrie.

1. Erste Begriffe von den Figuren. S. 194.
Erklärungen: der Ausdehnung und ihrer Gränzen. §. 1—9. Der Ebenen, Winkel, und Perpendikel. 10—15. Der geradlinichten Figuren und ihrer Arten. 16—23. Des Kreises. 24—28. Aufgaben; von einer geraden Linie ein Stück abzuschneiden. 29. Sie in zweyen Punkten zu schneiden. 30—32. Ueber sie einen gleichseitigen Triangel zu beschreiben. 33.

2. Von der Congruenz. S. 200.
Erklärung der Congruenz. §. 34—40. Congruenz der Triangel aus 2 Seiten und 1 Winkel. 41—43. Vom gleichschenklichten Triangel. 44—47. Congruenz der △ aus 3 Seiten. 48—50. Halbirung der Winkel und Linien. 51. 52. Ziehung eines Perpendikels. 53. Von Neben- und Scheitelwinkeln. 54—61. Vom äußern Winkel. 62—69. Vergleichung der Seiten und Winkel. 70—81. Congruenz der △ aus 2 Winkeln und 1 Seite. 82.

3. Von den Parallellinien. S. 212.
Erklärung der Parallellinien und des Parallelogramms. §. 83—85. Lehrsätze von den Parallellinien. 86—97. Von den Winkeln eines Triangels. 98—106. Von den Seiten und Winkeln eines Parallelogramms. 107—118.

4. Von der Gleichheit des Flächenraums. S. 226.
Höhe der Figuren. §. 119. 120. Von gleichen Parallelogrammen

men und Triangeln. 121—124. Verwandlung der Figuren. 125—129. Der Pythagorische Lehrsatz. 130—133.

5. Vom Kreise. S. 223.

Erklärungen §. 134—141. Vom Perpendikel auf die Sehne. 142—145. Durch 3 Puncte einen Kreis zu ziehen. 146—148. Von schneidenden und berührenden Kreisen. 149—151. Linien aus einem Puncte nach dem Umkreise. 152—154. Berührungspunct zweyer Kreise. 155—157. Abstand der Sehnen vom Mittelpuncte. 158—160. Von den Tangenten. 161—169. Von den Peripheriewinkeln. 170—176. Von gleichen Kreisbogen. 177—180. Vom Winkel im halben Kreise. 181—188.

6. Von geradlinichten Figuren am Kreise. S. 237.

Erklärungen. §. 189—191. Vom Eintragen gerader Linien. 192—195. Von Triangeln am Kreise. 196—198. Von Quadraten am Kreise. 196. 200. Von regulären Polygonen am Kreise. 201—209.

7. Von der Proportion und Aehnlichkeit. S. 244.

Erklärungen. §. 210—219. Quovis dato minus. 220—222. Von den Proportionalgrößen. 223—229. Fernere Erklärungen. 230—234. Triangel von gleichen Höhen. 235—238. Proportion in verkehrter Ordnung. 239—242. Linien im Triangel. 243—246. Theilung der Linien. 247. 248. Vierte und dritte Proportionallinie. 249—251. Verhältniß aus Grundlinien und Höhen. 252—256. Aehnlichkeit der Triangel aus Gleichheit der Winkel. 257. 260. Verzeichnung ähnlicher Figuren. 261. 262. Perpendikel im rechtwinklichen Triangel. 263. 264. Mittlere Proportionallinie. 265. 266. Aehnlichkeit der Triangel aus Proportion der Seiten. 267. 268. Aehnlichkeit der Triangel, wenn ein Winkel einerley ist, und zwey Seiten proportionirt sind. 269—272. Verhältniß ähnlicher Triangel. 273. 274. Verhältniß ähnlicher Polygone 275—278. Von ähnlichen Figuren auf Proportionallinien. 279. Verzeichnung ähnlicher Figuren von bestimmtem Flächenraume. 280. Von ähnlichen Figuren auf den Seiten des rechtwinklichen Triangels. 281.

8. Von

8. Von den Proportionen beym Kreise. S. 263.

Sehnen, Secanten und Tangenten. §. 282—285 Pentagon im Kreise. 286—289. Verhältniß der Kreisbogen. 290—296. Verhältniß ähnlicher Figuren am Kreise. 297—299. Größe der Kreisfläche. 300—302. Verhältniß der Kreise. 303—307. Vergleichung der Kreisbogen mit ihren Sehnen. 307—314.

9. Von Ausmessung der Linien und Figuren. S. 282.

Winkelmaaß. §. 315—318. Fußmaaß 319—323. Verjüngter Maaßstab und Nonius. 324—327. Flächeninhalt geradlinichter Figuren. 328—340. Kreismessung. 342—358.

10. Von Auflösung geometrischer Aufgaben. S. 295.

Aufgaben für Triangel. §. 359—366. Aufgaben für reguläre Polygone. §. 367—376.

B. Die Stereometrie.

1. Von der Lage der Ebenen. S. 303.

Erklärungen. §. 376—381. Bestimmung der Lage einer Ebene. 382—388. Von Linien, die senkrecht auf einer Ebene sind. 389—399. Von parallelen Ebenen. 400—407. Von senkrechten Ebenen. 408—415.

2. Von eckigen Körpern und ihren Ecken. S. 315.

Gestalt oder Figur des Körpers. §. 416. Eckige Körper. 417—420. Pyramide 421. 422. Prisma. 423—426. Von körperlichen Winkeln oder Ecken. 427—437. Congruenz eckiger Körper. 438. 439. Aehnliche Körper. 440. Reguläre Körper. 441. 442.

3. Vom Prisma. S. 326.

Bestimmung eines Prisma. §. 443—449. Grundlehren für Parallelepipeda. 450—454. Vom diagonalen Durchschnitt derselben. 455. 456. Von ihrer Gleichheit. 457—462. Von ihren Verhältnissen. 463—474.

4. Von der Pyramide. S. 337.

Bestimmung einer Pyramide. §. 475—479. Vom Durchschnitt der Pyramide. 480—484. Abtheilung der Pyra-

wilde. 485 — 489. Verhältniſſe der Pyramide 490 — 495. Vergleichung der Pyramide mit dem Priſma. 493 — 496.

5. Vom Cylinder. S. 345.

Erklärung des Cylinders. §. 497 — 501. Beſtimmung eines Cylinders. 502 — 505. Vergleichung des Cylinders mit dem Priſma. 506. 507. Von cylindriſchen Röhren. 508 — 511.

6. Vom Kegel. Seite 348.

Erklärung des Kegels. §. 512 — 517. Beſtimmung eines Kegels. 518. Vom parallelen und Wechſelſchnitt des Kegels. 519 — 522. Vergleichung des Kegels mit der Pyramide. 523. 524.

7. Von der Kugel. S. 352.

Erklärung der Kugel. §. 525 — 527. Kugelkreiſe. 528 — 538. Halbirung der Kugel. 539 — 541. Berührungsebene. 542 — 546. Pole und Axe eines Kugelkreiſes. 547 — 558. Parallelkreiſe. 559 — 568. Vergleichung der Kugel mit dem Cylinder und Kegel. 569 — 577.

8. Vom Ausmeſſen der Körper und ihrer Oberflächen. S. 364.

Inhalt des Parallelepipedons. §. 578 — 585. Inhalt des Priſma. 586 — 592. Oberfläche des Priſma. 593 — 596. Oberfläche des Cylinders. 597 — 600. Inhalt des Cylinders. 601 — 607. Inhalt der Pyramide. 608. 609. Inhalt des Kegels. 610. 611. Oberfläche der Pyramide. 612 — 614. Oberfläche des Kegels. 615 — 621. Oberfläche der Kugel. 622 — 624. Inhalt der Kugel. 625 — 628.

VI. Die Trigonometrie.

A. Die ebene Trigonometrie.

1. Von den trigonometriſchen Linien. S. 381.

Sinus. §. 1 — 10. Coſinus und Querſinus. 11 — 16. Tangente und Secante. 17 — 23. Cotangente und Coſecante. 24 — 28. Von den trigonometriſchen Linien ähnlicher Bogen. 29 — 34.

2. Von

2. Von Zusammensetzung trigonometrischer Linien. S. 391.
Sinus und Cosinus der Summe und Differenz. §. 35 — 41. Tangente und Cotangente der Summe und Differenz. 42 — 44.

3. Von den trigonometrischen Tafeln. S. 398.
Berechnung der Tafeln. §. 45 — 47. Vom Gebrauche der Tafeln. 48. Vorschrift für Bogen in Secunden. 49. 50. Vom Messen und Auftragen der Winkel. 51. 52.

4. Von Auflösung der Triangel. S. 404.
Vergleichung der Seiten und Winkel eines Triangels. §. 53. — 55. Berechnung der Triangel: aus zwey Winkeln und einer Seite. 56. aus zwey Seiten und dem opponirten Winkel. 57 — 59. aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. 60 — 62. aus drey Seiten. 63. Allgemeine Formeln zur Berechnung der Triangel. 64 — 73.

5. Von der trigonometrischen Kreisrechnung. S. 414.
Für den um einen Triangel beschriebenen Kreis. §. 74 — 76. Für Sehne, Centriwinkel und Halbmesser eines Kreises. 77 — 87.

B. Die sphärische Trigonometrie.

1. Von den sphärischen Triangeln überhaupt. S. 418.
Erklärung des sphärischen Triangels. §. 88 — 95. Von seinen Seiten. 96. Von Ergänzung seiner Seiten und Winkel. 97. Von seinen Winkeln. 98.

2. Von den rechtwinklichten sphär. Triangeln. S. 422.
Erklärung rechtwinklichter und schiefer Triangel. §. 99. Gesetze rechtwinklichter Triangel. 100 — 104. Verschiedne Lagen für rechtwinklichte Triangel. 105 — 110. Besonderer Fall für schiefe Triangel. 111.

3. Von den schiefen sphärischen Triangeln. S. 429.
Verschiedene Lagen für schiefe Triangel. §. 112 — 120. Gesetze für schiefe Triangel. 121 — 124. Auflösung schiefer Triangel. 125. 126.

V. Die Analysis.

A. Ergänzung der allgemeinen Arithmetik.

1. Das Binomium. S. 442.

Von der Form $(1+x)^n$ §. 1 — 12. Der Binomische Lehrsatz. 13 — 20.

2. Von den figurirten Zahlen. S. 449.

Erklärung der Hauptreihe. §. 21. Der Differenzreihen. 22. Der arithmetischen Reihen. 23. Allgemeine Formeln für die Differenzreihen und die Hauptreihe. 24. Erklärung der summirten Reihen. 25. 26. der figurirten Zahlen. 27—32. Allgemeine Formeln für die figurirten Zahlen. 33.

3. Von den Permutationen und Combinationen. S. 454.

Anzahl aller möglichen Permutationen. §. 34. 35. Erklärung der Combinationen. 36. Anzahl aller möglichen Combinationen nach den Zahlen Zwey bis Fünf. 37. Allgemeine Formel für jede Combination. 38 — 40.

B. Von den Gleichungen.

1. Ordnungen der Gleichungen. S. 462.

Allgemeine Formen. §. 41. Ordnungen oder Grade. 42 — 46. Erniedrigung des Grades. 47. Eliminirung der unbekannten Größen. 48 — 54. Eliminirung der Wurzelgrößen. 55 — 57.

2. Zergliederung der Gleichungen. S. 470.

Producte aus einfachen Factoren. §. 58 — 66. Ursprung quadratischer Gleichungen. 67. 68. Ursprung höherer Gleichungen. 69. Anzahl der Wurzeln. 70. Gesetz der Coëfficienten, und Beschaffenheit der Wurzeln. 71 — 81.

3. Transformation der Gleichungen. S. 479.

Erklärung und Nutzen der Transformation. §. 82. 83. Transformirung durch Addition und Subtraction. 84 - 88. Durch Multiplikation und Division. 89 — 94. Die Brüche aus den Coëfficienten wegzuschaffen. 95 — 97. Die Divisoren des

des letzten Gliedes zu vermindern. 98. Die Gleichung vollständig zu machen. 99. Ein beliebiges Glied wegzuschaffen. 100 — 105.

4. Auflösung der Gleichungen. S. 486.

Auflösung quadratischer Gleichungen. §. 106 — 110. cubischer Gleichungen. 111 — 116. biquadratischer Gleichungen. 117. 118. Von den Gränzen der Wurzeln. 119 — 127. Von Wurzelnäherungen. 128 — 130.

C. Von den Functionen.

1. Hauptarten der Functionen. S. 496.

Erklärung der veränderlichen und beständigen Größen. §. 131 — 133. Erklärung der Functionen. 134 — 140. Aehnliche Functionen. 141. Functionen von einerley Form. 142. Einförmige und vielförmige Functionen. 143. Entwickelte und verwickelte. 144 — 147. Algebraische und transscendente. 148. 149. Rationale und irrationale, ganze und gebrochene. 150. 151.

2. Auflösung der Functionen in Reihen. S. 501.

Lehrsatz von den Coëfficienten. §. 152 — 154. Auflösung einer gebrochenen Function. 155 — 160. Auflösung einer irrationalen Function. 161 — 164. Ausdruck der einen veränderlichen Größe durch Potenzen der andern. 165. Anmerkung vom Newtonischen Parallelogramm. 166.

D. Von den krummen Linien.

1. Gleichungen für Linien. S. 508.

Gleichungen für den Kreis und die gerade Linie. §. 167 — 169. Abscissen, Ordinaten, Ordinatenwinkel, rechtwinklichte Coordinaten. 170 — 175. Veränderung der Coordinaten. 176 — 178. Gleichungen für die Kegelschnitte zu finden. 179 — 182. Aus der Gleichung die Linie zu finden. 183 — 185. Algebraische und transcendente Linien. 186. Ordnungen

der Linien, und Geſchlechter der Curven, 187. Allgemeine Kegelſchnitte, und Familien der Curven. 188. Durchmeſſer, Axe, Scheitel, und Schenkel der Curven. 189.

2. Von der Parabel. S. 516.

Erklärung der Parabel. §. 190 — 195. Verhältniß der Ordinaten und Abſciſſen. 196. Erklärung des Brennpunkts. 197. Brennpunkt der Parabel. 198. 199.

3. Von der Ellipſe. S. 518.

Erklärung der Ellipſe. §. 200 — 203. Mittelpunkt und kleine Axe. 204 — 206. Gleichung aus dem Mittelpunkte. 207 — 210. Gleichung aus verwechſelten Axen und Coordinaten. 211. 212. Verhältniß der Ordinaten. 213. Brennpunkte der Ellipſe. 214 — 216. Gleichung aus den Brennpunkten. 217. Abſtand der Ellipſe von den Brennpunkten. 218 — 220. Vergleichung zwiſchen Ellipſe und Parabel. 221. Von Aehnlichkeit der Ellipſen. 222 — 225.

4. Von der Hyperbel. S. 524.

Erklärung der Hyperbel. §. 226 — 229. Mittelpunkt und kleine Axe. 230 — 234. Brennpunkte der Hyperbel. 235. 236. Abſtand der Hyperbel von den Brennpunkten. 237. 238. Von den Aſymptoten. 239 — 242. Gleichung zwiſchen den Aſymptoten. 243. 244. Potenz der Hyperbel. 245. Schnitt der Hyperbel. 246. 247. Die gleichſeitige oder rechtwinklichte Hyperbel. 248 — 250.

5. Von Linien höherer Ordnungen. S. 530.

Die Ciſſoide, Ciſſois Diaclis. §. 251 — 256. Die Muſchellinie, Conchois Nicomedis. 257 — 263. Anmerkung von Conſtruction der Gleichungen. 264.

9. Von tranſcendenten Linien. S. 533.

Die Schneckenlinie, oder Spirallinie, helix ſ. ſpiralis Archimedis. §. 265 — 268. Die Cycloide oder Radlinie, Cyclois. 269 — 275. Von der Natur tranſcendenter Linien. 276.

E. Von

E. Von der Differentialrechnung.

1. Grundlehren der Differentialrechnung. S. 536.

Erklärung des Wachsthums ins Unendliche. §. 277—279. der unendlichen Abnahme. 280—283. der unendlichen Näherung. 284—286. Grundlehren von den Gränzen. 287—290.

2. Grundregeln des Differentiirens. S. 541.

Erklärung der Differentialverhältniß §. 291. 292. Die Differentialverhältniß aus der gegebenen Function zu finden. 293. 294. Erklärung der Differentialgleichung. 295. Differential einer einfachen Größe. 296—299. eines Products. 300. 301. eines Quotienten. 302. einer Wurzel. 303. einer Potenz mit negativen Exponenten 304—306. Anhang einiger Differentialformeln. 307—309. Beweis des binomischen Lehrsatzes für jeden Exponenten. 310.

3. Von den Tangenten der krummen Linien. S. 549.

Erklärung der Tangente. §. 311—315. des hohlen und erhobenen Bogens. 316—320. der Subtangente. 321. Die Subtangente jeder krummen Linie zu finden. 322-325. Subtangente der Parabel. 326. Subtangente der Ellipse und Hyperbel. 327. 328. Erklärung der Normallinie und Subnormallinie. 329. Die Subnormale jeder krummen Linie zu finden 330—334. Gleichheit der Winkel, welche die Tangente der Ellipse mit den Linien aus denn Brennpunkten machen. 335—337. Lage der Asymptoten, 338. 339. Tangenten bey Ordinaten aus einem Punkte. 340—342. Schlußanmerkung. 343.

F. Von der Integralrechnung.

1. Grundbegriffe vom Integriren. S. 560.

Erklärung des Integrirens. §. 344. 345. Allgemeine Integralformeln. 346. 347. Ergänzung des Integrals. 348.

2. Quadratur der krummen Linien. S. 562.

Differential einer krummlinichten Fläche. §. 349. Quadratur jeder

jeder krummen Linie. 350. Quadratur der Apolloniſchen Parabel. 351—353. Quadratur einer Hyperbel. 354.

3. Die logarithmiſchen Differentiale. S. 566.

Verzeichnung der logarithmiſchen Linie. §. 355—359. Ihre Gleichung. 360. Logarithmiſches Differential. 361. 362.

4. Reihen für die Logarithmen. S. 569.

Reihe für den Logarithmus. §. 363. 364. Reihe für die Zahl. 365. 366. Andere Reihe für den Logarithmus. 367—370. Erklärung der natürlichen Logarithmen. 371. 372. Natürliche Logarithmen der erſten 10 Zahlen. 373. Noch zwey Formeln für die natürlichen Logarithmen. 374. Vergleichung der logarithmiſchen Syſteme. 375—380. Verbindung der natürlichen Logarithmen mit der Quadratur der Hyperbel. 381. 382. Unterſchied zwiſchen gemeinen, natürlichen und Neperiſchen Logarithmen. 383.

5. Umgekehrte Methode der Tangenten. S. 580.

Erklärung. §. 384. Die Linie zu finden, deren Subtangente gegeben iſt. 385. Die Linie zu finden, deren Subnormale unveränderlich iſt. 386. 387.

6. Rectification der krummen Linien. S. 581.

Differential eines Bogens. §. 388. Rectificirung eines Bogens. 389. Rectificirung der Neiliſchen Parabel. 390. Schlußanmerkung. 391.

Elemente
der
reinen Mathematik.

Allgemeine Zeichen.

1. $A=B$, d. i. die Größe A ist gleich der Größe B.
2. $A \backsim B$, d. i. A ist ähnlich B.
3. $A > B$, d. i. A ist größer als B.
4. $A < B$, d. i. A ist kleiner als B.
5. $A + B$, d. i. zu A ist B hinzugethan.
6. $A - B$, d. i. von A ist B weggenommen.
7. $A . B$, oder $A \times B$, d. i. A ist durch B vervielfältiget.
8. $A : B$, oder $\frac{A}{B}$, d. i. A ist durch B getheilt. Auch bedeutet A : B die Verhältniß der A zu B.
9. A^n, d. i. die nte Potenz von A; $\sqrt[n]{A}$, d. i. die nte Wurzel aus A.

Allgemeine Grundsätze.

1. Von gleichen Dingen A, B, läßt sich, der Größe unbeschadet, das eine für das andere setzen.

2. Jede Größe A ist sich selbst, so wie auch allen ihren Theilen, a, b, c, zusammen gleich.

$$A = A;\ A = a + b + c.$$

3. Das Ganze A ist größer als jeder seiner Theile, a, b, c.

$$A > a,\ A > b,\ A > c,\ A > a + b \text{ u. s. w.}$$

4. Sind zwey Größen, A, B, einer dritten C gleich, so sind sie selbst gleich.

Ist $A = C$, und $B = C$, so ist $A = B$.

5. Gleiches zu Gleichem hinzugesetzt, giebt Gleiches.

Ist $A = B$, und $C = D$, so ist $A + C = B + D$.

6. Gleiches zu Ungleichem hinzugesetzt, giebt Ungleiches.

Ist $A > B$, und $C = D$, so ist $A + C > B + D$.

7. Gleiches von Gleichem weggenommen, läßt Gleiches.

Ist $A = B$, und $C = D$, so ist $A - C = B - D$.

8. Gleiches von Ungleichem weggenommen, läßt Ungleiches.

Ist $A > B$, und $C = D$, so ist $A - C > B - D$.

9. Gleiches gleichvielmal genommen, bringt Gleiches.

Ist $A = B$, so ist $n . A = n . B$.

10. Ungleiches gleichvielmal genommen, bringt Ungleiches.

Ist $A > B$, so ist $n . A > n . B$.

11. Gleiches durch Gleiches getheilt, bringt Gleiches.

Ist $A = B$, so ist $\frac{A}{n} = \frac{B}{n}$.

12. Ungleiches durch Gleiches getheilt, bringt Ungleiches.

Ist $A > B$, so ist $\frac{A}{n} > \frac{B}{n}$.

I.
Die Arithmetik.

Der erste Abschnitt.
Von den gemeinen Rechnungsarten.

1. Die Grundlehren von den Zahlen.

§. 1. Erkl. Dinge von einerley Art heißen die, an denen man blos ihr Uebereinstimmiges betrachtet.

§. 2. Erkl. Die Einheit ist das, worin mehrere Dinge übereinstimmen, wonach auch jedes dieser Dinge eine Einheit oder Eins heißt.

§. 3. Erkl. Eine Zahl ist eine gewisse Menge von Dingen einerley Art, oder von Einheiten.

§. 4. Erkl. Eine Zahl heißt benannt, wenn ihr Name, d. i. die Art der Einheiten, aus denen sie besteht, zugleich angezeigt wird: unbenannt aber, wo dieses nicht geschieht.

§. 5. Zus. 1. Nur Dinge von einerley Art lassen sich zusammenzählen, oder können eine Zahl ausmachen.

§. 6. Zus. 2. Eine Zahl bleibt dieselbe, wenn die Menge ihrer Einheiten dieselbe bleibt, von welcher Art diese auch

seyn mögen. Aber die Größe, welche durch die Zahl ausgedrückt wird, beruhet auf der Größe der Zahl selbst, und auf der Größe der Einheiten, aus denen die Zahl besteht.

§. 7. Zus. 1. Eine Zahl wird **vermehrt**, oder **vermindert**, je nachdem solche Einheiten, aus denen sie besteht, zu ihr gesetzt, oder von ihr weggenommen werden.

§. 8. Erkl. Eine Zahl S, welche zweyen oder mehrern Zahlen A, B, C, ꝛc. zusammengenommen gleich ist, heißt deren **Summe**. Zwey oder mehrere Zahlen A, B, C, **addiren** oder **zu einander setzen**, heißt deren Summe S finden. $A+B+C=S$.

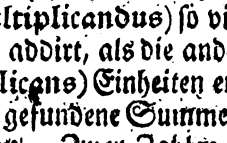
§. 9. Zus. Die Summe zweyer Zahlen A, B, ist einerley, man mag die zweyte zur ersten, oder die erste zur zweyten setzen: $A+B=B+A$. Und so auch bey mehrern Zahlen.

§. 10. Erkl. Eine Größe A heißt ein **aliquoter Theil** einer andern B, und die andre B ein **Vielfaches** der ersten A, wenn die erste A etlichemal zu sich selbst gesetzt, der andern B gleich wird.

§. 11. Zus. 1. Jede Zahl ist ein Vielfaches der Einheit, und die Einheit ein aliquoter Theil jeder Zahl.

§. 12. Zus. 2. Von zweyen Zahlen ist jede entweder ein Vielfaches der andern, oder doch ein Vielfaches von irgend einem aliquoten Theile der andern.

§. 13. Erkl. Wird von zweyen Zahlen, AB, BC, (den Factoren) die eine AB (der Multiplicandus) so vielmal zu sich selbst addirt, als die andere BC (der Multiplicans) Einheiten enthält; so heißt die gefundene Summe ABCD ihr **Product** oder **Factum**. Zwey Zahlen AB, BC, mit einander **multipliciren**, oder **vervielfältigen**, heißt ihr Product ABCD finden. $AB \times BC = ABCD$.



§. 14.

§. 14. Zuſ. 1. In dem Producte ABCD ſteckt der Multiplicandus AB ſo vielmal, als die Einheit im Multiplicans BC, weil AB für jede Einheit in BC einmal geſetzt wird.

§. 15. Zuſ. 2. Da hiedurch jede Einheit in AB ſo vielmal geſetzt wird, als BC Einheiten enthält, folglich den Multiplicans BC ſelbſt giebt, ſo ſteckt auch im Producte ABCD der Multiplicans BC ſo vielmal, als die Einheit im Multiplicandus AB.

§. 16. Zuſ. 3. Da in demſelbigen Producte jeder der beiden Factoren ſo vielmal, als die Einheit in dem andern enthalten iſt, §. 14. 15, ſo geben einerley Factoren auch mit veränderter Ordnung doch einerley Product. AB ⋈ BC = BC ⋈ AB. Und ſo auch bey mehrern Factoren.

§. 17. Zuſ. 4. Das Product entſteht aus dem einen Factor ſo, wie der andre Factor aus der Einheit. Dieſes giebt eine allgemeinere Erklärung der Multiplication.

§. 18. Zuſ. 5. Iſt einer der Factoren AB in Theile, AE, FB, zerlegt, ſo werden die Theile ſo vielmal geſetzt, als BC Einheiten hat, folglich die Theile, mit BC multiplicirt. Demnach geben die einzelnen Producte des einen Factors in die Theile des andern, zuſammen, das geſammte Product. AB. BC = AE. BC + FB. BC, und BC. AB = BC. AE + BC. FB.

§. 19. Zuſ. 6. Iſt einer der Factoren AB in aliquote Theile AG, HE, FB, zerlegt, ſo ſind die einzelnen Producte §. 15. einander gleich, und derſelben ſo viele, als AB aliquote Theile hat, d. i. das Product AG ⋈ BC ſteckt im Producte AB ⋈ BC ſo vielmal, als AG in AB. Demnach giebt ein vielfacher Factor ein eben ſo vielfaches Product.

§. 20. Erkl. Ein Product aus lauter gleichen Factoren heißt eine Potenz des Factors, der in dieſem

Producte etlichemal mit ſich ſelbſt multiplicirt wird, und ſolcher Factor die Wurzel. Der Grad der Potenz und Wurzel heißt die Menge der gleichen Factoren, und ihr Exponent die Zahl, welche dieſen Grad anzeigt. Wäre demnach die Zahl A der gedachte Factor oder die Wurzel (die man auch die erſte Potenz nennt), ſo iſt $AA=A^2$ die zweyte Potenz oder das Quadrat von A, und A die zweite Wurzel oder die Quadratwurzel aus AA; $AAA=A^3$ die dritte Potenz, oder der Würfel, Cubus, und A die dritte Wurzel, oder die Cubikwurzel aus AAA; $AAAA=A^4$ die vierte Potenz oder das Biquadrat, und A die vierte oder die Biquadratwurzel aus AAAA u. ſ. w.

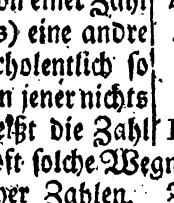
§. 21. Erkl. Wird von einer Zahl A eine kleinere B weggenommen, ſo heißt der Reſt D, d. i. die Zahl, die nach ſolcher Wegnahme übrig bleibt, die Differenz oder der Unterſchied der beiden Zahlen, der Ueberſchuß der größern über die kleinere. Zwey Zahlen A, B, von einander ſubtrahiren oder wegnehmen, heißt ihre Differenz D finden. $A-B=D$.

§. 22. Zuſ. 1. Die Differenz D zweyer Zahlen zu der kleinern B addirt, giebt die größere A.

§. 23. Zuſ. 2. Von der Summe S zweyer Zahlen die eine A ſubtrahirt, giebt die andre B.

§. 24. Zuſ. 3. Subtraction und Addition ſind einander entgegengeſetzt, d. i. die eine hebt die andre auf.

§. 25. Erkl. Wird von einer Zahl ABCD (dem Dividendus) eine andre AB (der Diviſor) wiederholentlich ſo oft weggenommen, bis von jener nichts mehr vorhanden iſt, ſo heißt die Zahl BC, welche anzeigt, wie oft ſolche Wegnahme geſchehen, der Quotient ſolcher Zahlen. Zwey Zahlen ABCD, AB, mit einander dividiren, oder durch einander



der theilen, heißt ihren Quotienten BC finden. ABCD : AB oder $\frac{ABCD}{AB} = BC$.

§. 26. Zuſ. 1. Für ein jedesmaliges Wegnehmen des Diviſors AB kömmt eine Einheit in den Quotienten BC. Daher ſteckt der Diviſor im Dividendus ſo oft, als die Einheit im Quotienten.

§. 27. Zuſ. 2. Der Dividendus beſteht aus ſo vielen gleichen Theilen (von der Größe des Diviſors), ſo viele Einheiten der Quotient enthält. Daher iſt die Diviſion eine **Eintheilung.**

§. 28. Zuſ. 3. Der Diviſor mit dem Quotienten multiplicirt, giebt den Dividendus.

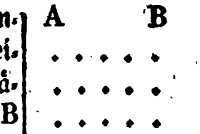
§. 29. Zuſ. 4. Ein Product mit dem einen Factor dividirt, giebt den andern.

§. 30. Zuſ. 5. Diviſion und Multiplication ſind einander entgegengeſetzt, d. i. die eine hebt die andre auf.

§. 31. Zuſ. 6. Der Quotient ſteckt auch im Dividendus ſo vielmal, als die Einheit im Diviſor.

§. 32. Zuſ. 7. Der Quotient entſteht aus dem Dividendus ſo, wie die Einheit aus dem Diviſor. Dieſes giebt eine allgemeinere Erklärung der **Diviſion.**

§. 33. Zuſ. 8. Läßt ſich der Dividendus ABCD nicht wie §. 27 in Theile theilen, deren jeder dem Diviſor AB gleich wäre, wenn nämlich der letzte Theil DC < AB wird: ſo ſieht man, daß der Quotient BC zu klein, aber mit der Einheit vermehrt zu groß ſey, folglich zwiſchen zwey Zahlen, die um Eins unterſchieden ſind, fallen müſſe. In ſolchem Falle ſuche man, wie vielmal der Diviſor, und noch ein aliquoter Theil deſſelben, im



Dividendus ſtecke, §. 12. Das Nähere hievon gehört in die Lehre von den Brüchen.

§. 34. Zuſ. 9. In dieſem Falle, §. 33, wo ein Reſt DC bleibt, iſt der Diviſor kein aliquoter Theil des Dividendus, wohl aber in dem erſten §. 27, wo kein Reſt bleibt, ſondern die Diviſion aufgeht.

§. 35. Zuſ. 10. Alle Veränderungen der Zahlen geſchehen auf eine der §. 8. 13. 21. 25. angezeigten vier Arten, der Addition, Multiplication, Subtraction und Diviſion, welche daher die gemeinen Rechnungsarten oder Species der Arithmetik heißen.

§. 36. Anm. Betrachtet man bey einem Zahlenexempel die Zahlen nur als Zahlen überhaupt, nicht aber als beſtimmte Zahlen, und bezeichnet die Rechnungsoperationen blos durch die arithmetiſchen Zeichen, ohne ſie mit den Zahlen ſelbſt vorzunehmen; ſo erhält man dadurch den Vortheil, durch Schlüſſe, welche ein Exempel erläutert, einen allgemeinen Beweis zu führen, indem ein ſolcher Beweis alsdann nicht auf das gebrauchte Exempel gegründet iſt, ſondern bey jedem andern Exempel dieſer Art immer derſelbe bleibt, folglich allgemein iſt.

2. Die Geſetze der Decimalzahlen.

§. 37. Wahlſ. Hat man die Einheiten oder die Einer immer bis zehn gezählt, ſo mache man aus jeden zehn Einern ein Zehend, oder einen Zehner. Mehrere ſolche Zehner zähle man wieder bis zehn, und mache aus jeden zehn Zehnern ein Zehend von Zehnern. Dieſes wiederhole man, ſo oft es beliebt, nur daß man kürzer ſage: Hundert für zehn Zehner; Tauſend für zehn Hunderte; Zehntauſend für zehnmal zehn Hunderte; Hunderttauſend für zehn Zehntauſende; Million für zehn Hunderttauſende, Billion für millionmal Million, Trillion für millionmal Billion u. ſ. w.

§. 38. Zuſ. 1. Hiedurch erhält man außer den einfachen Einheiten, oder Einern, auch noch zuſammengeſetzte Einheiten von verſchiedenen Ordnungen: die erſte

erſte der Zehner, die zweyte der Hunderte u. ſ. w. deren jede folgende den zehnfachen Werth der zunächſt vorhergehenden hat.

§. 39. Zuſ. 2. Eine Zahl bleibt zwar an ſich dieſelbe, kann aber auch einen höhern oder geringern Werth haben, je nach dem die Einheiten, die ſie zählt, von höherm oder geringerm Werthe ſind. Z. E. Sieben Einer und Sieben Zehner ſind zwar beide Sieben, aber letztere haben einen zehnmal größern Werth; ſo wie auf ähnliche Art drey Fünfthalerſtücke einen fünfmal größern Werth als drey Thalerſtücke haben. §. 6.

§. 40. Zuſ. 3. Die Namen für die erſten zehn Zahlen ſind aus dem gemeinen Sprachgebrauche bekannt, ſo wie auch die Namen für jede größere Zahl, die entweder die Summe einer kleinern und der Zehn, oder ein Vielfaches der Zehn, oder die Summe eines Vielfachen und eines kleinern iſt.

§. 41. Wahlſ. Zu Zeichen der Zahlen bediene man ſich der bekannten arabiſchen Ziffern ſo, daß jede derſelben eine gewiſſe Menge von Einheiten bedeute, und der Werth ſolcher Einheiten durch die Stelle angezeigt werde, den die Ziffer von der rechten Hand gegen die linke nach den verſchiedenen Ordnungen der Einheiten §. 38. einnimmt.

Z. E. 7 bedeutet ſieben Einer; 70 ſieben Zehner; 74 vier Einer und ſieben Zehner; 700 ſieben Hunderte; 704 vier Einer und ſieben Hunderte; 734 vier Einer, drey Zehner und ſieben Hunderte u. ſ. w.

§. 42. Zuſ. 1. Hiedurch erhalten die Millionen die ſechste Stelle nach den Einern, die Billionen die zwölfte, die Trillionen die achtzehnte, und ſo immer um ſechs Stellen weiter.

Z. E. 7 000 000 heißt ſieben Millionen.

§. 43. Zuſ. 2. Jede Einheit einer höhern Ordnung §. 38. kann man als eine Potenz der Zehn anſehen, deren Exponent die Ordnung der Einheit anzeigt, §. 20. So iſt $10=10^1$, $100=10^2$, $1000=10^3$ u. ſ. w.

§. 44. Zuſ. 3. Iſt eine Zahl mit mehrern Ziffern geſchrieben, ſo kann man jede Ziffer als eine Zahl der Einer anſehen, die in die Potenz der Zehn multiplicirt wäre, deren Exponent der Ziffer Stelle nach den Einern anzeigt.

Z. E. $7483=7.10^3+4.10^2+8.10^1+3.$

§. 45. Zuſ. 4. Jede Zahl wird mit einer Potenz der Zehn multiplicirt, wenn man den Ziffern der Zahl ſoviel Nullen zur Rechten beyfügt, als der Exponent ſolcher Potenz Einheiten enthält, weil dadurch jeder Theil der Zahl, folglich die ganze Zahl §. 18. damit multiplicirt iſt.

§. 46. Aufg. Zwey Zahlen, wenn in einer derſelben, oder auch in beiden, den Ziffern Nullen beygefügt ſind, mit einander zu multipliciren.

Auflöſ. 1) Wenn blos in dem einen Factor A Nullen vorhanden ſind, und ſeine Ziffer a iſt, ſo multiplicire man blos die Ziffern a, b, und füge dem Producte a b ſo viele Nullen bey, als in A vorhanden ſind.

A, 3000. a, 3.
b, 2.

2) Wenn in beiden Factoren A, B, Nullen vorhanden, und ihre Ziffern a, b, ſind, ſo multiplicire man wiederum blos die Ziffern a, b, und füge dem Producte a b ſo viele Nullen bey, als in den beiden Factoren zuſammen vorhanden ſind.

A, 3000. a, 3.
B, 200. b, 2.

Bew. Das Vielfache eines jeden der beiden Factoren giebt ein eben ſo Vielfaches des Products, §. 19. 45.

§. 47. Aufg. Jede Zahl, die mit Ziffern geſchrieben iſt, mit Worten auszuſprechen, (d. i. zu numeriren.)

Auf-

Auflöſ. 1) Sind höchſtens ſechs Ziffern beyſammen, z. E. 384257, ſo beziehen ſie ſich auf Einer, Zehner, Hunderte, Tauſende, Zehntauſende, Hunderttauſende, und können von Jedem in ſeiner Sprache ausgedrückt werden: dreyhundert und vier und achtzig tauſend, zweyhundert und ſieben und funfzig. Ein gleiches gilt, wenn auch eine oder die andere Ziffer fehlte, und deren Stelle mit Null bezeichnet wäre, z. E. 504057, dreyhundert und viertauſend und ſieben und funfzig.

2) Sind mehr als ſechs Ziffern beyſammen, z. E. 54'|687063"|269375'|683725, ſo theile man ſie von der rechten Hand gegen die linke in Claſſen, jede zu ſechs Ziffern, ſo weit es angeht, betrachte die niedrigſte Ziffer jeder Claſſe als Einer, die ſich in der zweyten auf Millionen, in der dritten auf Billionen, in der vierten auf Trillionen u. ſ. w. beziehen, und ſpreche jede dieſer Claſſen von der höchſten an nach dem erſten Falle aus: vier und funfzig Trillionen, ſechshundert und ſieben und achtzigtauſend und drey und ſechzig Billionen, zweyhundert und neun und ſechzigtauſend dreyhundert und fünf und ſiebenzig Millionen, ſechshundert und drey und achtzigtauſend, ſiebenhundert und fünf und zwanzig.

§. 48. Zuſ. 1. Eine Zahl, die mit Worten in einer bekannten Sprache ausgedrückt iſt, läßt ſich leicht mit Ziffern ſchreiben, wenn ſie deren drey, höchſtens ſechs erfordert; erforderte ſie mehr als ſechs Ziffern, ſo wiederhole man dieſelbe Operation für jede Claſſe §. 47.

§. 49. Zuſ. 2. Jede auf ſolche Art bezeichnete Zahl läßt ſich auf mannichfaltige Art in ihre Einheiten zertheilen und ausdrücken. So iſt z. E. $5000 = 5.10^3 = 50.10^2 = 500.10^1$. Oder $432 = 4.10^2 + 3.10^1 + 2 = 43.10^1 + 2 = 42.10^1 + 12$ u. ſ. w.

§. 50.

§. 50. Zuſ. 3. Die ſinnreiche Art, die Zahlen durch Ziffern zu bezeichnen, bringt auch unter anderen den Vortheil, daß man bey den Rechnungen an den Werth der Ziffern nicht zu denken braucht, als welcher ſich durch die Stelle, die man ihnen nach den Regeln geben muß, von ſelbſt beſtimmt.

3. Die Rechnung mit Decimalzahlen.

§. 51. Aufg. Zwey oder mehrere Zahlen zu einander zu addiren.

Auflöſ. 1) Man ſchreibe die gegebenen Zahlen A, B, C, ſo, daß die Ziffern von einerley Ordnung unter einander ſtehen.

A,	78462
B,	5903
C,	861
D,	85226

2) Man zähle die Ziffern in jeder Reihe von der Rechten an zuſammen, ſetze die niedrigſte Ziffer der Summe unter dieſe Reihe, und zähle die höhern Ziffern mit zu den Reihen zur Linken.

Bew. Hiedurch hat man zwar die Ziffern jeder Reihe als bloße Einer zuſammengezählt, dennoch aber ihren Werth durch die Stelle, wohin man die Summe einer jeden Reihe geſetzt, gehörig beobachtet, §. 50, auch für jede zehn Einheiten einer vorhergehenden Ordnung eine Einheit zur nächſtfolgenden gebracht, §. 37. Demnach enthält die gefundene Zahl D die ſämtlichen Einheiten aller Theile der gegebenen Zahlen, und iſt alſo ihre Summe, §. 8.

§. 52. Aufg. Zwey Zahlen von einander zu ſubtrahiren.

Auflöſ. 1) Man ſchreibe die gegebenen Zahlen A, B, wie §. 51.

A,	8.0.0.7.387
B,	6459784
C,	1547603

2) In

2) In jeder Reihe von der Rechten an, nehme man die Ziffer des Subtrahendus B von der darüberstehenden Ziffer des Minuendus A hinweg, und setze den Rest unter solche Reihe.

3) Ist in A eine Ziffer so groß, wie die darunter stehende, so setze man eine Null unter solche Reihe.

4) Ist in A eine Ziffer kleiner, als die darunter stehende, so setze man zu ihr Zehn in Gedanken, und vermindere dafür die nächstfolgende Ziffer in A um Eins, welches mit einem Punkte zu bemerken ist, und gemeiniglich borgen heißt.

5) Fallen Nullen zwischen die Ziffer welche borgt, und von welcher geborgt wird, so setze man in Gedanken die Ziffer 9 für jede der Zwischen-Nullen.

Bew. 1) Für eine Einheit, um welche jede folgende Ziffer vermindert wird, kommen zehn Einheiten in die ihr zunächst vorhergehende Stelle §. 36, welche, wenn eine Null darin vorhanden ist, um Eins vermindert, die Ziffer 9 lassen. 2) Durch die Stellen, die man den einzelnen Resten in C giebt, ist der Werth der Ziffern, woran man nicht zu denken brauchte, gehörig beobachtet, §. 50. 3) Demnach enthält C den Ueberschuß aller Theile der Zahl A über die Theile der Zahl B, folglich den Ueberschuß der A über die B, §. 21.

§. 53. Zus. Die Addition und Subtraction dienen einander zu Proben, §. 22 und 23.

§. 54. Aufg. Die Pythagorische Tafel, oder das Einmaleins, d. i. die Producte aller einziffrigen Zahlen zu finden.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Auflöſ. In vorſtehender Tafel ſchreibe man in der oberſten Reihe die 9 Ziffern neben einander; in der zweyten ihr Zweyfaches, wenn man jede zu ihr ſelbſt addirt; in der dritten ihr Dreyfaches, wenn man das Zweyfache zum Einfachen addirt; in der vierten ihr Vierfaches, wenn man das Dreyfache zu dem Einfachen addirt, und ſo ferner ihr Fünffaches bis Neunfaches.

§. 55. Zuſ. 1. Aus der Einrichtung der Tafel §. 54. erſieht man leicht, theils, wie zu zwey gegebenen Factoren das zugehörige Product, theils wie zu einem gegebenen Producte und dem einen Factor der andere Factor gefunden werde.

§. 56. Zuſ. 2. Sind den einfachen Ziffern noch Nullen beygefügt, ſo nehme man das Product der Ziffern aus der Pythagoriſchen Tafel, und hänge demſelben ſo viel Nullen an, als ſich in den Factoren zuſammen befinden, §. 46.

§. 57. Aufg. Zwey Zahlen mit einander zu multipliciren.

Auf-

Auflöſ. 1) Man ſchreibe die gegebenen Zahlen A, B, wie §. 51.

A,	242576
B,	5203
C,	1927728
D,	685152
E,	1712880
F,	1782422928

2) Mit jeder Ziffer des Multiplicans B multiplicire man mit Hülfe der Pythagoriſchen Tafel §. 54. den ganzen Multiplicandus A, und ſetze jedes der einzelnen Producte C, D, E, ſo, daß ſeine niedrigſte Ziffer unter der zugehörigen Ziffer des Multiplicans B ſtehe.

3) Die einzelnen Producte C, D, E, addire man, ſo iſt ihre Summe F das geſuchte Product der Zahlen A, B.

Bew. 1) Für die Ziffern in B als bloße Einer betrachtet, würden ſich die einzelnen Producte C, D, E, alle in der Stelle der Einer anfangen, und die Ziffern eines jeden dieſer Producte, wie ſolches bey C zu ſehen iſt, unter der zugehörigen Ziffer des Multiplicandus A ſtehen, wodurch ſie, ohne daran zu denken, §. 50, ihren gehörigen Werth erhalten, §. 46. 56.

2) Jedes dieſer Producte muß nun noch zu dem Werthe der zugehörigen Ziffer in B erhoben werden, §. 46. 56, welches geſchieht, wenn man ſeine niedrigſte Ziffer unter die dazu gehörige Ziffer in B ſetzet.

3) Demnach iſt die Summe dieſer Producte aus allen Theilen des Multiplicandus A in alle Theile des Multiplicans B, das geſamte Product aus den beiden Factoren A, B. §. 18.

§. 58. Aufg. Zwey Zahlen mit einander zu dividiren.

Auf-

Auflöſ. 1) Zum erſten Theile des Dividendus A nehme man von ſeinen höchſten Ziffern ſo viele, als Ziffern im Diviſor D ſind, und noch eine mehr, im Fall jene eine Zahl ausmachen, die kleiner als der Diviſor D iſt, wie im beygeſetzten Exempel.

D, 342576.Q, 5203.
A, 178.2.4.2 2928
E, 171 2 8 8 0 : : :
C, 6 9 5 4.29 : : :
E, 6 8 5 1 52 : :
F, 1 0 2 7 7 2 8
G, 1 0 2 7 7 2 8
0

2) Man nehme an, der Diviſor D ſtecke in dieſem Theile des Dividendus ſo oft, als die höchſte Ziffer des Diviſors in der höchſten Ziffer (oder in den beiden höchſten) dieſes Theils. Die hiezu gehörige Zahl, die man im Einmaleins findet, bemerke man als die erſte Ziffer des Quotienten Q.

3) Das Product B aus der angenommenen erſten Ziffer des Quotienten Q in den Diviſor D, ſetze man unter den erſten Theil des Dividendus A, und ſubtrahire es davon, wofern es nicht etwa größer iſt, in welchem Falle man die angenommene Ziffer des Quotienten um Eins vermindern muß.

4) Zu dem gefundenen Reſte ſetze man die nächſtfolgende Ziffer des Dividendus A, die mit ihm den zweyten Theil deſſelben C ausmache, und verfahre damit wie in dem erſten Theile, ſo findet man die zweyte Ziffer des Quotienten Q.

5) Dieſe Operationen wiederhole man bis zur letzten Ziffer des Dividendus, ſo findet man alle noch übrigen Ziffern des Quotienten.

6) Käme man bey einer dieſer Operationen auf einen Theil des Dividendus, der kleiner als der Diviſor iſt, ſo ſetze man eine Null in die Stelle des Quotienten, füge einem ſolchen Theile des Dividendus noch eine nächſtfolgende

de Ziffer deſſelben bey, wie bey F, und verfahre weiter, wie zuvor.

7) Wäre aber in dieſem Falle keine folgende Ziffer im Dividendus mehr vorhanden, ſo wäre die gedachte Null als die letzte Ziffer im Quotienten anzuſehen, und die Operation geendigt, wie in 5.

8) Iſt nach geendigter Operation ein Reſt geblieben, ſo gilt davon, was §. 33. 34. geſagt worden.

Bew. Aus der Operation erſieht man, daß in den Quotienten ſoviel Ziffern kommen, als man Theile des Dividendus hat annehmen müſſen, folglich jede Ziffer des Quotienten den Werth der letzten Ziffer in dem zugehörigen Theile des Dividendus hat, folglich anzeigt, wie vielmal der Diviſor in ſolchem Theile des Dividendus enthalten ſey, ohne daß man nöthig habe, an den Werth der Ziffern im Quotienten Q ſowohl, als in den Producten B, E, G zu denken, als der ſich durch die Stellen im Dividendus A von ſelbſt beſtimmt, §. 50. Demnach zeigt die gefundne Zahl Q, wie vielmal der Diviſor D in allen Theilen des Dividendus, folglich in dem ganzen Dividendus A enthalten ſey, und iſt alſo der geſuchte Quotient §. 25, oder doch, wofern ein Reſt geblieben iſt, noch nicht um Eins zu klein, §. 33.

Anm. Um die Verſache in §. 58. Aufl. 2. 3. zu vermeiden, könnte man (welches auch bey großen Exempeln am bequemſten iſt) vorläufig das Zwey- bis Neunfache des Diviſors machen, um hieraus das ſchickliche Vielfache jedesmal zu wählen.

§. 59. Zuſ. Die Multiplication und Diviſion dienen einander zu Proben, §. 30.

§. 60. Anm. Die Rechnung mit benannten Zahlen §. 4. bedarf keiner neuen Regeln; nur muß man wiſſen, wie viele Einheiten eines kleinern Namens auf eine Einheit des gröſſern gehen. Die Zahl, welche dieſes anzeigt, heißt die Reductionszahl. Hiezu dienen die Nachrichten im Anhange.

4. Die Abmeſſung der Zahlen.

§. 61. Erkl. Eine Zahl heißt ein Maaß der andern, wenn ſie ein aliquoter Theil der andern iſt, alſo in der andern aufgeht, d. i. wenn ſie die andere ohne Reſt theilet, §. 10. 34.

§. 62. Zuſ. 1. Jede Zahl wird von ihr ſelbſt und von der Einheit gemeſſen.

§. 63. Zuſ. 2. Eine Zahl, die eine andere mißt, kann nicht größer als die andre ſeyn.

§. 64. Zuſ. 3. Eine Zahl, die eine andre mißt, muß auch die Zahl meſſen, die von der andern gemeſſen wird.

§. 65. Erkl. Eine gerade Zahl iſt, die ſich halbiren, d. i. durch die Zahl Zwey theilen läßt; eine ungerade Zahl, die ſich nicht halbiren läßt, oder die von einer geraden um Eins unterſchieden iſt.

§. 66. Erkl. Eine Primzahl (einfache Zahl, abſolute Primzahl) iſt, die blos von ihr ſelbſt und von der Einheit gemeſſen wird; eine zuſammengeſetzte Zahl aber, die auch noch von einer andern Zahl gemeſſen wird.

§. 67. Zuſ. 1. Jede zuſammengeſetzte Zahl A wird von irgend einer Primzahl gemeſſen. Denn wäre der kleinſte Factor von A keine Primzahl, ſo würde er von irgend einer Zahl gemeſſen, die folglich auch A meſſen müßte, §. 64, alſo noch ein kleinerer Factor von A wäre.

§. 68. Zuſ. 2. Jede Zahl iſt entweder eine Primzahl, oder wird von einer Primzahl gemeſſen.

§. 69. Erkl. Ein Maaß mehrerer Zahlen heißt ein gemeines Maaß derſelben. Zahlen, die außer der Einheit kein andres gemeines Maaß haben, heißen Primzahlen zu einander, oder relative Primzahlen.

§. 70.

§. 70. Zuſ. 1. Das Maaß mehrerer Zahlen iſt auch ein Maaß ihrer Summe.

§. 71. Zuſ. 2. Das Maaß einer Zahl und eines ihrer beiden Theile iſt auch ein Maaß des andern Theils.

§. 72. Lehrſ. Wenn von zwey ungleichen Zahlen A, B, die kleinere B in die größere A dividirt, einen Reſt C läßt, dieſer Reſt C in den vorigen Diviſor B einen Reſt D, und dies immer ſo fort, bis man auf die Einheit E kömmt, ſo ſind obgedachte A, B, Primzahlen zu einander.

A, 8.
B, 5.
C, 3.
D, 2.
E, 1.

Bew. Sollte irgend eine Zahl N die A und B meſſen, ſo müßte ſie auch C meſſen, §. 71, alſo B und C, folglich auch D, alſo C und D, folglich auch E = 1, welches unmöglich iſt, §. 63.

§. 73. Aufg. Für zwey Zahlen, A, B, die nicht Primzahlen zu einander ſind, das größte gemeine Maaß zu finden.

Auflöſ. 1) Geht B in A auf, ſo iſt offenbar B das geſuchte Maaß, weil B ſich ſelbſt mißt, §. 62, und keine größere Zahl die B meſſen kann, §. 63.

A, 8.
B, 4.

2) Läßt B in A dividirt, einen Reſt C, und C in B wieder einen Reſt D, u. ſ. f. bis ein Reſt kömmt, der in den nächſt vorhergehenden Diviſor aufgeht: ſo iſt ſolcher Reſt, wie D, das geſuchte Maaß.

A, 15.
B, 9.
C, 6.
D, 3.

Bew. 1) D iſt nicht die Einheit, §. 72. 2) D mißt C und ſich ſelbſt, folglich auch B, §. 71, alſo B und C, folglich auch A, alſo A und B. 3) Sollte irgend eine Zahl N > D die A und B meſſen, ſo müßte ſie auch C meſſen, §. 71, alſo B und C, folglich auch D < N, welches unmöglich iſt, §. 63.

§. 74. Zuſ. Aus dem Beweiſe erhellet, wenn eine Zahl zwey andere mißt, daß ſie auch deren größtes gemeines Maaß meſſen müſſe.

§. 75. Aufg. Für drey Zahlen, A, B, C, die nicht Primzahlen zu einander ſind, das größte gemeine Maaß zu finden.

Auflöſ. 1) Es ſey D das größte gemeine Maaß von A und B, §. 73, und gehe auch in C auf, ſo iſt offenbar D das geſuchte Maaß. Denn ein größeres N, müßte auch D meſſen, §. 74, welches unmöglich iſt, §. 63.

A, 8. B, 6. C, 4.
D, 2.

2) Iſt D das größte gemeine Maaß von A und B, §. 73, geht aber nicht in C auf: ſo iſt E, als das größte gemeine Maaß von C und D, das geſuchte.

A, 18. B, 12. C, 4.
D, 6. E, 2.

Bew. E mißt D, und D die A und B, folglich mißt E auch die A und B, §. 64, aber auch C, alſo die A, B, C. Sollte nun irgend eine Zahl N > E die drey Zahlen meſſen, alſo A und B, ſo müßte ſie auch D meſſen, §. 74, alſo D und C, folglich auch E, §. 74, welches unmöglich iſt, §. 63.

§. 76. Zuſ. Aus dem Beweiſe erhellet, wenn eine Zahl drey andre mißt, daß ſie auch deren größtes gemeines Maaß meſſen müſſe.

§. 77. Anm. Auf eben die Art findet man auch das größte gemeine Maaß für vier und mehrere Zahlen.

5. Die Rechnung mit Brüchen.

§. 78. Erkl. Wird ein Ganzes in etliche kleine Theile getheilt, und deren einige genommen, ſo heißt dieſes Stück, in Vergleichung mit dem Ganzen, ein Bruch, fractio. Z. E. zwey Drittheile eines Thalers heißt, man ſoll den dritten Theil eines Thalers, d. i.

d. i. die Größe, deren drey auf einen Thaler gehen, zweymal nehmen.

§. 79. Zuſ. 1. Zu einem Bruche ſind zwey Zahlen Glieder, termini, erforderlich, der Nenner und der Zähler. Jener zeigt an, in wie viel Theile das Ganze oder die Einheit getheilt iſt; dieſer, wie vielmal ein ſolcher Theil genommen wird. Man ſöndert die Glieder durch einen Strich von einander, und ſetzt den Zähler über, den Nenner unter den Strich. Z. E. $\frac{2}{3}$ Thlr.

§. 80. Zuſ. 2. Ein Bruch iſt das Vielfache von einem gewiſſen Theile des Ganzen oder der Einheit, und heißt daher auch eine gebrochene Zahl, numerus fractus, im Gegenſatz einer ganzen Zahl, numerus integer, die im Vorhergehenden nur ſchlechthin Zahl genannt worden, und das Vielfache des Ganzen oder der Einheit ſelbſt iſt.

§. 81. Zuſ. 3. Von den Gliedern eines Bruchs iſt der Zähler die eigentliche Zahl, und der Nenner nur der Name. Auch wird der Bruch eine ganze Zahl, die ſein Zähler anzeigt, wenn man den Theil des Ganzen, den der Nenner angiebt, für die Einheit ſelbſt nimmt. Z. E. $\frac{2}{4}$ Thlr. ſind 2 Achtgroſchenſtücke.

§. 82. Zuſ. 4. Iſt das Ganze in gewiſſe Theile getheilt, ſo ſteht es frey, einen ſolchen Theil ſo vielmal zu nehmen, daß ſolches entweder weniger, oder eben ſo viel, oder mehr als das Ganze ausmacht. Im erſten Falle iſt der Bruch ein ſo großes Stück des Ganzen, ſo ein großes Stück des Nenners der Zähler iſt; im zweyten iſt der Bruch das Ganze ſelbſt, oder die Einheit; im dritten begreift der Bruch das Ganze, oder die Einheit, ſo vielmal, als der Nenner im Zähler enthalten iſt, auch wohl noch ein Stück des Ganzen.

§. 83. Zuſ. 5. Ein Bruch heißt ächt, fractio vera ſ. genuina, wenn der Zähler kleiner als der Nenner,

unächt, spuria, wenn dieſes nicht iſt. Ein uneigentlicher Bruch heißt, wenn der Nenner im Zähler aufgeht, ein eigentlicher Bruch aber, wenn dieſes nicht iſt. Eine gemiſchte Zahl heißt, die aus einer ganzen Zahl und einem Bruche beſteht.

§. 84. Zuſ. 6. Sollte man von den Größen, die das Ganze ausmachen, einige und noch ein Stück einer ſolchen Größe nehmen, ſo würde der Zähler des Bruchs eine gemiſchte Zahl. Z. E. $\frac{7\frac{1}{4}}{24}$ Thlr. bedeutet 7 gl. 8 pf.

§. 85. Zuſ. 7. Sollten von einer Größe einige und noch ein Stück ſolcher Größe auf das Ganze gehen, ſo würde der Nenner des Bruchs eine gemiſchte Zahl. Z. E. gilt der Ducaten 2 Thl. 20 gl. d. i. $2\frac{1}{3}$ Thlr., ſo beträgt der Gulden $\frac{1}{2\frac{5}{6}}$ des Ducaten, d. i. $\frac{6}{17}$ der Größe, wovon $2\frac{5}{6}$ einen Ducaten ausmachen. Eben ſo iſt 1 Stunde $\frac{1}{365\frac{1}{4}}$ des Julianiſchen Jahres.

§. 86. Anm. Brüche wie §. 84. 85. werden vorerſt noch beyſeite geſetzt, bis im Folgenden gelehrt werden kann, ihre Glieder auch auf ganze Zahlen zu bringen.

§. 87. Lehrſ. Ein Bruch iſt der Quotient, welchen der Zähler mit dem Nenner dividirt giebt.

Bew. 1) für ächte Brüche. Eine größere Zahl kann zwar in einer kleinern nicht ſtecken, aber von den Einheiten der größern Zahl ſtecken einige in der kleinern, §. 11. Soll demnach die größere Zahl in die kleinere dividirt werden, ſo iſt der Quotient ein Bruch, welcher anzeigt, wie vielmal ein gewiſſer Theil der größern in der kleinern ſtecke. Z. E. 3 ſteckt nicht in 2, aber die Einheit, d. i. $\frac{1}{3}$ von 3, ſteckt 2mal in 2, welches den Quotienten $\frac{2}{3}$ giebt, daher man auch zu ſagen pflegt: 3 in 2 iſt $\frac{2}{3}$mal enthalten.

2) für

2) für unächte Brüche. Ein solcher Bruch enthält das Ganze so vielmal, als der Nenner im Zähler steckt, da man dann, wenn er das Ganze ein- oder etlichemal, und noch ein Stück darüber enthält, solches Stück nach dem ersten Falle ausdrücken kann. Z. E. $\frac{19}{5} = 19:5 = 3+\frac{4}{5}$.

§. 88. Zus. 1. Hieraus erhellet, wie man bey der Division, wenn ein Rest bleibt, §. 58, den Quotienten genau finden könne, wenn man nämlich der gefundenen ganzen Zahl einen Bruch beyfügt, dessen Zähler der Rest, und dessen Nenner der Divisor ist. Z. E. $19:5 = 3+\frac{4}{5}$.

§ 89. Zus. 2. Quotienten können als Brüche, und Brüche als Quotienten angesehen und bezeichnet werden.

§. 90. Zus. 3. Mit einer ganzen Zahl dividiren, heißt eben soviel als in einen Bruch multipliciren, der diese Zahl zum Nenner und die Einheit zum Zähler hat. Z. E. $19:5 = \frac{19}{5} = 19.\frac{1}{5}$. Denn $\frac{1}{5}$ mal nehmen, heißt offenbar den fünften Theil nehmen.

§. 91. Lehrs. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man mit dieser Zahl entweder blos seinen Zähler multiplicirt, oder blos seinen Nenner dividirt. Und ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man mit dieser Zahl entweder blos seinen Zähler dividirt, oder blos seinen Nenner multiplicirt.

Bew. 1) Bleibt der Nenner des Bruchs ungeändert, so wird der Bruch um so vielmal größer oder kleiner, um so vielmal man seinen Zähler größer oder kleiner macht. Denn in beiden Fällen zählt man einerley Theile des Ganzen, im ersten aber solcher Theile um so vielmal mehrere, im zweyten um so vielmal wenigere.

2) Bleibt der Zähler des Bruchs ungeändert, so wird der Bruch um so vielmal größer oder kleiner, um so vielmal man seinen Nenner kleiner oder größer macht. Denn

in beiden Fällen zählt man gleichviele Theile des Ganzen, im ersten aber um so vielmal größere, im zweyten um so vielmal kleinere.

Anm. Hienach ist in §. 88. $(3+\frac{1}{2}).5=15+=4$, welches die Probe der Division ist.

§. 92. Zus. 1. Die Größe eines Bruchs bleibt ungeändert, wenn man beide Glieder des Bruchs zugleich mit einerley ganzen Zahl entweder multiplicirt oder dividirt, §. 91.

§. 93. Zus. 2. Jeder Bruch, so wie auch die Einheit und jede ganze Zahl, läßt sich auf unzählig viele Arten ausdrücken.

§. 94. Zus. 3. Der Lehrsatz §. 91, und seine Zusätze, gelten auch von den Quotienten §. 89.

§. 95. Aufg. Einen Bruch aufzuheben, das heißt, seine Glieder, unbeschadet seiner Größe, durch die kleinsten Zahlen auszudrücken.

Auflös. Man suche das größte gemeinschaftliche Maaß beider Glieder §. 73. Kömmt man nun hiedurch auf eine ganze Zahl, so dividire man damit in beide Glieder, § 92, z. E. $\frac{637}{1001}=\frac{637:91}{1001:91}=\frac{7}{11}$. Käme man aber auf die Einheit, so sind die Glieder Primzahlen zu einander, §. 72, folglich schon die kleinsten Zahlen, womit sich der Bruch ausdrücken läßt, z. E. $\frac{216}{1147}$.

637)1001)1
637
364)637)1
364
273)364)1
273
91)273)3
273
0

§. 96. Anm. Durch Hülfe der Factorentafeln, die man in verschiednen Sammlungen mathematischer Tafeln findet, z. E. Vega logarithmische und andre Tafeln, Wien 1783. 8.) lassen sich die Glieder des Bruchs in ihre Factoren zerfällen, daß man die gemeinschaftlichen nur auszustreichen hat, z. E. $\frac{637}{1001}=\frac{7.7.13}{7.11.13}=\frac{7}{11}$.

§. 97.

§. 97. Aufg. Brüche gleichnamig zu machen, oder unter einerley Benennung zu bringen, d. i. zu machen, daß sie ihrer Größe unbeschadet einerley Nenner erhalten.

Auflös. Man mache das Product aller Nenner zum gemeinschaftlichen Nenner, und zum Zähler eines jeden Bruchs das Product aus seinem Zähler in die Nenner der übrigen Brüche. Z. E. aus $\frac{2}{7}$ und $\frac{8}{9}$ wird $\frac{2 \cdot 9}{7 \cdot 9}$ und $\frac{7 \cdot 8}{7 \cdot 9}$ d. i. $\frac{18}{63}$ und $\frac{56}{63}$. Aus $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{7}$ wird $\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 5 \cdot 7}, \frac{4 \cdot 4 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 7}, \frac{5 \cdot 4 \cdot 5}{7 \cdot 4 \cdot 5}$, d. i. $\frac{105}{140}, \frac{112}{140}, \frac{100}{140}$, u. s. w.

Bew. Da Zähler und Nenner eines jeden Bruchs mit dem Producte aus den Nennern der übrigen Brüche multiplicirt werden, so erhalten die Brüche einerley Nenner ohne Schaden ihrer Größe, §. 92.

§. 98. Aufg. Brüche zu addiren, oder zu subtrahiren.

Auflös. Wenn die gegebenen Brüche gleichnamig sind, oder gemacht worden, §. 97, so mache man einen Bruch, dessen Nenner der gemeinschaftliche Nenner, und dessen Zähler die Summe oder Differenz der gegebenen Zähler ist, §. 81. z. E. $\frac{3}{4} + \frac{5}{9} = \frac{27 + 20}{36}$, und $5 + \frac{6}{7} = \frac{5}{1} + \frac{6}{7}$ §. 93.

§. 99. Zus. 1. Eine gemischte Zahl wird in einen unächten Bruch verwandelt, dessen Nenner der vorhandene Nenner, und dessen Zähler die Summe oder Differenz des Products dieses Nenners in die ganze Zahl, und des vorhandenen Zählers ist, §. 98. z. E. $4\frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3 + 2}{3}$, und $4 - \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3 - 2}{3}$.

§. 100. Zus. 2. Gemischte Zahlen verwandelt man in unächte Brüche, §. 99, oder berechnet ihre Theile besonders, z. E. $8\frac{3}{4}+3\frac{2}{3}=\frac{35}{4}+\frac{11}{3}=8+3+(\frac{1}{4}+\frac{2}{3})$ Eben so ist aus §. 98. $5-\frac{6}{7}=4+\frac{1}{7}$.

§. 101. Aufg. Brüche mit einander zu multipliciren, oder zu dividiren.

Auflös. Im ersten Falle mache man einen Bruch, dessen Zähler das Product aus den gegebenen Zählern, und dessen Nenner das Product aus den gegebenen Nennern ist. Im zweyten Falle multiplicire man den Dividendus mit dem umgekehrten Divisor nach dem ersten Falle. Z. E.

$\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{4}=\frac{5\cdot3}{7\cdot4}=P$, und $\frac{5}{7}:\frac{3}{4}=\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{3}=\frac{5\cdot4}{7\cdot3}=Q$.

Bew. 1) Der Multiplicans entsteht aus der Einheit, wenn man diese in soviel Theile theilt, als der Nenner anzeigt, und deren soviele nimmt, als der Zähler anzeigt (Einheiten hat). Nun ist P entstanden, indem man den Multiplicandus mit solchem Nenner dividirt, und den Quotienten mit solchem Zähler multiplicirt hat, §. 91, folglich ist P aus dem Multiplicandus so entstanden, wie der Multiplicans aus der Einheit, folglich P das gesuchte Product, §. 17.

2) Die Einheit entsteht aus dem Divisor, wenn man diesen mit seinem Nenner multiplicirt, und mit seinem Zähler dividirt. Nun ist Q entstanden, indem man den Dividendus mit solchem Nenner multiplicirt, und das Product mit solchem Zähler dividirt hat, §. 91, folglich ist Q aus dem Dividendus so entstanden, wie die Einheit aus dem Divisor, also Q der gesuchte Quotient, §. 32.

Anderer Beweis. 1) Einen Bruch mit einem Bruche multipliciren, heißt offenbar vom erstern ein solches Stück nehmen, als letzterer anzeigt. Hierzu muß man den ersten Bruch in soviel Theile theilen, als der Nenner des zweyten anzeigt, und von diesen Theilen so viele nehmen, als

als der Zähler des zweyten Bruchs anzeigt. Ersteres giebt das Product aus den Nennern zum Nenner, §. 91, und letzteres das Product aus den Zählern zum Zähler, §. 91.

2) Einen Bruch mit einem andern Bruche dividiren, heißt offenbar finden, wie vielmal der zweyte Bruch in dem ersten steckt. Hätten nun beide einerley Nenner, so dürfte man nur finden, wie vielmal der Zähler des zweyten im Zähler des ersten steckt, §. 81. Haben sie also verschiedene Nenner, und man bringt sie unter einerley Benennung, so ist der Dividendus das Product des ersten Zählers in den zweyten Nenner, und der Divisor das Product des ersten Nenners in den zweyten Zähler.

§. 102. Anm. 1. Gemischte Zahlen verwandle man in unächte Brüche, §. 99.

§. 103. Anm. 2. Eine benannte Zahl, sie mag ganz oder gebrochen seyn, wird reducirt, d. i. auf den kleinern oder gröſsern Namen gebracht, wenn man dieselbe mit der Reductionszahl im ersten Falle multiplicirt, im zweyten dividirt. Denn die Einheit des gröſsern Namens ist eine gewisse Menge von Einheiten des kleinern, und die Einheit des kleinern Namens ein gewisser Theil von der Einheit des gröſsern. Z. E. $\frac{3}{8}$ Thlr. $= \frac{3}{8}$ of 4 ggl. und $\frac{3}{8}$ ggl $= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{24}$ Thlr.

§. 104. Zus. 1. Auch für Brüche gilt §. 16: Einerley Factoren geben auch mit veränderter Ordnung einerley Product, weil sich in beiden Gliedern des Products die Factoren versetzen lassen. Z. E. $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 4}$, §. 101. $= \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7}$, §. 16. $= \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$.

§. 105. Zus. 2. Auch für Brüche gilt der Satz §. 14: Jeder Factor steckt im Producte so vielmal, als die Einheit in dem andern, weil das Product ein solcher Theil des einen Factors, als der andre von der Einheit ist, §. 101. 104.

§. 106. Zus. 3. Ist der Multiplicans ein ächter Bruch, so ist das Product kleiner als der Multiplicandus, weil von diesem nur ein Stück genommen wird, §. 101.

§. 107.

§. 107. Zuſ. 4. Sind beide Factoren ächte Brüche, ſo iſt das Product kleiner als jeder Factor, §. 106. 104.

§. 108. Zuſ. 5. Auch für Brüche gilt der Satz §. 28: Der Diviſor mit dem Quotienten multiplicirt, giebt den Dividendus; weil $(\frac{5}{7}:\frac{3}{4})\cdot\frac{3}{4}=\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{5}{7}\cdot 1$.

§. 109. Zuſ. 6. Auch für Brüche gilt der Satz §. 29: Ein Product mit einem Factor dividirt, giebt den andern, weil $(\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{4}):\frac{3}{4}=\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{5}{7}\cdot 1$.

§. 110. Zuſ. 7. Auch für Brüche gilt der Satz §. 26: Der Diviſor ſteckt im Dividendus ſo oft, als die Einheit im Quotienten, §. 105. 108.

§. 111. Zuſ. 8. Der Diviſor mit einem Bruche giebt oft große Zahlen, weil ein Bruch in einer andern Zahl vielmal enthalten ſeyn kann, §. 110.

§. 112. Zuſ. 9. Auch für irreguläre Brüche, wie §. 84. 85. gilt der Satz §. 87: Brüche ſind Quotienten. Z. E. $\frac{\frac{5}{7}}{\frac{4}{9}}=\frac{5}{7}:\frac{4}{9}$. Denn $\frac{5}{7}$ mit 4 dividirt, iſt offenbar $\frac{\frac{5}{7}}{4}$, welcher Bruch aber, wenn $\frac{4}{9}$ der Diviſor iſt, 9mal größer werden muß. Und dieß geſchieht, wenn im Nenner $\frac{4}{9}$ anſtatt 4 kömmt, §. 91, wodurch man alſo den Bruch $\frac{\frac{5}{7}}{\frac{4}{9}}$ erhält.

§. 113. Zuſ. 10. Demnach heißt mit einem Bruche $\frac{4}{9}$ dividiren ſoviel als mit dem Bruche $\frac{9}{4}$ multipliciren, §. 90. Denn $\frac{1}{\frac{4}{9}}=\frac{1}{1}:\frac{4}{9}=\frac{1}{1}\cdot\frac{9}{4}$, §. 101.

§. 114. Zuſ. 11. Jeder irreguläre Bruch läßt ſich ſo ausdrücken, daß ſeine Glieder ganze Zahlen werden, wenn man den Nenner in den Zähler dividirt, §. 112, wodurch §. 86 erfüllt iſt. Z. E. ein Gulden iſt nach §. 85 $\frac{\frac{2}{3}}{2\frac{5}{6}}$ oder $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{17}{6}}$ folglich $\frac{2}{3}:\frac{17}{6}$, oder $\frac{2\cdot 6}{3\cdot 17}$ d. i. $\frac{12}{51}$ des Ducaten.

§. 115.

§. 115. Zus. 12. Demnach erstreckt sich die Aufgabe §. 101. nebst deren Zusätzen, auch auf irreguläre Brüche, weil sich ihre Glieder stets durch ganze Zahlen ausdrücken lassen, §. 114.

§. 116. Zus. 13. Was in dem Lehrsatze §. 91. und dessen Zusätzen von der Multiplication und Division mit ganzen Zahlen erwiesen worden, gilt auch von der Multiplication und Division mit Brüchen. Denn soll z. E. der Bruch $\frac{4}{5}$ mit dem Bruche $\frac{2}{3}$ multiplicirt werden, so ist

1) $\frac{4 \cdot \frac{2}{3}}{5} = \frac{4 \cdot 2 : 3}{5} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$.

2) $\frac{4}{5 : \frac{2}{3}} = \frac{4}{5 \cdot 3 : 2} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2}$.

Auf ähnliche Art verhält es sich auch bey der Division.

6. Die Rechnung mit entgegengesetzten Größen.

§. 117. Aufg. Von der Spitze einer Insel in freyer See gehen zu gleicher Zeit zwey Schiffe, A nach Osten, B nach Westen ab, und es wird angegeben, wie viele Meilen, und in welcher Ordnung, jedes Schiff täglich zurückgelegt habe: man soll die Entfernung finden, die beide Schiffe von der Insel, und von einander selbst, nach einer gegebenen Zeit haben.

Auflös. Hier ist offenbar nicht blos auf die Zahl der zurückgelegten Meilen, sondern zugleich auch auf die jedesmalige Richtung des Weges zu sehen, zumal da jedes Schiff in seiner Richtung nicht immer ununterbrochen fortgeht, sondern oft von einem widrigen Winde in seinem Laufe zurückgetrieben wird, welches den Weg, den es bereits vorwärts gethan hat, ganz oder zum Theil wieder aufhebt und vernichtet. Dies vorausgesetzt, läßt sich das Gesuchte leicht finden, wie am kürzesten an einem Beyspiele zu zeigen ist.

Exem.

Exempel. Das Schiff A wird am 1ten Tage, nachdem es 26 Meilen östlich zurückgelegt, durch den Wind 8 Meilen zurückgetrieben, oder macht 18 Meilen westlich, und ist also nur 18 Meilen vorwärts gekommen. Am 2ten Tage macht es 16 M. O. und 4 M. W. also zusammen 12 M. O. und ist folglich nunmehr 30 M. von der Insel nach Osten entfernt. Das Schiff B wird am 1ten Tage, nachdem es 32 Meilen westlich zurückgelegt, durch den Wind 12 Meilen zurückgetrieben, oder macht 12 Meilen östlich, und ist also nur 20 Meilen vorwärts gekommen. Am 2ten Tage macht es 38 M. W. und 8 M. O. also zusammen 30 M. W., und ist also nunmehr 50 M. von der Insel nach Westen entfernt. Demnach beträgt nunmehr die Entfernung beider Schiffe von einander 80 Meilen.

§. 118. Zus. Die Meilen nach Osten und nach Westen sind zwar Dinge von einerley Art, können aber doch nicht schlechthin zusammengezählt, sondern müssen in mancher Rücksicht von einander weggenommen werden. Eben dies würde bey Entfernungen nach Süden und Norden, und überhaupt bey Bewegungen nach vorn und zurück, nach auf und ab, ja bey vielen andern Dingen, als Einnahme und Ausgabe, Vermögen und Schulden u. s. w. stattfinden.

§. 119. Erkl. Entgegengesetzte Größen heißen Größen von einerley Art, die man zugleich in solcher Beziehung betrachtet, daß sie einander ganz oder zum Theil aufheben, wie die Größen in §. 118.

§. 120. Zus. 1. Die Größen, die §. 118. einander entgegengesetzt werden, sind zwar durch die angezeigten Benennungen genugsam von einander unterschieden, aber gewisse allgemeine Zeichen ihres Unterschiedes würden der Rechnung den Vortheil gewähren, daß man alle dergleichen Größen unter allgemeine Regeln bringen könnte. Man hat hierzu die Zeichen (+) und (−) erwählt, und nennt die Größen mit dem ersten Zeichen bejahende oder positive, mit dem zweyten verneinende oder negative. Beide sind, so wie Addition und Subtraction, einander entgegengesetzt, so daß dasjenige, was durch das Positive gesetzt worden, durch die Negation wieder weggenommen wird.

§. 121.

§. 121. Zus. 2. Es ist willkührlich, wie man diese Namen vertheilen, d. i. welche von beiden Größen man positiv oder negativ nennen will. Denn eigentlich sind alle Größen bejaht oder positiv, weil bey allen Größen etwas bejahet oder gesetzt wird; nur durch die Entgegensetzung wird eine zweyte bejahte Größe die Verneinung einer ersten bejahten Größe, das heißt, sie hebt die erste wieder auf. Z. E. Die Meilen nach Osten, §. 117, werden so gut wie die nach Westen, durch proportionirte Kräfte bewirkt und hervorgebracht, und von beiden Größen muß jede für sich betrachtet positiv heißen. Nur in ihrer Zusammenstellung ist jede der andern entgegengesetzt, und in so fern jede die Verneinung der andern, daher auch jede negativ heißen kann, aber nur in Beziehung auf die andre, die positiv heißt.

§. 122. Zus. 3. Das Negative bey den Größen kann für sich allein nie stattfinden, und bezieht sich stets auf das entgegengesetzte Positive. Eine negative Größe ist also eine wirkliche Größe, aber der, die als positiv betrachtet wird, entgegengesetzt, und heißt daher weiter nichts als eine Größe, die man als die ihr entgegengesetzte positive betrachtet, und dieses durch die Verneinung anzeigt. Z. E. wenn man die Meilen nach Osten positiv nennt, so sind die Meilen nach Westen negative Meilen nach Osten, und eben so kann man die Schulden ein negatives Vermögen, das Absteigen ein negatives Aufsteigen nennen u. s. w. so wie auch umgekehrt das Vermögen eine negative Schuld, und das Aufsteigen ein negatives Absteigen heißen kann.

§. 123. Zus. 4. Bey allen entgegengesetzten Größen lege man also die positive Einheit zum Grunde, so daß alle Zahlen, die aus solcher Einheit selbst entstehen, positiv sind, und die negativen Zahlen erhalten werden, wenn man das der positiven Einheit Entgegengesetzte etlichemal nimmt.

Zwar

Zwar könnte man auch wohl die negative Einheit zum Grunde der Rechnung legen, daß alle aus derselben entstehende Zahlen negativ, und die positiven das Vielfache des solcher Einheit Entgegengesetzten wären; dieß würde aber nichts als eine bloße Verwechselung der Namen seyn, daher man durchgängig, und mit mehrerem Rechte, das erste angenommen hat. Aber eine Einheit anzunehmen, die weder positiv noch negativ wäre, würde ein völliges Unding seyn.

§. 124. Anm. So lange man noch nicht mit entgegengesetzten Größen rechnet, braucht man freylich noch nicht an die positive Einheit zu denken, noch weniger die positiven Zahlen mit ihrem Zeichen zu belegen. Ja selbst bey dergleichen Rechnungen erforderte die Nothwendigkeit blos Ein Zeichen für das Negative, wenn man nicht zu desto besserm Unterschiede auch dem Positiven ein besonderes Zeichen geben wollte; welches man auch weglassen kann, wenn keine Zweydeutigkeit zu befürchten ist.

§. 125. Zus. 5. Keine Größe ist an sich **negativ**, sondern wird es erst durch die Entgegensetzung mit dem Positiven, und bedeutet alsdann nicht bloß den **Mangel** des Positiven, sondern seine **Beraubung**, d. i. etwas dem Positiven Entgegengesetztes, welches von dem Positiven, soviel es selbst beträgt, wegnimmt. Die Zeichen des Positiven und Negativen sind also hier nicht Zeichen der Addition und Subtraction, indem die Größen, die einerley Zeichen haben, welches es auch sey, einander offenbar vermehren, und nur eine Subtraction stattfindet, wenn beiderley Zeichen zusammenkommen, da dann das Kleinere, es mag das Zeichen (+) oder (−) haben, von Größern weggenommen wird. Z. E. $+5+3=+8$, und $-5-3=-8$; aber $+5-3=+2$, und $-5+3=-2$; denn das Kleinere hebt in entgegengesetzten Größern soviel auf, als es selbst beträgt, daher der Rest von der Art des Größern seyn muß.

§. 126. Zus. 6. Sind gleiche Größen einander entgegengesetzt, so heben sie einander ganz auf, daß Null der

Rest

Rest wird, z. E. $-5+5=0$; da es dann scheint, als wenn -5 weniger als Null wäre, weil erst $+5$ hinzukommen muß, daß aus -5 Null werde. Dies hat veranlaßt, die negativen Größen weniger als Nichts zu nennen, die doch so gut wie die positiven wirkliche Größen, und also mehr als Nichts sind. Soll daher jener Ausdruck richtig seyn, so muß er wenigstens eingeschränkt werden, daß die negative Größe nur in Beziehung auf die ihr entgegengesetzte, nicht aber überhaupt, weniger als Nichts sey. Nämlich eine negative Größe ist zwar mehr als schlechthin nichts, aber weniger als Nichts von der ihr entgegengesetzten Größe. Z. E. setzt man Gewinn $+$ und Verlust $-$, und will den Gewinn beym Spiele zusammenrechnen, so ist $+8-5=+3$ mehr als nichts vom Gewinn, $+8-8=0$ Nichts vom Gewinn, $+5-8=-3$ weniger als nichts vom Gewinn, obgleich letzteres gewiß mehr als Nichts überhaupt ist, wie unglückliche Spieler oft nachdrücklich empfinden müssen.

§. 127. Zus. 7. Nach ähnlichen Betrachtungen ist an sich $-7>-4$, aber in Beziehung auf die ihr entgegengesetzte Größe, da -4 schon weniger als Nichts ist, so muß -7 noch weniger als Nichts seyn, und ist also $-7<-4$. Oder im Exempel §. 126, je größer der Verlust ist, desto weniger als Nichts vom Gewinn ist vorhanden, weil alsdann ein desto größerer Gewinn erforderlich ist, um ein Nichts vom Gewinn zu verschaffen. Demnach ist jede verneinte Zahl, in Beziehung auf die bejahte, kleiner als Null, und kleiner als jede bejahte, und zwar dies desto mehr, je größer die verneinte Zahl an sich ist.

§. 128. Zus. 8. Die negative Größe kann also einer Null nie beygefügt werden, z. E. $0-3$, weil dies anzeigen würde, daß 3 in 0 aufgehoben werden soll, da doch in Null nichts aufzuheben ist. Ein solcher Ausdruck setzt die falsche Vorstellung der negativen Größen voraus, als wären sie weniger als Nichts überhaupt, §. 126. Wenn in der An-

wendung ein ſolcher Ausdruck keine Unrichtigkeiten verurſacht, ſo kommt dies daher, daß bey der Vermehrung und Verminderung der Größen die Null nichts ändert, und bloß müßig daſteht; z. E. +5−3=+2, und +5+0−3=+2.

§. 129. Zuſ. 9. Eine Größe bleibt unverändert ſich dieſelbe, wenn man ihr einerley beliebige Größen mit beiderley Zeichen beyfügt, z. E. A+B−B=A+0=A. Daß für dieſen Fall die Null nicht ganz unnütz ſey, wird ſich im Folgenden zeigen.

§. 130. Aufg. Zahlen mit einerley, oder verſchiedenen Zeichen zu einander zu addiren.

Auflöſ. Sind einerley Zeichen, ſo addire man die Zahlen, und gebe der Summe das gemeinſchaftliche Zeichen: ſind aber verſchiedene Zeichen, ſo ſubtrahire man die kleinere Zahl von der größern, und gebe dem Reſte das Zeichen der größern, §. 128.

Exempel. Nennt man in §. 117. die Meilen nach Oſten poſitiv, ſo hat man für das Schiff A, +26−8+16−4=+30, und für das Schiff B, −32+12−38+8=−50.

Anm. Hieraus erſieht man, daß die Zeichen entgegengeſetzter Größen einen ähnlichen Vortheil wie die Decimalzahlen §. 50. gewähren, daß man während der Rechnung an ihre Bedeutung nicht zu denken braucht.

§. 131. Aufg. Zahlen mit einerley oder verſchiedenen Zeichen von einander zu ſubtrahiren.

Auflöſ. Man verwandle das Zeichen des Subtrahendus in das entgegengeſetzte, und addire ihn ſo zu dem Minuendus nach der Vorſchrift §. 130. Z. E. Von +5 ſubtrahirt +3, giebt +5−3, d. i. +2, und von +5 ſubtrahirt −3, giebt +5+3, d. i. +8.

Bew. Eine Größe von der andern ſubtrahiren oder wegnehmen, heißt ſie als einen Theil der andern betrachten, und dieſen Theil von ihr wegnehmen. Setzt man alſo den

Sub-

Subtrahendus mit ſeinem Zeichen zum Minuendus, wodurch dieſer unverändert bleibt, §. 129, und nimmt hievon den Subtrahendus mit ſeinem Zeichen wieder weg, ſo bleibt der Subtrahendus mit dem entgegengeſetzten Zeichen ſtehen.

Im Exempel iſt $+5=+5+3-3$, und hievon $+3$ oder -3 weggenommen, bleibt im erſten Falle $+5-3$, im zweyten $+5+3$.

Anderer Beweis. Die Differenz iſt eine Größe, die zum Subtrahendus B addirt, den Minuendus A geben muß, §. 22, folglich $A \mp B$, weil $+B+(A-B)=A$, und $-B+(A+B)=A$ iſt, §. 129.

§. 132. Anm. Zur Erläuterung diene Folgendes: Hat der Subtrahendus einen poſitiven und negativen Theil, und man hat zuerſt den poſitiven ſubtrahirt, ſo muß man den negativen, den man zuviel abgezogen, wieder addiren. Z. E. von $+18$ ſubtrahirt $+12-7$, giebt $+18-12+7$.

Zur Anwendung diene das Exempel §. 130. Wenn man die Entfernung der beiden Schiffe von einander aus dem Abſtande eines jeden von der Inſel $+30$ und -50 beſtimmen ſoll, ſo findet hier die Addition des entgegengeſetzten, folglich eine Subtraction ſtatt, wobey es einerley iſt, ob man B von A, oder A von B ſubtrahirt. Erſteres giebt C, letzteres D.

A,	$+28$	-8	$+16$	-4	$=$	$+30$
B,	-32	$+18$	-38	$+8$	$=$	-50
C,	$+58$	-20	$+54$	-12	$=$	$+80$
D,	-58	$+20$	-54	$+12$	$=$	-80

§. 133. Zuſ. Eine Größe wird addirt, wenn man ſie mit ihrem Zeichen hinzuſetzt, ſubtrahirt aber, wenn man ſie mit dem entgegengeſetzten Zeichen hinzuſetzt.

§. 134. Lehrſ. Bey der Multiplication ſowohl, als bey der Diviſion, bringen einerley Zeichen etwas Bejahendes, verſchiedene Zeichen aber was Verneinendes hervor; in ſo fern nämlich die Einheit überall bejahend angenommen wird. §. 123.

Bew. 1) für die Multiplication: So wie die bejahende Einheit in dem einen bejahenden Factor ſteckt, ſo

ſteckt auch der zweyte bejahende Factor in dem bejahenden, oder der verneinende in dem verneinenden Producte. Und ſo wie das Entgegengeſetzte der bejahenden Einheit in dem verneinenden Factor ſteckt, ſo ſteckt auch das Entgegengeſetzte des zweyten bejahenden Factors in dem verneinenden, oder des verneinenden in dem bejahenden Producte.

2) für die Diviſion: So wie der bejahende Diviſor in dem bejahenden Dividendus, oder der verneinende in dem verneinenden ſteckt, ſo ſteckt auch die bejahende Einheit in dem bejahenden Quotienten. Und ſo wie das Entgegengeſetzte des verneinenden Diviſors in dem bejahenden Dividendus, oder des bejahenden in dem verneinenden ſteckt, ſo ſteckt auch das Entgegengeſetzte der bejahenden Einheit in dem verneinenden Quotienten.

§. 135. Anm. Die Diviſion läßt ſich aus der Multiplication erläutern, indem das Product aus dem Diviſor in den Quotienten den Dividendus geben muß. Die Multiplication wird, wenn der eine Factor einen bejahenden und verneinenden Theil hat, wie §. 132. erläutert. Z. E. $(8-3)5=5\cdot 8-5\cdot 3$.

§. 136. Aufg. Zahlen mit einerley oder verſchiedenen Zeichen mit einander zu multiplicairen.

Auflöſ. Man multiplicire den Multiplicandus mit jedem Theile des Multiplicans wie gewöhnlich, nur daß man die Zeichen nach §. 134. ſetze, und addire die gefundenen Producte nach §. 130.

$+9-4-8+7$	$=+4$
$+7-4$	$=+3$
$-36+16+32-28$	
$+63-28-56+49$	
$+27-12-24+21$	$=+12$

§. 137. Aufg. Zahlen mit einerley oder verſchiedenen Zeichen mit einander zu dividiren.

Auflöſ. Man dividire wie gewöhnlich, und gebe den Theilen des Quotienten die Zeichen nach §. 134. Z. E.

$$\frac{+56-35}{+7}=+8-5.$$

§. 138.

§. 138. Anm. 4. Das Weitere von der Rechnung mit entgegengeſetzten Größen findet man im Folgenden.

7. Die Rechnung mit Buchſtaben.

§. 139. Wahlſ. Ein beliebiger Buchſtabe zeigt eine Zahl oder Größe überhaupt an. Gemeiniglich braucht man die letztern Buchſtaben des Alphabets für unbekannte und geſuchte, die übrigen für bekannte und gegebene Größen. Für die Rechnungsarten dienen die gewöhnlichen arithmetiſchen Zeichen, nur daß man bey den Producten auch das Zeichen beliebig wegläßt, und die Buchſtaben blos neben einander ſetzt.

So heißt z. E. $a+b$ die Summe der beiden Zahlen, a und b, $a-b$ ihre Differenz, $a.b$ oder $a \times b$ oder ab ihr Product, $a:b$ oder $\frac{a}{b}$ ihr Quotient.

§. 140 Anm. 1. Man gewöhne ſich bey Zeiten, die Zeichenſprache und Wortſprache in einander zu überſetzen, und darin eine Fertigkeit zu erlangen. In dieſer Rückſicht bemerke man ſorgfältig obige und alle im Folgenden noch vorkommende Bezeichnungsarten und Ausdrücke.

§. 141. Anm. 2. Die Rechnung mit Buchſtaben, oder die Buchſtabenrechnung, calculus literalis, heißt auch die allgemeine Arithmetik, arithmetica seu calculus universalis, und iſt die Wiſſenſchaft von unbeſtimmten Zahlen, die durch Buchſtaben, als durch allgemeine Zeichen, ausgedrückt werden, im Gegenſatz der gemeinen Arithmetik, arithmetica vulgaris, oder der Wiſſenſchaft von beſtimmten Zahlen, die durch Ziffern, als durch beſtimmte Zeichen, ausgedrückt werden. Sie unterſucht die allgemeinen Eigenſchaften der Größen, da ſie alles, was Größe heißt, umfaßt, und dient daher zur Erweiterung der gemeinen Arithmetik.

§. 142. Zuſ. 1. Die Buchſtaben können jede Zahlen, (nicht wie bey den Alten beſtimmte Zahlen) bedeuten, von welcher Art ſie auch ſeyn mögen, wofern ihre Bedeutung nicht etwa durch die Umſtände der Sache eingeſchränkt wird.

Soll z. E. 2n und 2n—1 (d. i. 2n+1, oder 2n—1) die allgemeine Form gerader und ungerader Zahlen §. 65. seyn, so muß n auf die Bedeutung einer ganzen Zahl eingeschränkt werden.

1 §. 143. Anm. Anfänger können vorerst die Buchstaben in den Beyspielen blos für ganze Zahlen nehmen, aber die Regeln ihrer Rechnung bleiben allgemein, wofern sie nicht etwas voraussetzen, daß die Bedeutung der Buchstaben auf eine gewisse Art von Zahlen eingeschränkt.

§. 144. Zus. 2. Ein bestimmtes Vielfache einer Größe zeigt man durch eine arabische Ziffer, welche vorangesetzt wird, an. So ist z. E. 3a = a + a + a, das 3fache der Größe a (wobey 1a = a) oder allgemein na ihr nfaches, a mag nun eine Zahl, oder eine bestimmte Einheit, oder was man will, bedeuten.

§. 145. Zus. 3. Eben so hat die bestimmte Potenz einer Zahl zu ihrem Exponenten eine arabische Ziffer, welche man der Zahl oben zur Rechten beysetzt. So ist z. E. $a^3 = a.a.a$, die 3te Potenz der Zahl a (wobey $a^1 = a$) oder allgemein a^n ihre nte Potenz, und ma^n das mfache dieser Potenz. Das, was in eine solche Potenz multiplicirt ist, wie m, heißt ihr Coefficient.

§. 146. Zus. 4. Ein Aehnliches findet auch bey den Wurzeln statt. So heißt z. E. $\sqrt[3]{a}$ die Cubikwurzel aus a, oder allgemein $\sqrt[n]{a}$ die nte Wurzel aus a, und $m\sqrt[n]{a}$ das mfache dieser Wurzel.

§. 147. Zus. 5. Zwey verschiedene Buchstaben, da sie jede Größe bedeuten können, lassen sich ohne nähere Bestimmung nicht mit einander vergleichen, aber wohl das Vielfache eines Buchstabens mit einem Vielfachen desselben Buchstabens. So ist z. E. $5a + 3a = (5 + 3)a = 8a$, und $5a - 3a = (5 - 3)a = 2a$, oder allgemein $mx \pm nx = (m \pm n)x$.

§. 148.

§. 148. Zuſ. 6. Eben dies gilt auch bey Potenzen und Wurzeln von einerley Zahl mit einerley Exponenten. So iſt z. E. $px^n \mp qx^n = (p \mp q)x^n$, und $\sqrt[n]{px} \mp \sqrt[n]{qx} = (\sqrt[n]{p} \mp \sqrt[n]{q})\sqrt[n]{x}$.

§. 149. Zuſ. 7. Brüche in Buchſtaben ausgedrückt, werden wie die Brüche in Ziffern behandelt, d. i. nach den gemeinen Regeln aufgehoben, gleichnamig gemacht, addirt, ſubtrahirt, multiplicirt, dividirt.

So iſt z. E. $\frac{8ab}{4ac} = \frac{2b}{c}$; $\frac{a}{b} \mp \frac{c}{d} = \frac{ad \mp bc}{bd}$; $\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d} = \frac{bc}{ad}$; $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

§. 150. Aufg. Potenzen von einerley Wurzel mit einander zu multipliciren.

Auflöſ. Man mache von ſolcher Wurzel eine Potenz, deren Exponent die Summe der Exponenten der Factoren iſt. Z. E. $a^3 \cdot a^2 = a^5$, oder allgemein $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.

Bew. Da der Exponent jeder Potenz die Zahl der Factoren in ihr anzeigt, $a^3 = aaa$, und $a^2 = aa$, ſo ſind im Producte $aaa \cdot aa$ ſoviel Factoren, als beide Exponenten zuſammen anzeigen, folglich das Product a^5 eine Potenz der Zahl a, deren Exponent die Summe der gegebenen Exponenten iſt.

§. 151. Zuſ. 1. Eine Potenz wird zu einem höhern Grade erhoben, wenn man ihren Exponenten mit dem Exponenten des höhern Grades multiplicirt. So iſt z. E. $(a^3)^2 = a^6$, weil $(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^{3+3}$, folglich allgemein $(x^n)^m = x^{nm}$.

§. 152. Zuſ. 2. Aus einer Potenz wird die Wurzel gezogen, wenn man ihren Exponenten mit dem Exponenten

der Wurzel dividirt. So iſt z. E. $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$, weil $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3 = a^{\frac{2}{3}\cdot 3} = a^2$, desgleichen $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{a^1} = a^{\frac{1}{m}}$, weil $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^m = a^{\frac{m}{m}} = a^1 = a$, folglich allgemein $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$, und $\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$.

§. 153. Zuſ. 3. Eine Zahl mit einem gebrochenen Exponenten bedeutet hier blos, daß man aus der Potenz dieſer Zahl, welche der Zähler des Exponenten anzeigt, die Wurzel, welche der Nenner anzeigt, ausziehen ſolle. So iſt z. E. $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$. Das Nähere hievon folgt in der Lehre von Zuſammenſetzung der Verhältniſſe.

§. 154. Zuſ. 4. Ein Product ab, oder ein Quotient $\frac{g}{h}$, wird auf die Potenz m erhoben, wenn man jeden Factor des Products und jedes Glied des Quotienten zu ſolcher Potenz erhebt, ſo daß $(ab)^m = a^m b^m$, und $\left(\frac{g}{h}\right)^m = \frac{g^m}{h^m}$. Denn die Potenz m erfordert ein Product aus m ſolchen Factoren, als ab oder $\frac{g}{h}$ iſt.

§. 155. Zuſ. 5. Die Wurzel m aus jedem Producte ab iſt ein Product der Wurzel aus jedem Factor, d. i. $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$. Denn $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = a^{\frac{1}{m}} \cdot b^{\frac{1}{m}}$, folglich $\left(a^{\frac{1}{m}} \cdot b^{\frac{1}{m}}\right)^m = ab$.

§. 156. Zuſ. 6. Die Wurzel m aus jedem Quotienten $\frac{g}{h}$ iſt ein Quotient der Wurzel aus jedem Gliede, d. i. $\sqrt[m]{\frac{g}{h}} = \frac{\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{h}}$. Denn $\frac{\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{h}} = \frac{g^{\frac{1}{m}}}{h^{\frac{1}{m}}}$, folglich $\left(\frac{g^{\frac{1}{m}}}{h^{\frac{1}{m}}}\right)^m = \frac{g}{h}$.

§. 157.

§. 157. Aufg. Potenzen von einerley Wurzel mit einander zu dividiren.

Auflös. Man mache von solcher Wurzel eine Potenz, deren Exponent die Differenz der gegebenen Exponenten ist, so daß nämlich vom Exponenten des Dividendus der Exponent des Divisors abgezogen werde. Z. E. $\frac{a^5}{a^2} = a^3$, oder allgemein $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$.

Beyw. Da sich im Dividendus soviel Factoren aufheben, als der Divisor hat, so bleiben im Quotienten die übrigen Factoren des Dividendus, welcher daher die oben beschriebene Potenz ist, d. i. $\frac{a^5}{a^2} = \frac{aaaaa}{aa} = aaa = a^3$. Auch ist $\frac{a^4}{a^3} = a^1 = a$.

§. 158. Zus. 1. Sind beide gegebene Exponenten einander gleich, so ist des Quotienten Exponent o und des Quotienten Werth die Einheit, folglich jede Potenz, die o zum Exponenten hat, der Einheit gleich, weil $\frac{x^m}{x^m} = 1 = x^{m-m} = x^0$.

§. 159. Zus. 2. Hat der Divisor einen größern Exponenten, als der Dividendus, so wird des Quotienten Exponent negativ, und des Quotienten Werth ein Bruch, dessen Zähler die Einheit, und dessen Nenner dieselbe Zahl mit demselben aber positiven Exponenten ist, weil $\frac{a^3}{a^7} = \frac{1}{a^4} = a^{3-7} = a^{-4}$.

§. 160. Zuſ. 3. Eine Zahl mit einem negativen Exponenten bedeutet hier blos, daß die Zahl mit dem entgegengeſetzten Exponenten in die Einheit dividirt werden ſolle. So z. E. iſt $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$, und allgemein $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$, welches auch das Entgegengeſetzte von $a^n = 1 . a^n$ iſt. Das Nähere hievon folgt in der Lehre von Zuſammenſetzung der Verhältniſſe.

§. 161. Zuſ. 4. Die Regeln der Multiplication und Diviſion der Potenzen mit poſitiven Exponenten §. 150. 157. gelten auch für Potenzen mit negativen Exponenten, wenn man dabey nach §. 130. 131. verfährt. Hienach iſt

1) $x^m . x^{-n} = x^{m-n}$. Denn es iſt $x^m . x^{-n} = x^m . \frac{1}{x^n} = \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$. Eben ſo beweiſt man, daß $x^{-m} . x^{-n} = x^{-(m+n)}$.

2) $(x^{-m})^n = x^{-mn}$. Denn es iſt $(x^{-m})^n = \left(\frac{1}{x^m}\right)^n = \frac{1}{x^{mn}} = x^{-mn}$. Eben ſo beweiſt man, daß $(x^m)^{-n} = x^{-mn}$, und daß $(x^{-m})^{-n} = x^{mn}$.

3) $\frac{x^m}{x^{-n}} = x^{m+n}$. Denn es iſt $\frac{x^m}{x^{-n}} = x^m : \frac{1}{x^n} = x^m . x^n = x^{m+n}$. Eben ſo beweiſt man, daß $\frac{x^{-m}}{x^{-n}} = x^{n-m}$, und daß $\frac{x^{-m}}{x^n} = x^{-(m+n)}$.

§. 162. Zuſ. 5. Die Regeln der Multiplication und Diviſion der Potenzen mit ganzen Exponenten §. 150. 157. 161. gelten auch für Potenzen mit gebrochenen Exponenten, und ſind alſo ganz allgemein. Hienach iſt

1)

1) $x^{\frac{n}{m}} \cdot x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{n}{m}+\frac{m}{n}}$. Denn es iſt $x^{\frac{n}{m}} \cdot x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{n}{m}} \cdot x^{\frac{m}{n}}$

$= \sqrt[m]{x^n} \cdot \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[mn]{x^{n+m}} = x^{\frac{n+m}{mn}} = x^{\frac{n}{m}+\frac{m}{n}}$. Eben ſo,

beweiſt man, daß $x^{\frac{n}{m}} : x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{n}{m}-\frac{m}{n}}$ u. ſ. w.

2) $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{mn}}$. Denn es iſt $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x^{\frac{1}{n}}} =$

$x^{\frac{1}{n}:m} = x^{\frac{1}{mn}}$ u. ſ. w.

§. 163. Erkl. Eine Größe, welche aus mehrern durch + und — verbundnen Theilen beſteht, heißt vieltheilig, (polynomiſch), jede andre aber einfach (monomiſch). Die einzelnen Theile einer vieltheiligen Größe heißen ihre Glieder oder Namen, und die Größe ſelbſt wird nach der Zahl der Glieder zweytheilig, dreytheilig u. ſ. w. (binomiſch, trinomiſch) genennt.

§. 164. Anm. 1. Dieſe Glieder können als poſitive und negative Größen angeſehen werden. Iſt das erſte Glied poſitiv, ſo läßt man das Zeichen weg.

§. 165. Anm. 2. Wird eine vieltheilige Größe mit einer andern Größe durch die arithmetiſchen Zeichen verbunden, ſo ſchließt man ſie gewöhnlich in eine Parentheſe ein. Z. E. $(a+b)(a-b)$ und $(a-b):(a+b)$ oder $\frac{a-b}{a+b}$ heißt die Summe zweyer Größen in ihre Differenz multiplicirt, oder dividirt.

§. 166. Anm. 3. Es ſteht jederzeit frey, in den beiden Factoren eines Produkts, oder in den beiden Gliedern eines Bruchs alle vorhandenen Zeichen in die entgegengeſetzten zu verwandeln. Denn nach §. 134. iſt für ein Product $+(a-b)+(-c+d) = -(a-b) \cdot -(-c+d)$ Das iſt $(a-b) \cdot (-c+d) = (-a+b) \cdot (c-d)$, und für einen Bruch $\frac{+(a-b)}{+(-c+d)} = \frac{-(a-b)}{-(-c+d)}$ d. i. $\frac{a-b}{-c+d} = \frac{-a+b}{c-d}$

§. 167.

§. 167. Erkl. Eine vieltheilige Größe, welche verschiedene Potenzen von einerley Buchstaben enthält, wird nach solchem Buchstaben geordnet, wenn man ihre Glieder so auf einander folgen läßt, wie die Exponenten der Potenzen zu- oder abnehmen. Z. E. $x^3 + ax^2 + bx - c$ ist nach dem Buchstaben x geordnet, so daß die Exponenten abnehmen, rückwärts gelesen aber so, daß die Exponenten zunehmen. Die Coefficienten der Potenzen sind 1, a, b, c, weil $c = cx^0$. Ist hiebey einer der Coefficienten a=0, so fällt das Glied hinweg, und wird mit einem * bezeichnet, z. E. $x^3 * + bx - c$. Kömmt einerley Potenz von x in mehrern Gliedern vor, so machen diese zusammen nur ein Glied aus, §. 148.

§. 168. Aufg. Vieltheilige Größen zu addiren oder zu subtrahiren.

Auflös. Man schreibe die gegebenen Größen so, daß einerley Buchstaben unter einander stehen, und verfahre nach §. 130. 135. Enthalten beide Größen verschiedene Buchstaben, so zeige man ihre Summe oder Differenz blos an, §. 147. Z. E.

$$\begin{array}{r} 15a - 17b + 4c - 7d + 5e \\ 6a - 19b - 7c + 3d \quad - 9f \\ \hline \text{Summe } 21a - 36b - 3c - 4d + 5e - 9f \\ \text{Differenz } 9a + 2b + 11c - 10d + 5e + 9f \end{array}$$

§. 169. Anm. 1. Die Operation bleibt dieselbe, wenn auch die Buchstaben Produkte, Quotienten, Potenzen, Wurzeln, und was man will, bedeuten, §. 144.

§. 170. Anm. 1. Bedeuten die Buchstaben a, b, c u. s. w. bestimmte Einheiten, so kann man die Rechnung führen, ohne vorhergegangene oft mühsame Reduction, ja ohne einmal die Beziehung zu wissen, welche diese Einheiten auf einander haben; wenn z. E. in dem Beyspiele §. 130. der Weg der Schiffe nicht nach einerley Meilen, sondern vermischt nach Deutschen a, Englischen b, und Französischen c angegeben wäre.

§. 171.

§. 171. Zuſ. 1. Von zwey Größen beſteht die größere x aus der halben Summe und der halben Differenz der beiden Größen, die kleinere y aber aus der halben Summe weniger der halben Differenz. Denn man erhält 2x, wenn man §. 168 die Differenz der beiden Größen x−y zu ihrer Summe x+y addirt, und 2y, wenn man jene von dieſer ſubtrahirt. Demnach iſt $2x=(x+y)+x-y$, oder $x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}$, und $2y=(x+y)-(x-y)$, oder $y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}$. Es ſey z. E. 14 die Summe zweyer Zahlen, 4 ihre Differenz, ſo iſt die größere 7+2, die kleinere 7−2.

x+y	
x−y	
2x	Summe
2y	Differenz

§. 172. Zuſ. 2. Die Summe oder Differenz einer geraden und ungeraden Zahl iſt ungerade, zweyer geraden oder ungeraden Zahlen aber gerade.

Denn bedeuten m und n ganze Zahlen, ſo iſt (§. 142.) 2m oder 2n eine gerade, 2m+1 oder 2n+1 eine ungerade Zahl, folglich

2m	
2n+1	
Summe	2m+2n+1
Differ.	2m−2n−1
2m+1	
2n+1	
Summe	2m+2n+2
Differ.	2m−2n

1. Die Summe einer geraden und ungeraden Zahl 2m+2n+1, alſo ungerade, zweyer ungeraden Zahlen aber 2m+2n+2, alſo gerade.

2. Die Differenz einer geraden und ungeraden Zahl 2m−2n+1, alſo ungerade, zweyer ungeraden Zahlen aber 2m−2n alſo gerade.

§. 173. Anm. Aus dieſen Beyſpielen ſieht man den Vortheil, den die Buchſtabenrechnung leiſtet, allgemeine Lehrſätze zu erfinden. Mehrere Beyſpiele hievon im Folgenden.

§. 174.

§. 174. Aufg. Vieltheilige Größen zu multipliciren.

Auflöſ. 1) Iſt der Multiplicans einfach, ſo multiplicire man damit jeden Theil des Multiplicandus mit Beobachtung der Zeichen §. 134.

$$\begin{array}{r} 4d - cx + 2 \\ \hline -4cx \\ \hline -16cdx + 4c^2x^2 - 8cx \end{array}$$

2) Iſt der Multiplicans vieltheilig, ſo verfahre man mit jedem Theile deſſelben wie im erſten Falle, und addire die einzelnen Producte. §. 168.

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 4ax + a^2 \\ 3x^2 - a^2 \\ \hline 9x^4 + 12ax^3 + 3a^2x^2 \\ -4a^3x - a^4 - 3a^2x^2 \\ \hline 9x^4 + 12ax^3 - 4a^3x - a^4 \end{array}$$

§. 175. Anm. 1. Zur Uebung können folgende Exempel dienen:

$(4bc - 8dc) : 2a = 4abc - 16acd.$

$(5a + 3d) \cdot (3a - 2b) = 15a^2 - 10ab + 9ad - 6bd.$

$(3ay^2 - 2ay) \cdot (4ay - 3y) = 12a^2y^3 - 9ay^3 - 8a^2y^2 + 6ay^2.$

$(c - 6d) \cdot (a - 4b^2 = ac - 6ad - 4b^2c + 24b^2d.$

$(6c^2 - b^4c + 4a^2) \cdot (5c^2 - 3a) = 30c^4 - 5b^4c^2 + 20a^2c^2 - 18ac^2 + 3ab^4c - 12a^3.$

$(a^3 + 2ac - bc) \cdot (a - b) = a^4 - a^3b + 2a^2c - 3abc + b^2c.$

$(a - d + b) \cdot (a - b - d) = a^2 - 2ad + b^2 + d^2.$

$(a + 2b + c) \cdot (a - 2b - c) = a^2 - 4b^2 - 4bc - c^2.$

$(x^3 - 2x^2 + 103x - 2.103) \cdot (x^2 + 2x - 99) = x^5 + 2.99x^2 - 103^2.x + 103.198.$

$(a^2 - ab + b^2) \cdot (a + b) = a^3 + b^3.$

$(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) \cdot (a - b) = a^4 - b^4.$

$(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \cdot (a + b) = a^5 + b^5.$

§. 176. Anm. 2. Die Multiplication iſt bey der gemeinen Berechnung abkürzig, und wird häufig gebraucht, wozu folgende Exempel dienen:

$$a + \frac{bd}{c} = \frac{ac + bd}{c}; \quad a + \frac{ac - cd + ad}{c + d} = \frac{2ac - cd}{c + d}; \quad \frac{a^2}{a - b} + a = \frac{2a^2 - ab}{a - b}; \quad \frac{a^2}{a - b} - a = \frac{ab}{a - b}; \quad a + b - \frac{cd}{a} = \frac{a^2 + ab - cd}{a}$$

a—

$a-b+\frac{c^2}{a-b}=\frac{a^2-2ab+b^2+c^2}{a-b}$; $a-b+\frac{b^2}{a+b}=\frac{a^2}{a+b}$;

$a-b-\frac{b^2}{a+b}=\frac{a^2-2b^2}{a+b}$; $\frac{a^3}{bc}+\frac{fg}{bh}=\frac{a^3h+cfg}{bch}$.

§. 177. Zuſ. 1. Die Summe zweyer Zahlen, $a+b$, mit ihrer Differenz $a-b$ multiplicirt, giebt die Differenz ihrer Quadrate.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array}$$

§. 178. Zuſ. 2. Das Product aus zwey geraden Zahlen, oder aus einer ungeraden Zahl in eine gerade, iſt $4nm+2m$, alſo gerade.

$$\begin{array}{r} 2n+1 \\ 2m \\ \hline 4nm+2m \end{array}$$

§. 179. Zuſ. 3. Das Product aus zwey ungeraden Zahlen iſt $4nm+2m+2n+1$, alſo ungerade.

$$\begin{array}{r} 2n+1 \\ 2m+1 \\ \hline 4nm+2m+2n+1 \end{array}$$

§. 180. Zuſ. 4. Daher und aus §. 172. iſt $2n+1$, oder $2(n+1)-1$ die $n+1$te ungerade Zahl. Denn da 1, die erſte $=1$; 3, die 2te $=1+2$. 1; 5, die 3te $=1+2.2$; 7, die 4te $=1+2.3$. u. ſ. w. ſo iſt die $n+1$te $=n+2.n$ $=2n+1=n+2-1=2(n+1)-1$.

§. 181. Zuſ. 5. Das größere Glied eines jeden Bruchs läßt ſich durch die Summe des kleinern Gliedes und der Differenz ausdrücken, z. E. $\frac{1}{2}=\frac{2}{3+1}$. Setzt man daher allgemein für zwey Brüche das kleinere Glied a, α, die Differenz d, δ; ſo iſt der erſte Bruch $\frac{a}{a+d}$, der zweyte $\frac{\alpha}{\alpha+\delta}$, folglich $\frac{a}{a+d}-\frac{\alpha}{\alpha+\delta}=\frac{a\alpha+a\delta-\alpha a-\alpha d}{(a+d)(\alpha+\delta)}=\frac{a\delta-\alpha d}{(a+d)(\alpha+\delta)}$

z. E. $\frac{87}{85}-\frac{93}{96}=\frac{85.3-93.2}{87.96}$.

§. 182.

$\frac{a+d}{a} = \frac{a+}{a}$ §. 182. Zus. 6. Für unächte Brüche ist

$= \frac{aa+ad-aa-ad}{aa} = \frac{ad-ad}{aa} = 0$ Z. E. $\frac{96}{93} - \frac{87}{85}$

$= \frac{85.8-93.7}{93.85}$

§. 183. Aufg. Vieltheilige Größen zu dividiren.

Auflös. 1. Ist der Divisor einfach, so dividire man damit jeden Theil des Dividendus §. 149. mit Beobachtung der Zeichen §. 134. Z. E. $(2c^2x^2 - 16cdx - 8cx) : -4cx = -cx + 4d + 2$, wovon die Probe §. 175.

2. Ist der Divisor vieltheilig, so ordne man den Dividendus und Divisor nach einerley Buchstaben, §. 167, und verfahre nach den gemeinen Regeln der Division §. 58. Z. E.

$8x^2 - a^2$) A. $9x^4 + 12ax^3 - 4a^3x - a^4$ | $3x^2 + 4ax + a^2$

$9x^4 - 3a^2x^2$

B. $0 + 12ax^3 + 3a^2x^2 - 4a^3x - a^4$

$+ 12ax^3 \quad -4a^3x$

C. $+ 3a^2x^2 \quad 0 - a^4$

$+ 3a^2x^2 \quad - a^4$

0

Nämlich man dividirt den ersten Theil des Divisors $+8x^2$ in den ersten Theil des Dividendus $+9x^4$, und setzet den ersten Theil des Quotienten $+3x^2$. Mit diesem ersten Theile multiplicirt man den ganzen Divisor, und subtrahirt das Product $9x^4 - 3a^2x^2$ vom Dividendus A, so erhält man den Rest B. Mit diesem verfahre man auf eben die Art wie mit A, so erhält man den zweyten Theil des Quotienten $+4ax$, und den Rest C. Aus diesem erhält man eben so den dritten Theil des Quotienten $+a^2$ und den Rest 0. Demnach ist der gesammte Quotient $3x^2 + 4ax + a^2$, wovon die Probe §. 175. Die Reste A, B, C müssen nach §. 167. geordnet seyn.

§. 184.

§. 184. Anm. 1. Zur Uebung in der Diviſion mache man ſich Produkte, oder nehme ſie aus §. 175, mache ein ſolches Product zum Dividendus, und einen ſeiner Factorum zum Diviſor, ſo muß der gefundene Quotient den andern Factor geben, wenn man richtig dividirt hat.

Exempel 1. Dividendus a^5+b^5, Diviſor $a+b$.

$$
\begin{array}{l|l}
a+b)\ a^5+b^5 & a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4 \\
\quad a^5+a^4b & \\
\hline
\quad 0-a^4b+b^5 & \\
\quad -a^4b-a^3b^2 & \\
\hline
\quad 0+a^3b^2+b^5 & \\
\quad +a^3b^2+a^2b^3 & \\
\hline
\quad 0\quad -a^2b^3+b^5 & \\
\quad -a^2b^3-ab^4 & \\
\hline
\quad 0+ab^4+b^5 & \\
\quad +ab^4+b^5 & \\
\hline
\quad 0\quad 0 &
\end{array}
$$

Hiebey fällt in die Augen, daß jedesmal das Product aus dem gefundenen Gliede des Quotienten in den erſten Theil des Diviſors das erſte Glied des Dividendus aufhebe, und daß ein Product aus einem Gliede des Quotienten und Diviſors, welches ſich nicht ſubtrahiren läßt, mit ſeinem entgegengeſetzten Zeichen in den Reſt kommen müſſe, §. 133.

Exempel 2. Dividendus $x^5+2.99x^2-103^2x+103.198$. Diviſor $x^2+2x-99$.

$x^3-2x^2+103.x-2.103$ Quotient.

$$
\begin{array}{l}
x^2+2x-99)\ x^5+2.99x^2-103^2x+103.198 \\
\quad x^5+2x^4-99x^3 \\
\hline
\quad 0-2x^4+99x^3+2.99x^2-103^2x+103.198 \\
\quad -2x^4-4x^3+2.99x^2 \\
\hline
\text{A.}\quad 0+103x^3\quad 0-103x^2+103.198 \\
\text{B.}\quad +103x^3+2.103x^2-99.103x \\
\hline
\quad 0-2.103x^2-4.103x+103.198 \\
\text{C.}\quad -2.103x^2-4.103x+103.198 \\
\hline
\quad 0\quad 0\quad 0
\end{array}
$$

Hiebey iſt von einem Gliede in A. -103^2x, d. i. $-103.103x$, das Glied in B $-99.103.x$ zu ſubtrahiren, wodurch man $-4.103x$ erhält. In C. iſt das letzte Glied $103.198=99.2.103=103(2.99)$.

§. 185. Anm. 2. Durch Uebung in der Multiplication und Division erhält man eine Fertigkeit, manche Producte sogleich in ihre Factoren zu zerlegen. So sieht man z. E. leicht ein, daß $mx - nx = x(m-n)$; $ax + x = x(a+1)$; $a^2 - x^2 = (a+x)(a-x)$; $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$; $a^4 - x^4 = (a^2+x^2)(a^2-x^2)$; $6ab - 12bc - 3b = 3b(2a - 4c - 1)$; $a^2x - 2abx + b^2x = x(a-b)^2 = x(a-b)(a-b)$; $\frac{a^2x^2 - x^4}{a^2x + ax^2} = \frac{x^2(a+x)(a-x)}{ax(a+x)} = \frac{x(a-x)}{a}$ u. s. w.

§. 186. Anm. 3. Eine sehr vortheilhafte Uebung und Anwendung der Division ist: einen Bruch $\frac{A}{B}$, dessen Glieder vieltheilige Größen sind, nach Art eines gemeinen Bruchs §. 95. aufzuheben, wobey, um die Rechnung einfacher zu machen, vorher noch folgender Satz vorläufig zu bemerken ist:

Der gemeine Theiler zweyer Größen wird nicht geändert, wenn man die eine mit einer Zahl multiplicirt oder dividirt, die kein Factor der andern ist. Z. E. für $\frac{ab}{ac}$, $\frac{abd}{ac}$, $\frac{ab}{acb}$ bleibt a der gemeinschaftliche Theiler, aber für $\frac{ab}{ac}$ und $\frac{abc}{ac}$ sind a und ac die gemeinen Theiler.

Dies vorausgesetzt, kann nunmehr die Operation selbst an folgendem Beyspiele gelehrt werden: Es sey der gegebene Bruch $\frac{A}{B} = \frac{2a^4 + 2a^3b - a^2bc - ab^2c}{3a^3 + 3a^2b + 4ab^2 + 4b^3}$ aufzuheben.

1) Man ordne A und B nach einerley Buchstaben a, §. 167, wie hier schon geschehen ist.

2) Nun sollte das Größere mit dem Kleinern, also A mit B, dividirt werden; man mache aber vorher folgende Vorbereitung: Durch die Division mit a, die kein Factor von B ist, wird aus dem Dividendus A ein anderer, $2a^3 + 2a^2b - abc - b^2c = C$, und hieraus, durch die Multiplication mit 3, die kein Factor von B ist, noch ein anderer $6a^3 + 6a^2b - 3abc - 3b^2c = D$.

3) Nun dividire man D, anstatt A mit B, so erhält man den Quotienten 2, und den Rest $-3abc - 8ab^2 - 3b^2c - 8b^3 = E$.

4) Nun sollte mit dem Reste E der vorige Divisor B dividirt werden, man mache aber vorher folgende Vorbereitung: Durch die Di-

Diviſion mit $-3bc-8b^2$, was kein Factor von B iſt, wird aus dem Diviſor E ein anderer $a+b=F$.

5) Nun dividire man F anſtatt E in die B, ſo erhält man den Quotienten $3a^2+4b^2$, ohne daß ein Reſt bleibe. Daher iſt F der geſuchte gröſte Theiler für A und B.

6) Mit dem gefundnen Theiler F dividire man A und B, ſo wird $\frac{A}{B}=\frac{2a^3-abc}{3a^2+4b^2}$.

§. 187. Anm. 4. Zu weiterer Uebung des §. 186. können folgende Beyſpiele, die auf ähnliche Art zu behandeln ſind, dienen:

1) Es ſey $\frac{A}{B}=\frac{a^3-a^2b+ab^2-b^3}{4a^4-4a^3b-2a^2b^2+2ab^3}$ aufzuheben.

Aus B mit 2a dividirt werde C; C mit A dividirt gebe den Reſt D; aus D mit $3b^2$ dividirt werde $E=-a+b$; E in A dividirt gehe auf, da dann $\frac{A:E}{B:E}=\frac{-a^2-b^2}{4a^3+2ab^2}=\frac{a^2+b^2}{4a^3-2ab^2}$ §. 186.

2) Es ſey $\frac{A}{B}=\frac{nqx^3+3nq^2x^2-2mq^3x-2mq^4}{-4mx^4-mqx^3+2mq^2x^2+3mq^3x}$ aufzuheben.

Aus A mit nq, und aus B mit mx dividirt werde C und D; D mit C dividirt gebe den Reſt E; aus E mit q dividirt werde F; und aus C mit 11 multiplicirt werde G; G mit F dividirt gebe den Reſt H; aus H mit q dividirt werde I, und aus F mit 39 multiplicirt werde K; K mit I dividirt gebe den Reſt L; aus L mit 47.q dividirt werde $M=-x+q$; M in I dividirt gehe auf; da dann $\frac{A:M}{B:M}=\frac{-nqx^2-4mq^2x-2mq^3}{4mx^3+5mqx^2+3mq^2x}$.

§. 188. Anm. 5. Bleibt bey der Diviſion in §. 183. zuletzt ein Reſt, ſo füge man, wie gewöhnlich, dem bereits gefundenen Quotienten einen Bruch bey, der zum Zähler den Reſt, zum Nenner aber den Diviſor hat. So iſt z. E. $(a^3+b^3c^3):(a+b)=a^2-ab+b^2+\frac{c^3}{a+b}$; wo der angehängte Bruch auch durch $c^3.\frac{1}{a+b}=ac^3.\frac{1}{1+\frac{b}{a}}$ ausgedrückt, auch durch fortgeſetzte Diviſion aufgelöſt werden kann, wie folgende Aufgabe lehret.

§. 189. Aufg. Einen Bruch von der Form $\frac{1}{1-x}$ durch fortgesetzte Division aufzulösen.

Auflös. Man verfahre nach den Regeln der Division §. 183.

$$1-x) \; 1 \; \big| \; 1+x+x^2+x^3+\ldots$$
$$1-x$$
$$\text{A. } 0+x$$
$$+x-x^2$$
$$\text{B. } 0+x^2$$
$$+x^2-x^3$$
$$\text{C. } 0+x^3$$

Nämlich man dividire den ersten Theil des Divisors 1 in den Dividendus 1, so ist des Quotienten erstes Glied 1. Das Product dieses Gliedes in den Divisor ist $1-x$, und giebt vom Dividendus subtrahirt den ersten Rest A. Aus diesem erhält man eben so des Quotienten zweytes Glied x, und den zweyten Rest B. Aus diesem kömmt wiederum des Quotienten drittes Glied x^2, und der dritte Rest C. u. s. w.

§. 190. Zus. 1. Ohne diese Division weiter fortzusetzen, sieht man leicht ein, daß der Quotient alle Potenzen von x nach der Reihe ohne Ende enthalten werde, und zwar so, daß (wenn irgend ein Rest positiv ist, und eine Potenz von x enthält, deren Exponent die Zahl des Restes ist) solcher Rest auch diese Potenz von x für das um 1 weiter folgende Glied des Quotienten gebe, und der nächstfolgende Rest von eben der Beschaffenheit sey. Denn es sey der $m$te Rest $+x^m$, und des Quotienten $m+1$tes Glied $+x^m$, so ist dessen Product in den Divisor $+x^m - x^{m+1}$, welcher von dem $m$ten Reste subtrahirt $+x^{m+1}$ zum $m+1$ten Reste giebt, woraus des Quotienten $m+1$tes Glied $+x^{m+1}$ entsteht.

Nun

Nun trifft dieſes beym erſten Reſte ein, welcher x^1 iſt, und für des Quotienten zweytes Glied x^1 giebt; folglich gilt es auch für den zweyten Reſt und des Quotienten drittes Glied u. ſ. w. für alle folgende.

§. 191. Zuſ. 2. Wollte man bey einem Gliede des Quotienten x^m die Diviſion abbrechen, und doch den Quotienten vollſtändig haben, ſo müßte man ihm den Bruch $\frac{x^{m+1}}{1-x}$ beyfügen. Demnach wäre $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2 \ldots + x^m + \frac{x^{m+1}}{1-x}$.

§. 192. Zuſ. 3. Hätte der Bruch dieſe Form $\frac{x}{1+x}$, ſo giebt das Verfahren §. 189. den Quotienten $x-x^2+x^3 \ldots$ wobey eben die Geſetze der Reſte und der Glieder des Quotienten wie §. 190, nur daß die Zeichen in beiden abwechſeln. Iſt nämlich ein gewiſſer Reſt, deſſen Zahl gerade iſt, poſitiv, und eine Potenz von x, welche dieſe Zahl zum Exponenten hat, wie $+x^{2n}$, ſo iſt dieſer Reſt das $2n+1$te oder das um 1 weiter folgende Glied des Quotienten, welches mit dem Diviſor multiplicirt das Product $+x^{2n}+x^{2n+1}$, und den zunächſt folgenden ungeraden Reſt $-x^{2n+1}$ giebt, der das $2n+2$te Glied des Quotienten wird, u. ſ. w. Setzt man daher $n=1$, ſo iſt der 2te Reſt und das 3te Glied $+x^2$, der 3te Reſt und das 4te Glied $-x^3$, der 4te Reſt und das 5te Glied $+x^4$ u. ſ. w. Der Quotient iſt demnach wie §. 192. vollſtändig $1-x+x^2-x^3 \ldots + x^{2n} - \frac{x^{2n+1}}{1+x}$, oder $1-x+x^2-x^3 \ldots - x^{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{1+x}$, je nachdem man entweder eine gerade oder eine ungerade Zahl Glieder des Quotienten haben will.

§. 193. Zuſ. 4. Setzt man $x=1$, ſo iſt $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1+1}$ $=\frac{1}{2}1-1+1-1\ldots+1-\frac{1}{2}$, oder $=1-1+1-1\ldots$ $+-11+\frac{1}{2}$. Im erſten Falle geben alle Paare Null, und das letzte Paar $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, im zweyten geben alle Paare Null, und das letzte Glied $\frac{1}{2}$.

§. 194. Zuſ. 5. Hätte der Bruch dieſe Form $\frac{a}{a+b}=\frac{1}{1+\frac{b}{a}}$ ſo ergiebt ſich der Quotient, wenn man in §. 189. 192. $\frac{b}{a}$ anſtatt x ſetzt. (Auch kann man $\frac{a}{a+b}=a.\frac{1}{a+b}$ ſetzen, und den Bruch $\frac{1}{a+b}$ oder $\frac{1}{b+a}$ wie §. 189, durch fortgeſetzte Diviſion auflöſen); da dann $\frac{a}{a+b}=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\ldots$ und $\frac{1}{b+a}=\frac{1}{b}-\frac{a}{b^2}+\frac{a^2}{b^3}-\frac{a^3}{b^4}+\ldots$.

§. 195. Zuſ. 6. Iſt in §. 194. $a>b$, ſo nehmen die folgenden Glieder in dem erſten Quotienten immer ab, und in dem zweyten immer zu; iſt aber $a<b$, ſo nehmen ſie in dem erſten zu, und in dem zweyten ab. Denn

1) für den erſten Quotienten. Iſt $a>b$, ſo iſt $\frac{a}{a^2}>\frac{b}{a^2}$, d. i. $\frac{1}{a}>\frac{b}{a^2}$, desgleichen $a.\frac{b}{a^3}>b.\frac{b}{a^3}$, d. i. $\frac{b}{a^2}>\frac{b^2}{a^3}$ u. ſ. w.

2) für den zweyten Quotienten. Iſt $b<a$, ſo iſt $\frac{b}{b^2}<\frac{a}{b^2}$ d. i. $\frac{1}{b}<\frac{a}{b^2}$, desgleichen $b.\frac{a}{b^3}<a.\frac{a}{b^3}$ d. i. $\frac{a}{b^2}<\frac{a^2}{b^3}$ u. ſ. w.

§. 196.

§. 196. Erkl. Eine Reihe, series, heißt eine Menge von Größen (den Gliedern der Reihe), deren jede nach einem gewissen allen gemeinschaftlichen Gesetze bestimmt wird. Ein Ausdruck für dies gemeinschaftliche Gesetz heißt das allgemeine Glied der Reihe, terminus generalis.

Z. E. der Quotient §. 189. $x^0+x^1+x^2 \ldots x^m$ ist eine Reihe, deren allgemeines Glied x^m. Hievon ist die Reihe §. 192. nur darin unterschieden, daß die Zeichen abwechseln, also dort das allgemeine Glied $+x^m$, hier $\mp x^m$ ist.

Eben so ist §. 194. $\frac{1}{a+b} = \frac{b^0}{a^1} - \frac{b^1}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} \ldots$ wo das allgemeine Glied $\mp \frac{b^{m-1}}{a^m}$, und $\frac{1}{b+a} = \frac{a^0}{b^1} - \frac{a^1}{b^2} + \frac{a^2}{b^3} \ldots$ wo das allgemeine Glied $+\frac{a^{m-1}}{b^m}$.

§. 197. Zus. 1. Aus dem allgemeinen Gliede läßt sich die Reihe ohne Ende, series indefinita, §. 190. so weit es verlangt wird, bestimmen.

§. 198. Zus. 2. Die Glieder der Reihe nehmen entweder zu oder ab, und geben hiedurch entweder eine steigende Reihe, adscendens, oder fallende, descendens.

Z. E. die Reihe in §. 189. fällt, wenn x ein ächter Bruch ist, und steigt, wenn x kein ächter Bruch ist. Die erste Reihe in §. 195. fällt oder steigt, je nachdem $a>$ oder $<b$ ist; bey der zweyten Reihe aber ist es umgekehrt.

§. 199. Zus. 3. Rechnet man alle Glieder einer Reihe, oder nur eine gewisse Menge von Gliedern zusammen, so heißt das, was herauskömmt, die Summe der Reihe, oder der berechneten Glieder. Die Ergänzung

der Reihe, supplementum, heißt, was zur Summe der ersten Glieder kommen muß, um die Summe der ganzen Reihe zu machen.

Z. E. §. 196. ist zur Summe der $m+1$ ersten Glieder die Ergänzung $\frac{x^{m+1}}{1-x}$, und der sämmtliche Werth, oder die Summe der ganzen Reihe $= \frac{1}{1-x}$.

§. 200. Zus. 4. Bey einer fallenden Reihe wird die Ergänzung desto kleiner, je mehrere erste Glieder man summirt, wodurch man also der Summe der ganzen Reihe, oder dem sämtlichen Werthe der Reihe immer näher und näher kömmt. Dieser Werth heißt die Gränze der Reihe, und die Reihe heißt nähernd, convergens. Eine steigende Reihe, als bey welcher das Gegentheil stattfindet, heißt entfernend, divergens.

Z. E. die erste Reihe in §. 195. ist convergent, wenn $a > b$, und divergent, wenn $a < b$. Das Gegentheil hievon ist bey der zweyten Reihe. Man kann eine davon nach Gefallen erwählen, weil $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{b+a}$.

§. 201. Zus. 5. Eine Reihe nähert oder entfernt sich desto schneller, je größer der Unterschied ihrer Glieder ist.

Z. E. die Reihe §. 189. nähert oder entfernt sich sehr schnell, je nachdem x einen sehr kleinen Bruch oder eine sehr große Zahl bedeutet. Machte man aber $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \ldots$ so würde diese Reihe sich desto schneller nähern, je größer x angenommen wird.

§. 202. Zus. 6. Nähert sich eine Reihe sehr schnell, so sind wenige ihrer ersten Glieder schon hinreichend, den gesammten Werth bis auf eine Kleinigkeit darzustellen.

Z. E.

Z. E. Setzt man §. 195. $a = 100$, und $b = 1$, daß $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{101}$, ſo iſt $\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} = \frac{1}{100} - \frac{1}{10000} = \frac{99}{10000}$

welches von $\frac{1}{101}$ ſehr wenig unterſchieden iſt, wie man findet, wenn man beide Brüche gleichnamig macht, und von einander ſubtrahirt.

§. 203. Anm. Die Lehre von den Reihen und ihren Summen iſt für die ganze Mathematik von großer Wichtigkeit. Verſchiedenes davon wird im Folgenden vorkommen. Hier ſollte blos die Gelegenheit benutzt werden, die erſten Begriffe dieſer Lehre zu entwickeln.

8. Die Rechnung mit Decimal- und Sexageſimalbrüchen.

§. 204. Erkl. Ein Decimalbruch (zehntheiliger Bruch) heißt, deſſen Nenner eine Potenz der Zahl Zehn iſt, z. E. $\frac{7}{10}$, $\frac{6}{100}$, $\frac{3}{1000}$ u. ſ. w. d. i. $\frac{7}{10^1}$, $\frac{6}{10^2}$, $\frac{3}{10^3}$, oder 7.10^{-1}, 6.10^{-2}, 3.10^{-3}, §. 160.

§. 205. Zuſ. 1. Die Decimalbrüche ſtimmen mit den ganzen Decimalzahlen §. 44. darin völlig überein, daß die Ziffern in eine Potenz der Zahl Zehn multiplicirt ſind, nur daß der Exponent ſolcher Potenz bey den ganzen Zahlen poſitiv, bey den Decimalbrüchen aber negativ iſt.

§. 206. Zuſ. 2. Die Einer laſſen ſich anſehen, als wäre ihre Ziffer in 10^0 multiplicirt, §. 158. Bezeichnet man alſo deren Stelle durch ein Comma, ſo können die Ziffern für die Decimalbrüche den Einern zur Rechten in

eben der Ordnung wie die ganzen Decimalzahlen den Einern zur Linken folgen, §. 41. Z. E.

$5674{,}763 = 5.10^3 + 6.10^2 + 7.10^1 + 4.10^0 + 7.10^{-1} + 6.10^{-2} + 3.10^{-3}$.

Wären keine ganze Zahlen vorhanden, so setzet man eine Null vor das Comma, z. E. 0,763.

§. 207. Zuſ. 3. Eine solchergestalt bezeichnete Zahl (wie 5674,763) wird durch eine Potenz der Zahl Zehn multiplicirt oder dividirt, je nachdem man das Comma um soviel Stellen, als der Exponent solcher Potenz Einheiten hat, zur Rechten oder zur Linken fortrückt. Vergl. §. 45.

§. 208. Zuſ. 4. Das allgemeine Gesetz der Decimalziffern, daß von der Rechten gegen die Linke jede folgende Ziffer den zehnfachen Werth der zunächst vorhergehenden hat, §. 38, bleibt bey den Decimalbrüchen daſſelbe, daher man sie ohne weitere Rechnung reduciren, und wie ganze Zahlen numeriren, auch selbst die ganzen Zahlen auf Decimalbrüche bringen kann, z. E. $0{,}763 = \frac{763}{1000}$, und $5{,}763 = \frac{5763}{1000}$ u. s. w.

§. 209. Zuſ. 5. Jede Decimalzahl läßt sich als eine Menge von Einern betrachten, die in eine Potenz der Zahl Zehn multiplicirt ist, deren Exponenten die Stelle der niedrigsten Ziffer einer solchen Zahl anzeigt. Z. E. $38{,}456 = \frac{38456}{1000} = 38456.10^{-3}$.

§. 210. Zuſ. 6. Gemeine Brüche, folglich auch Quotienten, lassen sich durch Decimalbrüche ausdrücken, wenn man dem Zähler oder Dividendus (nachdem man die Stelle der Einer durch das Comma bezeichnet hat), soviel Nullen anhängt, so weit man den Decimalbruch suchen muß. Z. E.

$\frac{1}{2} = \frac{1{,}0}{2} = 0{,}5$; $\frac{3}{4} = \frac{3{,}00}{4} = 0{,}75$; $\frac{73}{8} = \frac{73{,}000}{8} = 9{,}125$;

9,125; aber $\frac{1}{3}$ = 0,333... und $\frac{17}{3}$ = 5,666...; 1 ßgl. = $\frac{1}{24}$ Thlr. = 0,0416666... Thlr.; 1 Pf. = $\frac{1}{288}$ Thlr. = 0,0034722... Thlr.; 1 Monat = $\frac{1}{12}$ Jahr = 0,083... Jahr; 1 Tag = $\frac{1}{365\frac{1}{4}}$ Jahr = 0,00274... Jahr.

§. 211. Zus. 7. Nicht jeder Bruch oder Quotient läßt sich genau in Decimalbrüchen ausdrücken, aber durch beliebige Fortsetzung der Division §. 210. kann man seinen Werth immer genauer und genauer finden.

§. 212. Aufg. Decimalbrüche zu einander zu addiren oder von einander zu subtrahiren.

Auflös. Man beobachtet dieselben Regeln, die für ganze Zahlen §. 51. 52. gegeben worden, weil sich solche auf die Gesetze der Decimalzahlen, die bey Decimalbrüchen dieselben sind, gründen. Z. E.

	754,306	8 + 5,0864 d. i.	8,0000
	0,898		5,0864
Summe	755,204	Summe	13,0864
Differenz	753,408	Differenz	2,9136

§. 213. Aufg. Decimalbrüche mit einander zu multipliciren.

Auflös. Man sehe die Decimalbrüche als ganze Zahlen an, multiplicire sie nach §. 57, und schneide in dem Producte soviel Stellen durch das Comma ab, als in beiden Factoren zusammen abgeschnitten sind. Z. E.

0,764	2,556	4,253
300	0,32	0,0004
229,200	5112	0,0017012
	7668	
	0,81792	

Bew.

Bew. Jeder Factor läßt sich als eine Potenz der Zahl Zehn betrachten, die in die Zahl des Factors multiplicirt ist, §. 209. Es sey daher des einen Factors Zahl M, und Potenz 10^m, des andern Zahl N, und Potenz 10^n, so ist das Product $P = M.N.10^{m+n}$, §. 150. Sind nun die Exponenten m und n bejahend, so ist ihre Summe m+n bejahend, wie §. 46: ist m bejahend, n verneinend, so ist ihre Summe m—n bejahend oder verneinend, je nachdem m oder n größer ist: sind beide verneinend, so ist ihre Summe m+n verneinend, §. 139.

Anm. Zur Erläuterung der Sache dienet, wenn man die Decimalbrüche wie gemeine Brüche ausdrückt. Hienach heißt das zweyte Exempel:

$$\frac{2556}{1000} \cdot \frac{32}{100} = \frac{2556.32}{100000}$$

§. 214. Zus. 1. Aus dem Beweise sieht man, daß sich auch der Werth der einzelnen Producte durch den Werth der einzelnen Factoren nach eben den Gründen bestimmen lasse. Hienach kann das zweyte Exempel auch so berechnet werden, wie beysteht.

2,556	
0,32	
0,7668	
5112	
0,81792	

§. 215. Zus. 2. Will man, sowohl bey ganzen Zahlen als bey Decimalbrüchen, das Product nicht vollständig, sondern nur bis auf eine gewisse Stelle haben, so übergehe man im Multiplicandus alle Ziffern, die ein höheres Product geben, als verlangt wird, nur daß man auf die nächste der wegzulassenden Ziffern mit Rücksicht nehme. Dies heißt eine abgekürzte Multiplication, multiplicatio contracta, und läßt sich durch ein Beyspiel am besten erläutern:

Ver-

Verlangte man nämlich beym zweyten Exempel das Product nur bis in die dritte Stelle, so übergehe man die niedrigste Ziffer 6, weil $3.10^{-1}.6.10^{-3}=3.6.10^{-4}$, zähle aber, wegen $3.6=18$, die 1 zur folgenden Ordnung u. s. w.

2,556
0,32
0,766
51
0,817

Ein Gleiches gilt, wenn die gegebenen Factoren ganze Zahlen wären, und man das Product nur bis in die Tausende verlangte.

§. 216. Aufg. Decimalbrüche mit einander zu dividiren.

Auflös. Man sehe die Decimalbrüche als ganze Zahlen an, und dividire sie nach §. 58. Nun ist die Zahl der durch das Comma abgeschnittnen Stellen im Dividendus entweder gleich oder ungleich. Im ersten Falle bleibt der Quotient, wie er gefunden ist; im zweyten schneide man in ihm soviel Stellen durch das Comma ab, als der Dividendus Ueberschuß hat, oder füge ihm soviel Nullen bey, als der Divisor Ueberschuß hat; z. E.

$$\frac{0,579}{0,003}=193;\quad\frac{0,579}{0,3}=1,93;\quad\frac{0,579}{0,00003}=19300.$$

Beweis. Es sey allgemein der Dividendus $M.10^m$, und der Divisor $N.10^n$, so ist $\frac{M.10^m}{N.10^n}=\frac{M}{N}10^{m-n}$. §. 157.

Sind nun die Exponenten m und n bejahend, so ist ihre Differenz $m-n$, bejahend oder verneinend, je nachdem m oder n größer ist; ist m bejahend, n verneinend, so ist ihre Differenz $m+n$; ist m verneinend, n bejahend, so ist ihre Differenz $-(n+m)$; sind beide verneinend, so ist ihre Differenz $n-m$, bejahend oder verneinend, je nachdem n oder m größer ist, §. 131.

§. 127.

§. 217. Anm. 1) Man kann sich die Sache hier wie bey der Multiplication (§. 213. Anm.) erläutern. 2) Machte man durch Hülfe der Nullen die Zahl der abgeschnittenen Stellen im Dividendus und Divisor gleich, so könnte man beide zu ganzen Zahlen erheben, §. 92, da dann der Quotient eine ganze Zahl würde. 3) Bleibt bey der Division ein Rest, so verfahre man wie §. 210. 3) Mit der abgekürzten Division, divisio contracta, hat es eine ähnliche Bewandniß wie §. 215. Nämlich man nimmt zuerst vom Divisor A nur soviel Ziffern, als der Dividendus B verstattet, und hierauf so wie die Division weiter fortrückt, immer eine weniger, bis keine Ziffer im Divisor mehr vorhanden ist, da dann der Werth des Quotienten C nach obigen bestimmt wird, die letzten Ziffern desselben aber unzuverlässig sind.

A. 23,54253725	C
B. 52864	2245,8
47084	
5780	
4708	
1072	
940	
132	
115	
17	
16	
1	

§. 218 Erkl. Wird ein Ganzes in 60 Theile, und jeder Theil wieder in 60, und so immerfort getheilt, so heißen solche Brüche sechzigtheilige, sexagesimales.

Von dieser Art ist die Eintheilung der Grade des Kreises (so wie auch der Stunden) in Minuten, Secunden, Tercien u. s. w. welches man durch $^{o}\,'\,''\,'''$ u. s. w. anzeigt. Hienach ist $1' = \frac{1}{60}$; $1'' = \frac{1}{60.60}$; $1''' = \frac{1}{60.60.60}$ d. i. $1' = \frac{1}{60} = 60^{-1}$; $1'' = \frac{1}{60^2} = 60^{-2}$; $1''' = \frac{1}{60^3} = 60^{-3}$ u. s. w.

§. 219. Zus. Man könnte auch die Grade, so wie die Stunden, bis zu sechzig zählen, d. i. in Schocke bringen, und so auch Schocke von Schocken u. s. w. machen, wodurch die Rechnung mit 60 der Rechnung mit 10 völlig ähnlich würde, und ähnlichen Regeln unterworfen wäre.

§. 220.

§. 220. Anm. Setzte man in §. 206. anſtatt der Zahl Zehn allgemein x, worunter man ſich jede Zahl gedenken kann, und anſtatt der Ziffern allgemeine Coefficienten a, b, c u. ſ. w. die auch beliebige Zahlen, jedoch noch unter dem Werthe von x bedeuten können, ſo erhielte man eine allgemeine Form unzähliger Zahlenſyſteme, welche ſich durch einen beſtimmten Werth von x beſtimmen. Hienach gäbe z. E. x=2 die Diadik, x=4 die Tetraktik, x=10 die Decadik, oder das Decimalſyſtem, x=12 das Duodecimalſyſtem, x=60 das Sexageſimalſyſtem u. ſ. w. Die Coefficienten aber giengen im erſten Syſteme nur von 0 bis 1, im zweyten bis 3, im dritten bis 9, im vierten bis 11, im fünften bis 59 u. ſ. w.

Die allgemeine Form wäre folgende:

$$\ldots\ldots + dx^3 + cx^2 + bx^1 + ax^0 + bx^{-1} + cx^{-2} \ldots\ldots$$

oder kürzer:

$$\ldots + \overset{3}{d} + \overset{2}{c} + \overset{1}{b} + \overset{0}{a}, + \overset{-1}{b} + \overset{-2}{c} \ldots$$

wo die überſchriebene Zahlen die Exponenten der Potenzen von x ſind, in dieſer Verbindung aber auch Exponenten der Coefficienten a, b, c u. ſ. w. welche die Ordnung (den Rang der Coefficienten anzeigen, heißen können.

Wie dieſe allgemeine Form auf alle Arten der Rechnungen angewandt werden müſſe, kann man aus der im Obigen nach dem Decimalſyſtem durchgeführten Rechnung leicht erſehen.

Der

Der zweyte Abschnitt.

Von den Potenzen und Wurzeln der Zahlen.

1. Grundlehren von den Potenzen.

§. 221. Aufg. Eine gegebene Zahl auf ihre Potenzen zu erheben.

Auflös. Die gegebene Zahl, oder Wurzel, mit sich selbst multiplicirt, giebt das Quadrat, oder die zweyte Potenz, das Quadrat mit der Wurzel den Würfel, cubus, oder die dritte Potenz, der Würfel mit der Wurzel das Biquadrat, oder die vierte Potenz u. s. w. §. 20. Hienach ist $7=7^1$, $7.7=7^2=49$, $7.7^2=7^3=343$, $7.7^3=7^4=2401$.

§. 222. Zus. 1. Umgekehrt ist $7=\sqrt{49}=\sqrt[3]{343}=\sqrt[4]{2401}$, §. 20, und man zieht die Wurzel eines verlangten Grades aus einer gegebenen Zahl, wenn man diese Zahl als eine Potenz desselben Grades ansieht, und eine Zahl sucht, die auf die Potenz dieses Grades erhoben, der gegebenen Zahl gleich wird.

§. 223. Zus. 2. Sind zwey Zahlen einander gleich, so sind ihre Potenzen, oder ihre Wurzeln, von gleichen Exponenten, auch einander gleich.

§. 224. Zus. 3. Die einziffrigen Zahlen auf ihre Potenzen erhoben, geben folgendes Wurzelkäflein.

Wur-

Wurzel	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrat	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubus	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
Biquadrat	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561	10000

§. 225. Zuſ. 4. Sind den Ziffern einer Zahl Nullen angehängt, ſo mache man die Potenz dieſer Zahl als eine Menge von Einern betrachtet, und hänge ihr ein ſo Vielfaches der Nullen an, als der Exponent der Potenz Einheiten hat. Oder allgemein $(a.10^n)^m = a^m.10^{nm}$ §. 151. Z. E. $400^3 = 64000000$.

§. 226. Zuſ. 5. Ein Bruch wird zu einer verlangten Potenz erhoben, wenn man ſeinen Zähler und Nenner zu der verlangten Potenz erhebt. Denn es iſt $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots = \frac{a^n}{b^n}$. Z. E. $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4.4}{5.5} = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25}$.

§. 227. Zuſ. 6. Das Quadrat eines Decimalbruchs von der Ordnung $-n$, iſt von der Ordnung $-2n$; ſein Würfel von der Ordnung $3n$ u. ſ. w. §. 225. 213.

§. 228. Zuſ. 7. Aus einem Bruche wird die Wurzel eines verlangten Grades gezogen, wenn man aus ſeinem Zähler und Nenner die verlangte Wurzel zieht. Denn es iſt allgemein $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; weil $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{a}{b}$ §. 156. 222. Z. E. $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$, weil $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

§. 229. Lehrs. Jede Potenz einer ganzen Zahl ist eine ganze Zahl; und jede Potenz eines eigentlichen Bruchs ist ein eigentlicher Bruch.

Bew. 1) Das Product aus lauter ganzen Zahlen ist offenbar eine ganze Zahl. 2) Das Product aus lauter ächten Brüchen ist kleiner als jeder der Factoren, der schon selbst kleiner als die Einheit ist, und kann also unmöglich eine ganze Zahl seyn. 3) Hat man einen unächten aber eigentlichen Bruch $\frac{a}{m}$ §. 83, wo $m < n$, aber in a nicht aufgeht: so hebe man ihn auf, daß seine Glieder Primzahlen zu einander werden, wenn sie es nicht schon sind. Es sey nämlich $\frac{a:r}{m:r} = \frac{x}{y}$ gemacht §. 95. Wäre nun $\left(\frac{x}{y}\right)^n$ eine ganze Zahl p, d. i. $\frac{x.x.x...}{y.y.y...} = p$, folglich $\frac{x^n}{y} = p.y^{n-1}$ einer ganzen Zahl, so müßte y^n ein Factor von x^n seyn, folglich y entweder in x, oder von seinen Factoren f.g.h... jeder in einem der sich gleichen Factoren von x^n aufgehen, weshalb auch alle Factoren von y, also auch deren Product y^n in x^n aufgiengen; welches alles der Voraussetzung widerspricht. Demnach kann $\left(\frac{x}{y}\right)^n$, folglich auch $\left(\frac{a}{m}\right)^n = \left(\frac{x}{y}\right)^n$, keine ganze Zahl seyn.

§. 230. Zus. 1. Ist die Wurzel aus einer ganzen Zahl zwischen zwey um Eins unterschiedenen ganzen Zahlen N und N + 1 enthalten, d. i. $> N$ und $< N + 1$, so giebt es keinen ächten Bruch f, der zu N gesetzt, solche Wurzel genau angäbe.

§. 231.

§. 231. Zuſ. 2. Dergleichen Wurzeln §. 230. laſſen ſich alſo weder durch ganze Einheiten, noch durch Theile der Einheit genau angeben, und heißen Irrationalzahlen, numeri irrationales, ſurdi, incommenſurabiles. Alle andere Zahlen, worin die Einheit oder irgend ein Theil derſelben genau (d. i. nach einer beſtimmten Zahl) enthalten iſt, heißen rational; dergleichen alle ganze Zahlen, und alle Brüche mit beſtimmten Gliedern ſind.

§. 232. Zuſ. 3. Brüche, wie §. 211, ſind dennoch rational, da ſie ſich zwar nicht durch Decimaltheile, aber doch durch andre Theile der Einheit genau angeben laſſen, indem zu Irrationalzahlen erfordert wird, daß gar kein Theil der Einheit ſie meſſen könne.

2. Die Quadratzahlen und Quadratwurzeln.

§. 233. Lehrſ. Das Quadrat einer zweytheiligen Wurzel enthält das Quadrat beyder Theile, und das doppelte Product aus beiden Theilen.

Bew. Die Wurzel ſey allgemein $A+B$. Wird dieſe mit ſich ſelbſt multiplicirt: ſo erhält man $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

$A + B$	
$A + B$	
$A^2 + AB$	
$+ AB + B^2$	

Anm. Wäre der zweyte Theil verneinend: ſo findet man auf eben die Art $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$, wie man auch finden kann, wenn man in der erſten Form B verneinend ſetzt. Hienach iſt $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$.

§. 234. Zuſ. 1. Sind zwey Wurzeln um Eins unterſchieden, wie n und $n+1$: ſo ſind ihre Quadrate n^2 und n^2+2n+1, folglich deren Unterſchied $2n+1$, die $n+1$te ungerade Zahl, §. 180.

Exempel. Sind die Wurzeln n die natürlichen Zahlen nach der Reihe: so iſt

1) für $n=0$, $n+1=1$, und $2n+1=1$, die erſte ungerade Zahl, der Ueberſchuß von 1^2 über 0.
2) für $n=1$; $n+1=2$, $2n+1=3$, die zweyte ungerade Zahl, der Ueberſchuß von 2^2 über 1^2.
3) für $n=2$; $n+1=3$, und $2n+1=5$, die dritte ungerade Zahl, der Ueberſchuß von 3^2 über 2^2, u. ſ. w.

§. 235. Zuſ. 2. Addirt man daher die erſte ungerade Zahl zur zweyten: ſo hat man 2^2; addirt man dazu die dritte: ſo hat man 3^2 u. ſ. w. Demnach iſt jedes Quadrat die Summe ſo vieler auf einander folgender ungeraden Zahlen, als ſeine Wurzel Einheiten hat. Alle Quadrate alſo nach der Reihe ohne Multiplication zu finden, darf man nur die ungeraden Zahlen nach der Reihe, oder zu jedem Quadrate ſeine doppelte Wurzel nebſt 1 addiren; wonach ſich Quadrattafeln ſowohl verfertigen als prüfen laſſen.

§. 236. Zuſ. 3. Da ſich jedes Quadrat durch n^2 ausdrücken läßt, ſo iſt dieſer Ausdruck das allgemeine Glied für die Reihe der Quadrate §. 196, und beſtimmt das nte Quadrat, wenn 1 das erſte iſt. Das nächſtfolgende $n+1$te Quadrat ergiebt ſich, wenn man in das allgemeine Glied, anſtatt n, $n+1$ ſetzt; daß man alſo mittelſt des allgemeinen Gliedes jede zwey nächſtfolgende Quadrate finden kann, deren Unterſchiede wieder eine Reihe machen, deren allgemeines Glied $2n+1$ iſt §. 234, und das nte Glied in dieſer Reihe der Unterſchiede beſtimmt, wenn man in der Hauptreihe 1 für das erſte Quadrat angenommen hat, indem $n+1$ Glieder in der Hauptreihe n Glieder in der Reihe der Unterſchiede geben, in welcher man wiederum das nächſtfolgende $n+1$te Glied $=2n+3$ aus dem allgemeinen Gliede wie zuvor findet, da dann der Unterſchied dieſer beyden Glieder $=2$ das allgemeine Glied einer Reihe der zweyten Unterſchiede iſt.

Anmerk.

Anmerk. Obiges dient zugleich, den Gebrauch des allgemeinen Glieds zu erläutern, und wird durch folgende Tafel, worin man jede Wurzel für die erste annehmen kann, dargestellt:

Zweyte Unterschiede	Erste Unterschiede	Quadrate	Wurzeln
		+25	−5
	−9	+16	−4
+2	−7	+ 9	−3
+2	−5	+ 4	−2
+2	−3	+ 1	−1
+2	−1	0	0
+2	+1	+ 1	+1
+2	+3	+ 4	+2
+2	+5	+ 9	+3
+2	+7	+16	+4
+2	+9	+25	+5

§. 237. Zus. 4. Bedeutet §. 233. A Zehner, B Einer, daß A + B = p. 10 + q. 1; so ist folgendes klar:

1) A^2 fängt sich in den Hunderten an, $A^2 = p^2$. 100 (d. i. hat daselbst seine niedrigste Ziffer), und 2AB = 2pq. 10 gehet höchstens bis in die Tausende, weil $B^2 = q^2$. 1 das Quadrat einer Ziffer höchstens 2 Ziffern haben kann.

2) 2AB fängt sich in den Zehnern an, und geht, selbst mit A^2 zusammen, höchstens bis in die Tausende; denn, wenn man auch 9 für p und q setzt, so ist 2. 90. 9 = 1620, und $90^2 = 8100$, folglich $A^2 + 2AB = 9720$.

3) B^2 fängt sich in den Einern an, und geht höchstens bis in die Zehner.

5) Auch ist überhaupt obiges Quadrat von p. 10 + q. 1 kleiner als das Quadrat von (p. + 1) 10, weil jede Einheit des Zehners mehr ist, als die größte Ziffer in der Stelle der Einer. Demnach ist selbst $99^2 < 100^2$ d. i. < 10000, daß also das Quadrat der größten zweyziffrigen Zahl aufs höchste sechsziffrig seyn kann.

§. 238. Zuſ. 5. Setzt man allgemein $A+B=p.10^{n}+q.10^{n-1}$, oder bequemer $=p+q$: ſo iſt ihr Quadrat $pp+2pq+qq$, und daher Folgendes klar: A^2 fängt ſich in der Ordnung $2n$ an, und geht höchſtens bis $2n+1$; $2AB$ fängt ſich in der Ordnung $2n-1$ an, und geht, ſelbſt mit A^2 zuſammen, höchſtens bis $2n+1$; B^2 fängt ſich in der Ordnung $2n-2$ an, und geht höchſtens bis $2n-1$. Auch iſt überhaupt das Quadrat von $p.10^{n}+q.10^{n-1}$ kleiner, als das Quadrat von $(p+1)10^{n}$.

§. 239. Zuſ. 6. Für Decimalbrüche iſt $A+B=p.10^{-n}+q.10^{-(n+1)}=p+q$, und hievon das Quadrat $=pp+2pq+qq$, wo wiederum ähnliche Schlüſſe wie §. 238. ſtatt finden.

* §. 240. Aufg. Aus jeder höchſtens vierziffrigen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen.

Erſter Fall.

Wenn die gegebene Zahl 1 oder 2 Ziffern hat.

Auflöſ. 1) In dem Wurzeltäflein §. 224. findet man die Wurzel entweder genau, oder doch zwey nächſte Zahlen, zwiſchen welche ſolche Wurzel fällt, die alsdann eine Irrationalzahl iſt, §. 231. Z. E. $\sqrt{9}$ iſt 3, aber $\sqrt{72}$ fällt zwiſchen 8 und 9, und iſt irrational.

2) Iſt den Ziffern eine gerade Anzahl von Nullen angehängt: ſo ſuche man die Wurzel der Ziffern, und hänge ihr ſoviel Nullen an, als Paare derſelben den Ziffern angehängt ſind, §. 225. Z. E. $\sqrt{90000}$ iſt 300, und $\sqrt{7200}$ fällt zwiſchen 80 und 90. Was letztere ſey, kann erſt im Folgenden gezeigt werden.

3) Für einen Decimalbruch, deſſen Ordnung $-n$ eine gerade Zahl iſt, findet das Aehnliche ſtatt, nach §. 227.

Z. E.

Z. E. $\sqrt{}$ 0,0009 ist 0,03; und $\sqrt{}$ 0,000072 fällt zwischen 0,008 und 0,009.

Zweyter Fall.

Wenn die gegebene Zahl 3 oder 4 Ziffern hat.

Auflös. 1) Man theile die gegebene Zahl 8049 von der Rechten gegen die Linke in Classen, deren jede 2 Ziffern, oder die zur Linken (die höchste) auch nur eine enthält: so muß die Wurzel zwey Theile, Zehner a, und Einer b haben, daß a^2 in der höchsten, b^2 in der niedrigsten Classe, und 2ab in dem Reste mit Zuziehung der ersten Ziffer der niedrigsten stecken. §. 237.

	a b
80	49 | 9
a^2=81	
(3a=18)	5 49
2ab=	5 4
b^2=	9
	0

2) Aus dem Wurzelkästlein nehme man eine Quadratzahl 81, die der höchsten Classe gleich, oder zunächst kleiner ist: so ist deren Wurzel 9 der erste Theil a der gesuchten Wurzel. §. 237.

3) Man subtrahire obige Quadratzahl 81, füge dem Reste 5 die zweyte Classe bey: so ist der gesammte Rest 549 = 2ab + b^2, da dann 2ab in 54 steckt, §. 237, und man aus dieser Zahl b zu suchen hat, indem man sie mit 2a dividirt.

4) Man verdopple also den gefundnen ersten Theil a, da dann 2a=18, in obige Zahl 54 dividirt, einen Quotienten 3 giebt, der nie < b, aber bisweilen > b ist, weil obige Zahl < 2ab seyn kann, §. 237. Man setze vorerst, daß der gefundene Quotient = b sey.

5) Man multiplicire mit diesem b den gebrauchten Divisor 2a, und mache das Quadrat von b, daß 2ab + b^2, oder (2a + b)b = 549.

6) Man subtrahire dieses Product von dem Reste 549 in Auflös. 3. Wäre das Product aber > als solcher Rest:

ſo vermindre man den Quotienten b um eine oder mehrere Einheiten, bis man ein b erhält, welches ein Product giebt, das nicht > als ſolcher Reſt iſt.

7) Iſt nach ſolcher Subtraction nichts übrig geblieben: ſo iſt die gefundne Zahl 93 die genaue Wurzel, folglich ihr Quadrat der gegebenen Zahl 8649 gleich. Wäre aber etwas übrig: ſo iſt die gefundene Zahl zu klein, aber mit 1 vermehrt zu groß.

8) Iſt die gegebene Zahl von der Ordnung $\pm n$, daß n gerade iſt: ſo läßt ſich hierauf, was beym erſten Falle geſagt iſt, leicht anwenden, wenn man damit §. 238. 239. vergleicht. Z. E. $\sqrt{}8649\text{oc}=930$; $\sqrt{}0{,}8649=0{,}93$; $\sqrt{}86{,}49=9{,}3$ u. ſ. w.

§. 241. Lehrſ. Das Quadrat einer vieltheiligen Wurzel enthält die Quadrate aller Glieder der Wurzel, und die doppelten Producte aller erſten Glieder in das jedesmal nachfolgende Glied (des erſten in das zweyte, der beiden erſten in das dritte, der drey erſten in das vierte u. ſ. w.

Beww. Man kann ſich gedenken, daß eine vieltheilige Wurzel entſtehe, wenn zu ihrem erſten Theile ein zweyter, zu dieſen beiden Theilen ein dritter u. ſ. w. hinzukömmt; da dann folgendes klar iſt:

1) kömmt zum erſten Theile a ein zweyter b hinzu: ſo iſt §. 233. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

2) kömmt zu den beyden erſten Theilen $a+b$ ein dritter c hinzu: ſo ſetze man $a+b=A$, und $c=B$, alſo $(a+b+c)^2=(A+B)^2$; da denn $A^2=(a+b)^2$, $2AB=2(a+b)c$; $B^2=c^2$.

3) kömmt zu den 3 erſten Theilen $a+b+c$ ein vierter d hinzu, ſo ſetze man $a+b+c=A$, und $D=B$, alſo $(a+b+c+d)^2=(A+B)^2$; da dann $A^2=(a+b+c)^2$, $2AB=2(a+b+c)d$, $B^2=d^2$.

4) kömmt

4) kömmt zu 4 Theilen der 5te, zu 5 der 6te u. ſ. w. hinzu, ſo ſieht man, wie obige Schlüſſe ohne Ende fortgehen. Demnach hat man $(a+b+c+d\ldots)^2 =$

$$\begin{aligned} &a^2 \\ &+2ab+b^2 \\ &+2(a+b)c+c^2 \\ &+2(a+b+c)d+d^2 \text{ u. ſ. w.} \end{aligned}$$

§. 242. Zuſ. 1. Allgemein wird aus dem Quadrate einer ntheiligen das Quadrat einer $n+1$theiligen Wurzel, wenn man dem Quadrate der vorigen Glieder das doppelte Product aus der Summe der vorigen Glieder in das neue Glied, nebſt dem Quadrate des neuen Gliedes, beyfügt.

§. 243. Zuſ. 2. Sind die Glieder einer vielheiligen Wurzel Ziffern von unmittelbar auf einander folgenden Ordnungen m, $m-1$, $m-2$, $m-3$ u. ſ. w. ſo kann man ſie nach einander in 2 Theile A und B von der Ordnung n und $n-1$ eintheilen; da dann von jedem A^2, $2AB$ und B^2 §. 237 ſtatt findet.

§. 244. Aufg. Aus jeder vielziffrigen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen.

Auflöſ. 1) Man theile die gegebene Zahl wie §. 240, in Claſſen zu zwey Ziffern, wenn auch die höchſte Claſſe nur eine bekömmt.

2) Aus den beyden höchſten Claſſen ziehe man nach §. 240. die beyden erſten Theile der geſuchten Wurzel $a+b$.

	abcd
	41|37|06|24|6432
	36
$(2a=12)$	5 37
	4 96
$(2A=128)$	4106
$2AB+B^2=$	3849
$(2A=1286)=$	25724
$2AB+B^2=$	25724

3) Was übrig bleibt, nehme man zur dritten Classe, welches die Zahl 4106 giebt. Was man gefunden, a+b, ſehe man als den erſten Theil der Wurzel A an, und vividire mit 2A=128 in die Zehner obiger Zahl; da denn der Quotient c den 2ten Theil der geſuchten Wurzel B giebt, und man das Product aus B in 2A nebſt B^2, oder, welches einerley iſt, (2A+B) B von obiger Zahl ſubtrahirt, wie §. 240. num. 4. 5. 6.

4) Was übrig bleibt, nehme man zur 4ten Claſſe, welches die Zahl 25724 giebt. Was man bereits gefunden, a+b+c, ſehe man als den erſten Theil der geſuchten Wurzel A an, verfahre damit, wie zuvor, und wiederhole dieſe Operation für jede folgende Claſſe bis zur letzten; da man denn ſoviel Theile der Wurzel findet, als Claſſen vorhanden ſind.

5) Die hiedurch gefundene Zahl a+b+c+d... iſt die geſuchte Wurzel wie §. 240. num. 7. 8.

6) Giebt bey ſolchen Operationen ein Diviſor zum Quotienten 0: ſo ſehe man ſie als einen Theil der geſuchten Wurzel an, womit man nach obigen Regeln verfährt; da dann ſogleich in die Augen fällt, daß man in ſolchem Falle nur die Null in der geſuchten Wurzel an ihrer Stelle zu bemerken hat, und ſogleich zur folgenden Claſſe ſchreiten kann.

	abc
	36|60|25|60.5
	36
2a=12)	60
$2ab+b^2=$	00
(2A=120)	60 25
$2AB+B^2=$	60 25
	0

Bew. Betrachtet man die geſuchte Wurzel R, als beſtünde ſie aus 2 Theilen, deren erſter Q eine Menge von Zehnern, der zweyte q die Einer bedeutete: ſo enthält nach §. 233. die gegebene Zahl $Q^2+2Qq+q^2$, und man ſoll Q und q finden.

(c 1) Da

1) Da Q Zehner bedeutet: so steckt nach §. 237 Q^2 in den Hunderten, folglich in den Classen, die vor der niedrigsten vorhergehen, d. i. in der Zahl 413706, woraus man also die Wurzel Q zu ziehen hat, ohne auf die niedrigste Classe 24 zu sehen.

2) Da obige Zahl mehr als 2 Ziffern hat: so enthält ihre Wurzel Q, Zehner P und Einer p; da dann P^2 in den Hunderten dieser Zahl, d. i. in 4137 steckt, woraus man also die Wurzel P zu ziehen hat, ohne auf die beiden niedrigsten Classen 0624 zu sehen.

3) Wiederholt man diese Schlüsse: so kömmt man zuletzt auf die beiden höchsten Classen, wie hier 41 37, worin P^2 steckt.

4) Da die beiden höchsten Classen mehr als 3 Ziffern haben: so enthält ihre Wurzel P, Zehner a und Einer b, welche man nach §. 238. 243. richtig findet.

5) Nimmt man zu dem Reste die 3te Classe, und betrachtet das gefundne $P=a+b$, als die Zehner der Wurzel aus den 3 ersten Classen: so hat man noch die Einer c zu finden, so daß $P+c=Q$. Da man nun bereits P^2 subtrahirt hat: so steckt in dem Reste 4106 $2Pc+c^2$, und man findet c nach §. 238. 243.

6) Nimmt man zu dem Reste die vierte Classe, und betrachtet das gefundne $Q=a+b+c$, als die Zehner der Wurzel aus den 4 ersten Classen: so hat man noch die Einer zu finden, so daß $Q+d=R$. Da man nun bereits Q^2 subtrahirt hat, so steckt in dem Reste 25724 $2Qd+d^2$, und man findet d nach §. 238. 243.

7) Man sieht leicht ein, wie sich diese Schlüsse, so lange noch Classen folgen, immer wiederholen lassen, und daß, wenn die letzte Classe an der Reihe gewesen, die gefundne Zahl R die gesuchte Wurzel sey, und zwar entweder

der genau, wenn kein Rest bleibt, oder zunächst kleiner, wofern ein Rest geblieben ist.

§. 245. Zus. 1. Enthält die gegebene Zahl Decimalbrüche: so fange man die Abtheilung in Classen bey der Stelle der Einer an, und füge der Zahl eine Null bey, wenn für die letzte Classe zur Rechten nur eine Ziffer käme. Der Werth der Wurzel wird wie §. 240 bestimmt.

§. 246. Zus. 2. Ist die gegebene Zahl kein vollkommenes Quadrat: so füge man dem jedesmaligen Reste zwey Nullen bey, und setze die Operation, soweit es beliebig ist, fort; wodurch man sich der wahren Wurzel ohne Ende nähern kann. §. 231.

§. 247. Zus. 3. Für die Quadratwurzel aus einem gemeinen Bruche, ziehe man solche aus dem Zähler und Nenner. Ist letzterer kein vollkommenes Quadrat: so multiplicire man damit beyde Glieder des Bruchs. Z. E.

$$\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}; \text{ aber } \sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{5.7}{7.7}} = \frac{\sqrt{5.7}}{7}.$$

Auch kann man einen gemeinen Bruch $\frac{3}{4}$ in einen Decimalbruch 0,75 verwandeln, und hieraus die Wurzel ziehen.

§. 248. Anmerk. Beym Ausziehen der Quadratwurzel kann man sich zur Ersparung oder doch Abkürzung der Arbeit der bereits berechneten Quadrattafeln §. 56. auf folgende Art bedienen:

Nachdem man die gegebene Zahl in Classen getheilt hat, suche man für die höchsten Classen die nächste Quadratzahl der Tafeln 21 62 25, subtrahire sie, setze zum Rest 9 13, die folgende Classe 74, und operire nach dem Vorhergehenden.

21	71	38	74	465
21	62	25		
	9	13	74	

§. 249. Aufg. Aus einem Polynom in Buchstaben die Quadratwurzel zu ziehen.

Erstes Exempel.

$$\sqrt{(25a^2+5b^2+30ab+4b^2)}$$

$$\begin{array}{l|l} & \overset{\alpha}{} \quad \overset{\beta}{} \\ 25a^2+30ab+9b^2 & \mp 5a \mp 3b \\ \alpha^2 = 25a^2 & \\ \hline (2\alpha = \mp 10a) + 30ab + 9b^2 & \\ 2\alpha\beta + \beta^2 = +30ab + 9b^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Auflös. 1) Man ordne das gegebene Polynom nach dem Buchstaben a. §. 167.

2) Aus dem ersten Gliede $25a^2$, ziehe man die Wurzel $\mp 5a$, als den ersten Theil der gesuchten Wurzel α.

3) Man subtrahire α^2, dividire in den Rest mit $2a$, und nehme den Quotienten $\mp 3b$ für den zweyten Theil der gesuchten Wurzel β.

4) Man mache $(2\alpha+\beta)\beta$, und subtrahire dieses Product von dem Reste. Da nun nichts übrig bleibt: so ist das gefundene $\alpha+\beta$ die gesuchte Wurzel, womit man die Probe machen kann.

Zweytes Exempel.

$$\sqrt{(4x^4+16b^4+16b^2ax+4a^2x^2+16b^2x^2+8ax^3)}$$

$$\begin{array}{l|l} & \overset{\alpha}{} \quad \overset{\beta}{} \quad \overset{\gamma}{} \\ 4x^4+8ax^3+4a^2x^2+16b^2x^2+16b^2ax+16b^4 & 2x^2+2ax+4b^2 \\ 4x^4+8ax^3+4a^2x^2 & \\ \hline 2A = 4x^2+4ax) \quad +16b^2x^2+16b^2ax+16b^4 & \\ +16b^2x^2+16ab^2x+16b^4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Auflös. 1) Man ordne das gegebene Polynom nach dem Buchstaben x, und suche die beiden ersten Theile der Wurzel $\alpha+\beta$, wie im ersten Exempel.

2) Nach-

2) Nachdem man $(\alpha+\beta)^2$ subtrahirt hat, ſetze man $\alpha+\beta=A$, dividire in den Reſt mit $2A$, um γ zu finden, und ſubtrahire $2A\gamma+\gamma^2$. Da nun nichts übrig bleibt: ſo iſt $\alpha+\beta+\gamma$ die geſuchte Wurzel.

3) Wäre die Operation noch nicht zu Ende: ſo ſetze man $\alpha+\beta+\gamma=A$, und verfahre wie zuvor, u. ſ. w.

§. 250. Anmerk. Zur Uebung können folgende Exempel dienen:

$\sqrt{.}\ 4a^2-4ab+b^2=\pm 2a\pm b$

$\sqrt{.}\ 9a^2-12ab+6ac+4b^2-4bc+c^2=\pm 3a\pm 2b\pm c$

$\sqrt{.}\ 4a^2-4ba+4ca+b^2-2cb+c^2=\pm 2a\pm b\pm c$

$\sqrt{.}\ 16b^4+16b^2ax+16b^2x^2+4a^2x^2+8ax^3+4x^4=4b^2+2ax+2x^2$

$\sqrt{.}\ c^2-2cb+4ca+b^2-4ba+4a^2=c-8+2a$

$\sqrt{.}\ 81+108x-24x^3+4x^4=9+6x-2x^2-2x^2-6x-9$

$\sqrt{.}\ a^4-2a^3b-a^2b^2+2ab^3+b^4=a^2-ab-b^2-b^2+ab-a^2$

$\sqrt{.}\ a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4=a^2-ab-b^2-a^2+ab+b$

§. 251. Aufg. Aus einem Binom in Buchſtaben $p^2\pm q$, welches kein vollkommenes Quadrat iſt, die Quadratwurzel durch Näherung zu finden.

$$\begin{array}{l|l} p^2\pm q & p\pm\frac{q}{2p}-\frac{q^2}{8p^3}+\frac{q^3}{16p^5}\cdots=A \\ \hline p^2 & \\ \hline 2p)\pm q & \\ \pm q+\frac{q^2}{4p^2} & \\ \hline 2p\pm\frac{q}{p})\frac{q^2}{4p^2} & \\ \frac{q^2}{4p^2}-\frac{q^3}{8p^4}+\frac{q^4}{64p^6} & \\ \hline \mp\frac{q^3}{8p^4}+\frac{q^4}{64p^6} & \end{array}$$

Auflöſ.

Auflöſ. 1) Man nehme die Wurzel des erſten Gliedes p für den erſten Theil der geſuchten Wurzel, und ſubtrahire p^2.

2) In den Reſt $+q$, mit $2p$ dividirt, giebt $\frac{q}{2p}$ für den 2ten Theil der Wurzel, und nach gehöriger Subtraction, den Reſt $-\frac{q^2}{4p^2}$.

3) In dieſen Reſt mit $2\left(p+\frac{q}{2p}\right)=2p+\frac{q}{p}$ dividirt, giebt $-\frac{q^2}{8p^3}$ zum 3ten Theil der Wurzel, und nach gehöriger Subtraction den Reſt $+\frac{q^3}{8p^4}-\frac{q^4}{64p^6}$.

4) In dieſen Reſt mit $2\left(p+\frac{q}{2p}-\frac{q^2}{8p^3}\right)$ dividirt, giebt $+\frac{q^3}{16p^5}$ für den 4ten Theil der Wurzel u. ſ. w.

§. 252. Zuſ. Da jede Zahl, die kein vollkommenes Quadrat iſt, zwiſchen zwey unmittelbar auf einander folgende Quadratzahlen fällt: ſo läßt ſie ſich nach der Formel p^2+q ausdrücken, wenn p^2 das ihr zunächſt kleinere oder größere Quadrat, und p die Zahl bedeutet, die man zu dem kleinern addiren, oder von dem größern ſubtrahiren muß, um gedachte Zahl zu erhalten; da man dann ihre Wurzel ſich durch Hülfe der Reihe A nähern kann. So iſt z. E. $\sqrt{150}=\sqrt{(12^2+6)}=12+\frac{6}{24}-\frac{36}{1728}\ldots$ $=12+\frac{1}{4}-\frac{1}{384}\ldots=12+\frac{95}{384}=12,247395\ldots$ Und eben ſo $\sqrt{1289}=\sqrt{(36^2-7)}=36-\frac{7}{72}-\frac{49}{5184}\ldots$ $=35,902644\ldots$

3. Die

3. Die Cubikzahlen und Cubikwurzeln.

§. 253. Lehrſ. Der Würfel einer zweytheiligen Wurzel enthält den Würfel beider Theile, das 3fache Product aus dem Quadrate des erſten Theils in den zweyten, und das 3fache Product aus dem erſten Theile in das Quadrat des zweyten.

Bew. Multiplicirt man das Quadrat von $A+B$ mit der Wurzel: ſo erhält man $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B)$.

$$\begin{array}{r|l} A^2 + 2AB + B^2 & \\ & A + B \\ \hline A^3 + 2A^2B + AB^2 & \\ + \quad A^2B + 2AB^2 + B^3 & \end{array}$$

Anm. Wäre der zweyte Theil verneinend: ſo findet man auf eben die Art $(A-B)^3 = A - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$, wie man auch finden kann, wenn man in der erſten Form B verneinend ſetzt.

§. 254. Zuſ. 1. Sind zwey Wurzeln um Eins unterſchieden, wie n, und $n+1$; ſo ſind ihre Würfel n^3, und $n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, folglich deren Unterſchied $3n^2 + 3n + 1$.

Setzt man in dieſem allgemeinen Gliede der Reihe erſter Unterſchiede $n+1$ anſtatt n: ſo erhält man das nächſtfolgende $3n^2 + 9n + 7$, und den Unterſchied beider $6n + 6$, als das allgemeine Glied der Reihe zweyter Unterſchiede. Hier in $n+1$, anſtatt n geſetzt, giebt das nächſtfolgende Glied $6n + 12$, und den Unterſchied 6, als das allgemeine Glied der Reihe dritter Unterſchiede.

Vier zunächſt folgende Würfel geben 3 erſte Unterſchiede, dieſe 2 zweyte, und dieſe den dritten, welcher unveränderlich $=6$ iſt. Addirt man daher 6 zu dem unterſten zweyten Unterſchiede: ſo erhält man einen neuen zweyten Unterſchied, der zu dem unterſten erſten addirt, einen neuen erſten Unterſchied giebt. Wird dieſer zu dem unterſten

Würfel

addirt: so erhält man einen neuen Würfel. Dergestalt lassen sich also Cubiktafeln machen, und die vorhandenen prüfen; wie man aus folgender Tafel ersiehet.

Dritte Unterschiede.	Zweyte Unterschiede.	Erste Unterschiede.	Würfel.	Wurzeln.
		7	8	2
	12	19	27	3
6	18	37	64	4
6	24	61	125	5
6	30	91	216	6
6	36	127	343	7
6	42	169	512	8

§. 255. Zus. 2. Setzt man für die Wurzeln die natürlichen Zahlen nach einander: so hat die Reihe zweyter Potenzen zwey Unterschiede, deren letzter beständiger = 2. 1; die Reihe dritter Potenzen drey Unterschiede, deren letzter = 3. 2. 1. Auf eben die Art findet man für die Reihe vierter Potenzen vier Unterschiede, deren letzter = 4. 3. 2. 1; für die Reihe fünfter Potenzen fünf Unterschiede, deren letzter = 5. 4. 3. 2. 1. u. s. w.

§. 256. Zus. 3. Bedeutet §. 253 A Zehner, B Einer, das A + B = p | $A^3 = p^3$. 1000
10 + q. 1; so ist folgendes klar: | $A^2B = 3p^2q$. 100
| $AB^2 = 3pq^2$. 10
| $B^3 = q^3$. 1

1) A^3 fängt sich in den Tausenden an (hat daselbst seine niedrigste Ziffer) und gehet höchstens bis in die Hunderttausende, weil der Würfel einer Zahl mit einer Ziffer höchstens 3 Ziffern haben kann.

2) $3A^2B$ fängt sich in den Hunderten an, und gehet höchstens bis in die Hunderttausende; weil, wenn man auch 9 für p und q setzt, $3 \cdot 90^2 \cdot 9 = 218700$ ist.

3) $3AB^2$ fängt sich in den Zehnern an, und gehet

höchstens bis in die Zehntausende, weil wiederum $3.90.9^2 = 21870$ ist.

4) B^3 fängt sich in den Einern an, und geht höchstens bis in die Tausende, weil q^3 höchstens nur 3 Ziffern haben kann.

5) Auch ist überhaupt obiger Würfel von $p.10+q.1$ kleiner als der Würfel von $(p+1)10$, weil jede Einheit des Zehners mehr ist, als die größte Ziffer in der Stelle der Einer. Demnach ist selbst $99^3 < 100^3$ d. i. < 1000000, daß also der Würfel der größten zweyziffrigen Zahl aufs höchste sechsziffrig seyn kann.

§. 257. Zus. 4. Setzt man allgemein $A+B = p.10^n+q.10^{n-1}$, oder bequemer $= p.10^n+q$: so ist der Würfel $p^{3n}p^{3n-1}p^{3n-2}p + 3p^{3n-1}pq + 3p^{3n-2}qq + q^{3n-3}qq$, und daher Folgendes klar:

A^3 fängt sich in der Ordnung $3n$ an, und geht höchstens bis $3n+2$;

$3A^2B$ fängt sich in der Ordnung $3n-1$ an, und geht höchstens bis $3n+2$;

$3AB^2$ fängt sich in der Ordnung $3n-2$ an, und geht höchstens bis $3n+1$;

B^3 fängt sich in der Ordnung $3n-3$ an, und geht höchstens bis $3n-1$.

Ueberhaupt ist der Würfel von $p.10^n+q.10^{n-1}$ kleiner, als der Würfel von $(p+1)10^n$.

§. 258. Zus. 5. Für Decimalbrüche ist $A+B = p.10^{-(3n+1)}+q.10^{-3n}$, und hievon der Würfel $= p^{-(3n+1)}p^{-(3n+1)}p + 3p^{-(3n+1)}pq + 3p^{-(3n+2)}qq + q^{-(3n+3)}qq$, wo wiederum ähnliche Schlüsse wie §. 257. statt finden.

§. 259. Aufg. Aus jeder höchstens sechszifftigen Zahl die Cubikwurzel zu ziehen.

Erster Fall.

Wenn die gegebene Zahl 1 bis 3ziffrig ist.

Auflös. 1) In dem Wurzeltäflein §. 224. findet man die Wurzel entweder genau, oder doch zwey nächste Zahlen, zwischen welche solche Wurzel fällt, die alsdann eine Irrationalzahl ist, §. 231. Z. E. $\sqrt[3]{8}=2$, und $\sqrt[3]{343}=7$; aber $\sqrt[3]{429}$ fällt zwischen 7 und 8, und ist irrational.

2) Ist den Ziffern eine durch 3 theilbare Anzahl von Nullen angehängt: so suche man die Wurzel der Ziffern, und hänge ihr den dritten Theil jener Nullen an, §. 225. Z. E. $\sqrt[3]{8000000}=200$, und $\sqrt[3]{343000}=70$; aber $\sqrt[3]{429000}$ fällt zwischen 70 und 80. Wie letztere beschaffen sey, wird das Folgende lehren.

3) Für einen Decimalbruch, dessen Ordnung $=n$ eine durch 3 theilbare Zahl ist, findet das Aehnliche statt nach §. 227. Z. E. $\sqrt[3]{0,008}=0,2$; $\sqrt[3]{0,000343}=0,07$; aber $\sqrt[3]{0,000429}$ fällt zwischen 0,07 und 0,08.

Zweyter Fall.

Wenn die gegebene Zahl 4 bis 6ziffrig ist.

Auflös. 1) Man theile die gegebene Zahl 157464 von der Rechten gegen die Linke in Classen, deren jede 3 Ziffern, oder auch die höchste nur 2 oder 1 bekömmt: so muß die Wurzel zwey Theile, Zehner a, und Einer b haben, daß a^3 in der höchsten, b^3 in der nie-

	a b.
157 | 464	54.
$a^3=125$	
$(3a^2=75)\ 32\ 464$	
$3a^2b=3000$	
$3ab^2=\ 2400$	
$b^3=\ 64$	
0	

dritten Classe, $3a^2b$ in dem Reste mit Zuziehung der ersten, $3ab^2$ mit Zuziehung der zweyten Ziffer der niedrigsten stecke. §. 256.

2) Man nehme aus dem Würzeltäflein §. 224. eine Cubikzahl 125, die so groß oder zunächst kleiner ist, als die höchste Classe, und bemerke ihre Wurzel 5, als den ersten Theil a der gesuchten Wurzel.

3) Man subtrahire obige Cubikzahl $a^3=125$, von der gegebenen Zahl, oder, welches einerley ist, man subtrahire a^3 von der höchsten Classe, und nehme den Rest 32 zu der zweyten Classe 464, daß also der gesamte Rest $32464=3a^2b+3ab^2+b^3$ ist; da dann $3a^2b$ in 324 steckt, §. 256, und man aus dieser Zahl b zu suchen hat, indem man sie mit $3a^2$ dividirt.

4) Man mache also das 3fache Quadrat des gefundenen $a(3a^2=75)$, dividire damit in die Hunderte des Restes 324, und bemerke den Quotienten 4, als den zweyten Theil der gesuchten Wurzel b.

5) Man setze das Product aus dem gefundnen zweyten Theile in den gebrauchten Divisor ($3a^2b=300$) unter die Hunderte des Restes; das dreyfache Product aus dem Quadrat des 2ten in dem ersten Theil ($3ab^2=240$) unter die Zehner des Rests; den Würfel des 2ten Theils ($b^3=64$) unter die Einer des Rests, und subtrahire vom Reste die Summe dieser 3 Zahlen 32464.

6) Würde diese Summe größer als der Rest gefunden: so müßte man das gefundene b immer um eine Einheit so lange vermindern, als es erforderlich ist.

7) Bleibt

7) Bleibt nach der Subtraction kein Rest: so ist das gefundne $a+b=50+4$ die genaue Cubikwurzel der gegebnen Zahl. Bliebe aber ein Rest: so ist solche Wurzel größer als die gefundene, und kleiner als die mit 1 vermehrte Zahl.

8) Ist kein Rest geblieben: so muß $(a+b)^3$ der gegebenen Zahl gleich seyn. Ist aber ein Rest geblieben: so muß $(a+b)^3+$ dem Reste, der gegebenen Zahl, oder $(a+b)^3$, der gegebenen Zahl weniger dem Reste, gleich seyn.

9) Ist die gegebene Zahl von der Ordnung $\pm n$, daß n durch 3 theilbar ist: so läßt sich hierauf, was beym ersten Falle gesagt ist, leicht anwenden, wenn man damit §. 257. 258. vergleicht. Z. E. $\sqrt[3]{157464000}=540$; $\sqrt[3]{0,157464}=0,54$; $\sqrt[3]{157,464}=5,4$ u. s. w.

§. 260. Lehrs. Der Würfel einer vieltheiligen Wurzel enthält den Würfel eines jeden Gliedes; das 3fache Product aus dem Quadrate aller ersten Glieder in das jedesmal nächstfolgende, und das 3fache Product aus allen ersten Gliedern in das Quadrat des jedesmal nächstfolgenden.

Bew. Denke man sich, daß die vieltheilige Wurzel entsteht, wenn zu den vorigen Theilen immer ein neuer hinzukömmt; so ist folgendes klar:

1) kömmt zum ersten Theile a, ein zweyter b hinzu: so ist §. 256. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

2) kömmt zu den beyden ersten Theilen $a+b$, ein dritter c hinzu: so setze man $a+b=A$, und $c=B$, also $(a+b+c)^3=(A+B)^3$; da denn $A^3=(a+b)^3$, $3A^2B=3(a+b)^2.c$; $3AB^2=3(a+b)c^2$; $B^3=c^3$.

3) kömmt zu den 3 erſten Theilen ein 4ter d hinzu, ſo ſetze man $a+b+c=A$, und $d=B$, alſo $(a+b+c+d)^3 = (A+B)^3$; da dann $A^3 = (a+b+c)^3$; $3A^2B = 3(a+b+c)^2.d$; $3AB^2 = 3(a+b+c)d^2$; $B^3 = d^3$.

4) kömmt zu 4 Theilen der 5te, zu 5 der 6te u. ſ. w. hinzu, ſo ſieht man, wie obige Schlüſſe ohne Ende fortgehen. Demnach hat man $(a+b+c+d\ldots)^3 =$

$$a^3$$
$$+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$$
$$+3(a+b+c)^2.d+3(a+b+c)d^2+d^3 \text{ u. ſ. w.}$$

§. 261. Zuſ. 1. Allgemein wird aus dem Würfel einer ntheiligen, der Würfel einer $n+1$theiligen Wurzel, wenn man dem Würfel der vorigen Glieder das dreyfache Product aus dem Quadrate der vorigen Glieder in das neue, ferner das 3fache Product aus den vorigen Gliedern in das Quadrat des neuen, endlich den Würfel des neuen Gliedes, beyfügt.

§. 262. Zuſ. 2. Sind die Glieder einer vieltheiligen Wurzel Ziffern von unmittelbar auf einander folgenden Ordnungen m, $m-1$, $m-2$, $m-3$ u. ſ. w. ſo kann man ſie nach einander in 2 Theile A und B von der Ordnung n und $n-1$ eintheilen; da denn die Regel §. 257 ſtatt findet.

§. 263. Aufg. Aus jeder vielziffrigen Zahl die Cubikwurzel zu ziehen.

abcd

abcd

75|955|677|875|4235

64

$(3a^2=48)$ 11 955

9 6

48

8

$(3A^2=5292)$ 1 867 677

$3A^2B=$ 1 587 6

$3AB^2=$ 11 34

$B^3=$ 27

$(3A^2=536787)$ 268 719 875

$3A^2B=$ 268 393 5

$3AB^2=$ 317 25

$B^3=$ 125

0

Auflöſ. 1) Man theile die gegebene Zahl wie §. 259. in Claſſen zu 3 Ziffern, wenn auch die höchſte Claſſe nur 2 oder 1 bekommt.

2) Aus den beyden höchſten Claſſen ziehe man nach §. 259. die beyden erſten Theile der geſuchten Wurzel $a+b$.

3) Was übrig bleibt, nehme man zur dritten Claſſe, welches die Zahl 1867677 giebt. Was man gefunden, $a+b$, ſehe man als den erſten Theil der Wurzel A an, und dividire mit $3A^2=5292$ in die Hunderte obiger Zahl; da denn der Quotient c den 2ten Theil der geſuchten Wurzel B giebt, und man $3A^2B+3AB^2+B^3$ von obiger Zahl ſubtrahirt, wie §. 259. num. 4. 5. 6.

4) Was übrig bleibt, nehme man zur 4ten Claſſe, welches die Zahl 268710875 giebt. Was man bereits gefunden, $a+b+c$, ſehe man als den erſten Theil der geſuchten

ſuchten Wurzel A an, verfahre damit, wie zuvor, und wiederhole dieſe Operation für jede folgende Claſſe bis zum letzten; da man denn ſoviel Theile der Wurzel findet, als Claſſen vorhanden ſind.

5) Die hiedurch gefundene Zahl $a+b+c+d\ldots$ iſt die geſuchte Wurzel wie §. 239. num. 7. 8.

6) Giebt bey der Operation ein Diviſor o zum Quotienten: ſo gilt auch hier, was bey der Quadratwurzel §. 244. Aufl. 6. geſagt iſt.

Bew. Denkt man ſich, daß die geſuchte Wurzel R aus 2 Theilen beſtünde, deren erſter Q eine Menge von Zehnern, der andere q die Einer bedeutete: ſo enthält nach §. 253 die gegebene Zahl $Q^3+3Q^2q+3Qq^2+q^3$, und man ſoll Q und q finden.

1) Da Q Zehner bedeutet: ſo ſteckt nach §. 256 Q^3 in den Tauſenden, folglich in den Claſſen, die vor der niedrigſten vorhergehen, d. i. in der Zahl 75955677, woraus man alſo die Wurzel Q zu ziehen hat, ohne auf die niedrigſte Claſſe 875 zu ſehen.

2) Da obige Zahl mehr als 3 Ziffern hat: ſo enthält ihre Wurzel Q, Zehner P und Einer p; da dann P^3 in den Tauſenden dieſer Zahl, d. i. in 75 955, woraus man alſo die Wurzel P zu ziehen hat, ohne auf die beiden niedrigſten Claſſen 677 875 zu ſehen.

3) Wiederholt man dieſe Schlüſſe: ſo kömmt man zuletzt auf die beiden höchſten Claſſen, wie hier 75 955; worin P^3 ſteckt.

4) Da die beiden höchſten Claſſen mehr als 3 Ziffern haben: ſo enthält ihre Wurzel P^3, Zehner a und Einer b, welche man nach §. 259. richtig findet.

5) Nimmt man zu dem Reſte die 3te Claſſe, und bereichert das gefundene $P=a+b$, als die Zehner der Wurzel

aus

aus den 3 erſten Claſſen: ſo hat man noch die Einer c zu finden, ſo daß $P+c=Q$. Da man nun bereits P^3 ſubtrahirt hat: ſo ſteckt in dem Reſte 867677 $3P^2c+3Pc^2+c^3$, und man findet c. §. 259.

6) Auf eben die Art findet man d durch die Diviſion mit $3Q^2$, und, wenn noch mehrere Claſſen vorhanden, auch die übrigen Theile der geſuchten Wurzel R.

§. 264. Zuſ. 1. Enthält die gegebene Zahl Decimalbrüche: ſo fange man die Abtheilung bey der Stelle der Einer an, und füge der Zahl eine oder zwey Nullen bey, wenn für die letzte Claſſe zur Rechten nur eine oder zwey Ziffern kämen. Der Werth der Wurzel wird wie §. 259 beſtimmt.

§. 265. Zuſ. 2. Iſt die gegebene Zahl kein vollkommener Würfel: ſo füge man dem jedesmaligen Reſte drey Nullen bey, und ſetze die Operation, ſoweit es beliebig iſt, fort; wodurch man ſich der wahren Wurzel ohne Ende nähern kann. §. 231.

§. 266. Zuſ. 3. Für die Cubikwurzel aus einem gemeinen Bruche, ziehe man ſolche aus dem Zähler und Nenner. Iſt letzterer kein vollkommener Würfel: ſo multiplicire man mit ſeinem Quadrate beyde Glieder des Bruchs.

Z. E. $\sqrt[3]{\frac{125}{343}}=\frac{5}{7}$; aber $\sqrt[3]{\frac{5}{8}}=\sqrt[3]{\frac{5.8^2}{8.8^2}}=\frac{\sqrt[3]{5.8^2}}{8}$.

§. 267. Anmerk. Beym Ausziehen der Cubikwurzel kann man die Cubiktafeln zu Hülfe nehmen; auf ähnliche Art wie §. 248.

§. 268. Aufg. Aus einem Polynom in Buchſtaben die Cubikwurzel zu ziehen.

Erstes Exempel.

$$\begin{array}{r|l} 27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3 & \alpha \quad \beta \\ \alpha^3 = 27a^3 & 3a - 2b \\ \hline (3\alpha^2 = 27a^2) - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^2 & \\ 3\alpha^2\beta = -54a^2b & \\ 3\alpha\beta^2 \quad -\beta^3 = +36ab^2 - 8b^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Auflös. 1) Man ordne das gegebene Polynom nach dem Buchstaben a. §. 167.

2) Aus dem ersten Gliede $27a^3$, ziehe man die Wurzel $3a$, als den ersten Theil der gesuchten Wurzel α.

3) Man subtrahire α^3, dividire in den Rest mit $3\alpha^2 = 27a^2$, und nehme den Quotienten $-2b$ für den zweyten Theil der gesuchten Wurzel β.

4) Man mache $3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$, und subtrahire solches von dem Reste. Da nun nichts übrig bleibt: so ist $a+\beta$ die gesuchte Wurzel, womit man die Probe machen kann.

Zweytes Exempel.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{(M+N)} = 2a - 3b + c & \alpha \quad \beta \quad \gamma \\ M = 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 & \\ (\alpha+\beta)^3 = 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 & 2a - 3b \\ \hline 0 & \\ \hline (3A^2 = 12a^2 - 36ab + 27b^2) & \\ N = +12a^2c - 36abc + 27b^2c + 6ac^2 - 9bc^2 + c^3 & \\ 3A^2\gamma = +12a^2c - 36abc + 27b^2c & \\ 3A\gamma^2 + \gamma^3 = \quad +6ac^2 - 9bc^2 + c^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Auflös.

Auflöſ. 1) Man ſuche die beiden erſten Theile der Wurzel $\alpha+\beta$, wie im erſten Exempel.

2) Nachdem man $(\alpha+\beta)^3$ ſubtrahirt hat, ſetze man $\alpha+\beta=A$, dividire in den Reſt N mit $3A^2$, um γ zu finden, und ſubtrahire $3A^2\gamma+3A\gamma^2+\gamma^3$. Da nun nichts übrig bleibt: ſo iſt $\alpha+\beta+\gamma$ die geſuchte Wurzel.

3) Wäre die Operation noch nicht zu Ende: ſo ſetze man $\alpha+\beta+\gamma=A$, und verfahre wie zuvor u. ſ. w.

§. 269. Aufg. Aus einem Binom in Buchſtaben p^3+q, welches kein vollkommener Cubus iſt, die Cubikwurzel durch Näherung zu finden.

$$\begin{array}{l|l} & \alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta \\ p^3+q & p+\frac{q}{3p^2}-\frac{q^2}{9p^5}+\frac{5q^3}{81p^8}\cdots=A \\ \alpha^3=p^3 & \\ \hline (3\alpha^2)\ +q & \\ 3\alpha^2\beta=\ +q & \end{array}$$

$$3\alpha\beta^2+\beta^3=+\frac{q^2}{3p^3}+\frac{q^3}{27p^6}$$

$$(3(\alpha+\beta)^2)\ \frac{q^2}{3p^3}-\frac{q^3}{27p^6}$$

$$3(\alpha+\beta)^2\gamma=\frac{q^2}{3p^3}-\frac{2q^3}{9p^6}+\frac{q^4}{27p^9}$$

$$3(\alpha+\beta)\gamma^2+\gamma^3=+\frac{q^4}{27p^9}+\frac{q^5}{81p^{12}}-\frac{q^6}{729p^{15}}$$

$$(3(\alpha+\beta+\gamma)^2)\ +\frac{5q^3}{27p^6}-\frac{q^5}{81p^{12}}+\frac{q^6}{729p^{15}}$$

Auflöſ.

Auflöſ. 1) Man nehme die Wurzel des erſten Gliedes für den erſten Theil der geſuchten Wurzel α, und ſubtrahire α^3.

2) In den Reſt $+q$, mit $3\alpha^2$ dividirt, giebt den 2ten Theil der Wurzel β; da man dann $3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ von dem Reſte abzieht, und einen zweyten Reſt erhält.

3) In dieſen mit $3(\alpha+\beta)^2$ dividirt, giebt den 2ten Theil der Wurzel γ; da man dann $3(\alpha+\beta)^2\gamma+3(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^3$ von dem 2ten Reſte abzieht, und einen 3ten Reſt erhält.

4) In dieſen mit $3(\alpha+\beta+\gamma)^2$ dividirt, giebt δ u. ſ. w.

§. 270. Zuſ. Iſt eine gegebene Zahl kein vollkommener Würfel: ſo läßt ſie ſich durch p^3+q nach Aehnlichkeit des §. 252. ausdrücken und behandeln. Zwar iſt dort p^2 ſtets poſitiv, hier aber kann p^3 ſowohl poſitiv als negativ ſeyn.

§. 271. Anmerkung. Die Ausziehung der Wurzeln von höhern Graden beruhet auf ähnlichen Regeln, die auch eben ſo aus der Zuſammenſetzung ihrer Potenzen ſich herleiten laſſen, wozu auch das Wurzeltäfleiu in §. 224. erweitert werden kann. Indeß ſind vorerſt die Wurzeln von höhern Graden noch unnöthig; auch wird in der Folge eine allgemeine Form für die Potenzen aller Grade entwickelt werden. Siehe binomiſcher Lehrſatz.

4. Die Rechnung mit Wurzelgrößen.

§. 272. Lehrſ. Jede Potenz der Zahl 2 iſt gröſſer, als ihr Exponent.

Beyw. Geſetzt es ſey $n>1$, und $2^n>n$: ſo folgt aus dem erſten, daß $2n>n+1$, und aus dem zweyten, daß $2.2^n>2n$ d. i. $2^{n+1}>2n$, folglich noch vielmehr $2^{n+1}>n+1$. Iſt alſo der Satz von der nten Potenz der Zahl 2 wahr: ſo iſt er es auch von der $n+1$ten, oder der zunächſt folgenden Potenz. Nun iſt offenbar $2^1>1$, und $2^2>2$, alſo der

Satz

Satz von der ersten und 2ten Potenz der Zahl 2 wahr, daher ist er es auch von der 3ten, und daher auch von der 4ten und so weiter von allen folgenden Potenzen der Zahl 2, und ist also allgemein.

§. 273. Lehrs. Wird eine Größe A halbirt, und ihre Hälfte wieder halbirt, und immer so fort: so läßt sich durch eine gewisse Anzahl fortgesetzter Halbirungen eine Größe finden, die kleiner ist, als jede beliebig angenommene Größe C derselben Art, quavis data minor.

Bew. Da A und C von einerley Art sind: so giebt es eine ganze Zahl m, wodurch zunächst $A < mC$ wird, daß folglich auch $\frac{A}{2^m} < \frac{mC}{2^m}$ ist. Nun ist §. 272. $m < 2^m$, also $\frac{m}{2^m}$ ein ächter Bruch, und daher $\frac{m}{2^m}C < C$. folglich ist noch vielmehr $\frac{A}{2^m} < C$, d. i. man erhält durch m Halbirungen gewiß einen Theil von A, der $< C$ ist.

Anmerk. Oft kömmt man durch viel weniger Halbirungen auf einen solchen Theil von A; aber darum ist es hier nicht zu thun, sondern blos, um die allgemeine Möglichkeit der Sache zu zeigen.

§. 274. Zus. 1. Von dem Bruche $\frac{1}{2}$ läßt sich eine bestimmte Potenz finden, die kleiner, als jeder beliebig angegebene Bruch ist, indem jede folgende Potenz von $\frac{1}{2}$ immer die Hälfte der zunächst vorhergehenden ist, folglich dadurch $\frac{1}{2}$ beständig weiter fort halbirt wird.

§. 275. Zus. 2. Was von Halbirungen gesagt ist, gilt noch vielmehr von der Theilung durch jede Zahl, die > 2 ist. Daher gilt §. 274. von jedem ächten Bruche, welcher die Einheit zum Zähler hat, also auch von $\frac{1}{10}$ u. s. w.

§. 276. Erklär. Eine Größe nähert sich ohne Ende einem gewissen Werthe (ihrer Gränze), wenn ihr Unterschied

terschied von diesem Werthe kleiner, als jede angegebene Größe, werden kann.

§. 277. Zus. 1. Man kann alsdann eine solche Größe ihrer Gränze gleichsetzen, weil Größen, zwischen denen sich kein Unterschied angeben läßt, ohne Zweifel gleich seyn müssen. Denn sonst müßte man sagen, daß sie um eine gegebene Größe d unterschieden wären, daß folglich ihr Unterschied nicht kleiner, als d werden könne; gegen die Voraussetzung.

§. 278. Zus. 2. Da sich die Reihen §. 196. ohne Ende fortsetzen lassen, daß das Supplement kleiner als jede angegebene Größe werden kann, §. 275: so nähern sie sich ohne Ende dem Werthe der Brüche $\frac{1}{1-x}$ und $\frac{1}{a+b}$ als ihren Gränzen, §. 276, und man kann sie diesen Werthen gleichsetzen, §. 277.

§. 279. Zus. 3. Eben dieses gilt von den Irrationalzahlen §. 231, die sich zwar nie völlig genau, aber doch so genau angeben lassen, daß das noch Fehlende kleiner wird, als jede gegebene Zahl, quovis dato minus, §. 275. Man kann nämlich durch die Näherung die gesuchte Wurzel allemal zwischen zwey Rationalzahlen einschränken, die einander so nahe kommen können, als man will, ja so nahe, daß sich kein Unterschied angeben läßt.

§. 280. Zus. 4. In der Ausübung kann man zu jedem Gebrauche bey einem Paare dieser Gränzen stehen bleiben, und die eine statt der andern, oder statt der dazwischen liegenden Größe, ohne merklichen Fehler setzen. Für die Theorie aber gilt dies nur in so fern, als sich diese Gränzen ohne Ende einander noch immer weiter nähern können, daß der Unterschied sich nicht angeben läßt. Denn jede Irrationalzahl x besteht aus zwey Theilen, wovon

der

der erste a rational, der andre b irrational ist, und nie in völliger Schärfe angegeben werden kann; und a läßt sich nach Gefallen so vergrößern, daß es einen immer mehr beträchtlichen Theil von x ausmacht, gegen welchen b immer kleiner und kleiner wird, ja kleiner als jedes, was sich angeben läßt.

§. 281. Zus. 5. Die Sätze, die im Vorhergehenden von Rationalzahlen bewiesen worden, müssen auch von Irrationalzahlen (in so fern sich ihre Näherung ohne Ende weiter treiben, d. i. ihr irrationaler Theil b ohne Ende verkleinern läßt) gelten, und sind also allgemein. Denn nähme man das Gegentheil an, so müßte man irgend einmal auf einen rationalen Theil a kommen, wovon dies nicht gälte, was von Rationalzahlen bewiesen worden; welches unmöglich ist.

§. 282. Anmerk. Die Aehnlichkeit der Irrationalzahlen mit den Brüchen §. 218, die dennoch Rationalzahlen sind, §. 232, fällt sogleich in die Augen.

§. 283. Erkl. Ein Ausdruck $\sqrt[n]{a}$, welcher anzeigt, daß aus einer beliebigen Größe a die Wurzel eines beliebigen Grades gezogen werden solle, heißt eine Wurzelgröße.

§. 284. Anmerk. 1. Die Größe unter dem Wurzelzeichen a kann selbst eine Potenz von beliebigen Exponenten, und die Wurzelgröße $\sqrt[n]{a}$ eine Irrationalzahl seyn; daher man die Rechnung mit dergleichen Größen die Rechnung mit Wurzelgrößen, oder mit Irrationalgrößen, nennt.

§. 285. Anm. 2. Algebraisch irrational heißt jede allgemein ausgedrückte Wurzelgröße, die sich nicht von ihrem Wurzelzeichen, oder dem gebrochenen Exponenten befreyen läßt. So heißt z. E. $\sqrt[m]{a^n}$ oder $a^{\frac{n}{m}}$ algebraisch irrational, wobey es freylich auf den bestimmten Werth der Buchstaben ankömmt, ob sie auch wirklich und in arithmetischem Verstande irrational sey, oder nicht. Auf eben die Art ist a, oder $\sqrt[n]{a^n}$ algebraisch rational,

tional, und wird arithmetisch irrational, wenn z. E. $a=\sqrt{2}$ gesetzt wird.

§. 286. Aufg. Wurzelgrößen gleichnahmig zu machen, oder unter einerley Benennung zu bringen, das ist, für die gegebenen Wurzelgrößen von verschiedenen Exponenten andere ihnen gleiche Ausdrücke von einerley Wurzelexponenten zu finden.

Auflös. Die Exponenten jeder der beyden Wurzelgrößen multiplicire man mit dem Wurzelexponenten der andern. Z. E. aus $\sqrt[p]{a^m}$ und $\sqrt[q]{c^n}$, wird hienach $\sqrt[pq]{a^{mq}}$ und $\sqrt[pq]{c^{np}}$.

Bew. Es ist $\sqrt[p]{a^m}=a^{\frac{m}{p}}$ und $\sqrt[q]{c^n}=c^{\frac{n}{q}}$ §. 152. Bringt man die Bruchexponenten unter einerley Benennung: so ist $a^{\frac{m}{p}}=a^{\frac{mq}{pq}}=\sqrt[pq]{a^{mq}}$, und $c^{\frac{n}{q}}=c^{\frac{np}{pq}}=\sqrt[pq]{c^{np}}$, z. E. aus $\sqrt{5}$ und $\sqrt[3]{4}$, wird $\sqrt[6]{5^3}$ und $\sqrt[6]{4^2}$; aus $\sqrt[3]{9}$ und $\sqrt{7}$, wird $\sqrt[6]{9^2}$ und $\sqrt[6]{7^3}$.

§. 287. Zus. 1. Sind mehr als zwey Wurzelgrößen gegeben: so multiplicire man die Exponenten einer jeden mit dem Producte aus den Wurzelexponenten der übrigen.

§. 288. Zus. 2. Eine Wurzelgröße behält ihren Werth unverändert, wenn man ihre Exponenten mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt. So ist z. E. $\sqrt[3]{a^4}=\sqrt[6]{a^8}$, und $\sqrt[4]{a^2}=\sqrt{a}$.

§. 289. Aufg. Wurzelgrößen mit einander zu multipliciren, oder zu dividiren.

Auflös. 1) Haben die Wurzeln einerley Exponenten: so multiplicire oder dividire man blos die Größen unter dem Wur-

Wurzelzeichen. Hienach ist $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{ac}$, oder $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{\frac{a}{c}}$.

Bew. Da $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$, und $\sqrt[n]{c}=c^{\frac{1}{n}}$ §. 152, desgleichen $a^{\frac{1}{n}}.c^{\frac{1}{n}}=(ac)^{\frac{1}{n}}$, und $a^{\frac{1}{n}}:c^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{n}}$, §. 154, so ist $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{ac}$, und $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{\frac{a}{c}}$.

Z.E. $\sqrt{5}.\sqrt{3}=\sqrt{15}$, und $\sqrt[3]{12}:\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{12:4}=\sqrt[3]{3}$. Eben so ist auch $b\sqrt{a}.d\sqrt{c}=bd\sqrt{ac}$ und $\frac{bg\sqrt{a}}{dg\sqrt{c}}=\frac{b}{d}\sqrt{\frac{a}{c}}$.

2) Haben die Wurzeln verschiedene Exponenten, so mache man sie gleichnamig, §. 286, da dann der erste Fall eintritt.

Hienach ist $\sqrt[p]{a}.\sqrt[q]{c}=\sqrt[pq]{a^q}\sqrt[pq]{c^p}=\sqrt[pq]{a^q.c^p}$. Z.E. $\sqrt{5}.\sqrt[3]{4}=\sqrt[6]{5^3}.\sqrt[6]{4^2}=\sqrt[6]{5^3.4^2}=\sqrt[6]{2000}$, und $\sqrt{9}:\sqrt[3]{4}=\sqrt[6]{1\frac{25}{16}}$, desgleichen $\frac{\sqrt{7}}{3}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{9}}=\sqrt{\frac{7}{9}}$.

§. 290. Aufg. Eine Wurzelgröße in eine Potenz zu erheben, oder aus derselben eine Wurzel zu ziehen.

Auflös. Mit dem gegebenen Exponenten multiplicire man im ersten Falle den Exponenten der Größe unter dem Wurzelzeichen, im zweyten den Exponenten der Wurzel. Hienach ist $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$, und $\sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{a}\right)}=\sqrt[mn]{a}$.

Beyw. 1) $(\sqrt[n]{a})^2 = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^2}$, und $(\sqrt[n]{a})^3 = (\sqrt[n]{\ })^2 \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^3}$, §. 289. oder allgemein $(\sqrt[n]{a})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}}$, §. 151, $= \sqrt[n]{a^m}$.

Z. E. $(\sqrt{6})^3 = \sqrt{6^3} = \sqrt{216}$.

2) $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = a^{\frac{1}{mn}} = a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[nm]{a}$, §. 152, daher auch $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})}$. Z. E. $\sqrt[3]{(\sqrt{216})} = \sqrt[2.3]{216} = \sqrt[2]{(\sqrt[3]{216})}$.

§. 291. Zus. 1. Läßt sich die Größe unter dem Wurzelzeichen in zwey Factoren zerlegen, wovon der eine eine Potenz ist, die mit dem Wurzelzeichen einerley Exponenten hat, so kann man die Wurzelgröße einfacher ausdrücken, ad simpliciorem expressionem reducere, wenn man die Wurzel aus solchem Factor zieht. Hienach ist $\sqrt[m]{a^m b} = \sqrt[m]{a^m} \cdot \sqrt[m]{b} = a\sqrt[m]{b}$. Z. E. $\sqrt{63} = \sqrt{9.7} = 3\sqrt{7}$; $\sqrt[3]{2560} = \sqrt[3]{512.5} = 8\sqrt[3]{5}$. Eben so ist $\sqrt{50a^2b^3} = 5ab\sqrt{2b}$, und $\sqrt[3]{(a^3b+a^3c)} = a\sqrt[3]{(b+c)}$.

§. 292. Zus. 2. Umgekehrt läßt sich das Product aus einer Rationalgröße in eine Wurzelgröße völlig in eine Wurzelgröße verwandeln, wenn man obiges Verfahren rückwärts macht. Hienach ist $a\sqrt[n]{a^2} = \sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{a^2} = \sqrt[n]{a^{2n}}$, und $\sqrt[n]{\frac{a^2}{a}} = \frac{\sqrt[n]{a^2}}{\sqrt[n]{a^n}} = \sqrt[n]{\frac{a^2}{a^n}}$. Z. E. 6. $\sqrt[4]{12} = \sqrt[4]{6^4} \cdot \sqrt[4]{12} = \sqrt[4]{6^4.12} = \sqrt[4]{15552}$, und $\frac{6}{\sqrt[4]{12}} = \frac{\sqrt[4]{6^4}}{\sqrt[4]{12}} = \sqrt[4]{\frac{6^4}{12}} = \sqrt[4]{\frac{1296}{12}}$.

§. 293.

§. 293. Aufg. Wurzelgrößen zu addiren, oder zu subtrahiren.

Auflös. 1) Lassen sich die gegebenen Wurzelgrößen reduciren, §. 291, so, daß einerley Größe unter die Wurzelzeichen von einerley Exponenten komme, so verfahre man nach §. 148. So ist z. E. $\sqrt{18}+\sqrt{8}=\sqrt{9.2}+\sqrt{4.2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=(3+2)\sqrt{2}=\sqrt{50}$, §. 292. Auch ist $\sqrt{6}+\sqrt{6}=2\sqrt{6}=2\sqrt{6}=\sqrt{24}$. Auch ist $\sqrt{75}-\sqrt{48}=5\sqrt{3}-4\sqrt{3}=\sqrt{3}$. Auch ist $\sqrt{48}-\sqrt{\frac{16}{27}}=\left(4-\frac{4}{9}\right)\sqrt{3}$ $\left(\text{weil } \sqrt{\frac{16}{27}}=\sqrt{\frac{16.3}{81}}=\frac{4}{9}\sqrt{3}.\right)$

2) Läßt sich Obiges aber nicht bewerkstelligen, so zeigt man die Operation blos an. Z. E. $\sqrt{12}+\sqrt{6}$, oder $\sqrt{12}+\sqrt[3]{12}$. Doch hievon eine andere Methode §. 299.

§. 294. Aufg. Mit zusammengesetzten Wurzelgrößen zu rechnen.

Auflös. Diese Rechnungen gründen sich gänzlich auf obige Regeln für einfache Wurzelgrößen, wie sich am besten aus den nun folgenden Beyspielen ersehen läßt:

§. 295. Exempel der Addition und Subtraction.

1) $\sqrt{320} = 4\sqrt{20}$
$\sqrt{180} - 8 = 3\sqrt{20} - 8$

Summe $\sqrt{320}+\sqrt{180}-8=7\sqrt{20}-8$
Differenz $\sqrt{320}-\sqrt{180}+8=\sqrt{20}+8$

$\sqrt{72}-4$	$p-\sqrt[n]{ab^n}$
$8-\sqrt{12}$	$\sqrt[n]{a^{n+1}}-q$
Summe $\sqrt{72}-\sqrt{12}+4$	Summe $p-q+(a-b)\sqrt[n]{a}$
Differenz $\sqrt{72}+\sqrt{12}-12$	Differenz $p+q+(b-a)\sqrt[n]{a}$

§. 296. Exempel der Multiplication.

$a+b\sqrt{a}$	$\sqrt{3}+\sqrt{2}$	$6-\sqrt{20}$
$b-\sqrt{a}$	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	$8-\sqrt{45}$
$ab+b^2\sqrt{a}$	$3+\sqrt{6}$	$48-8\sqrt{20}$
$-ab-a\sqrt{a}$	$-2-\sqrt{6}$	$-6\sqrt{45}+\sqrt{900}$
$(b^2-a)\sqrt{a}$	1	$48-\sqrt{1280}-\sqrt{1620}+30$

§. 297. Exempel der Diviſion:

$b-\sqrt{a)\ b^2\sqrt{a}-a\sqrt{a}\ |\ b\sqrt{a}+a}$

$b^2\sqrt{a}-ab$

$ab\ -\ -a\sqrt{a}$

$ab\ -\ -a\sqrt{a}$

0

$\sqrt{3}+\sqrt{2)\ 3\ -2\ |\ \sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$3\ +\sqrt{6}$

$-\sqrt{6}-2$

$-\sqrt{6}-2$

0

$8-\sqrt{45)\ 48-\sqrt{1280}-\sqrt{1620}+30\ |\ 6-\sqrt{20}}$

$48\ \ -\sqrt{1620}$

$-\sqrt{1280}\ \ +30$

$-\sqrt{1280}\ \ +30$

0

Nämlich hier beym zweyten Exempel hat man $\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$, und beym dritten $-\frac{\sqrt{1280}}{8}=-\frac{\sqrt{1280}}{\sqrt{64}}=-\sqrt{\frac{1280}{64}}$ $=-\sqrt{20}$.

§. 298. Zuſ. 1. Bey der Diviſion läßt ſich auch wohl der zuſammengeſetzte Diviſor bisweilen mit Vortheil in einen einfachen verwandeln. Hiezu iſt das zweyte Exempel in §. 297. ſchicklich. Denn es iſt $\frac{3-2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{1.\ (\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}$

§. 233.

§. 233. Anm. $=\sqrt{8}-\sqrt{2}$, wie auch durch die Diviſion gefunden ward.

Auf ähnliche Art iſt $\frac{6}{(\sqrt{12}+\sqrt{6})}=\frac{6.(\sqrt{12}-\sqrt{6})}{(\sqrt{12}+\sqrt{6})(\sqrt{12}-\sqrt{6})}$ $=\frac{6.\sqrt{12}-\sqrt{6})}{12-6}$ §. 233. $=\sqrt{12}-\sqrt{6}$, wie man auch durch die Diviſion finden kann.

§. 299. Zuſ. 2. Für die Addition und Subtraction der Wurzelgrößen (§. 293. 2ter Fall) giebt es noch eine beſondere Methode: daß man die algebraiſche Form für ihre Summe oder Differenz ins Quadrat erhebt, §. 296, und davor das Wurzelzeichen ſetzt. Z. E. $\sqrt{12}+\sqrt{6}$ wird gefunden, wenn man dieſe Form ins Quadrat erhebt, welches $18+\sqrt{288}$ giebt, §. 296, und hieraus die Quadratwurzel zieht. Demnach iſt $\sqrt{12}+\sqrt{6}=\sqrt{(18+\sqrt{288})}$.

§. 300. Zuſ. 3. Sind die Größen unter dem Wurzelzeichen ſelbſt zuſammengeſetzte Wurzelgrößen, wie $\sqrt{(18+\sqrt{288})}$ §. 299, (wovon die Algebra eine vortheilhaftere Form lehret), ſo laſſen ſich obige Rechnungsregeln auch hierauf leicht anwenden, wie aus folgenden Exempeln zu erſehen:

1) Man ſoll $\sqrt{(12+\sqrt{6})}$ mit 6 multipliciren, d. i. mit $\sqrt{36}$. Demnach iſt $6.\sqrt{(12+\sqrt{6})}=\sqrt{36}.\sqrt{(12+\sqrt{6})}=\sqrt{36.(12+\sqrt{6})}=\sqrt{(432+\sqrt{7776})}$.

2) Man ſoll $\sqrt{(12+\sqrt{6})}$ mit $\sqrt{12}+\sqrt{6}$ multipliciren, d. i. mit $\sqrt{(18+\sqrt{288})}$, §. 299. Demnach iſt $\sqrt{(12+\sqrt{6})}.(\sqrt{12}+\sqrt{6})=\sqrt{(12+\sqrt{6})}.\sqrt{(18+\sqrt{288})}=\sqrt{(12+\sqrt{6})(18+\sqrt{288})}=\sqrt{(216+\sqrt{1728}+\sqrt{41472}+\sqrt{1944})}$.

§. 301. Lehrſ. Iſt das Quadrat einer Irratio-

nalgröße rational, so sind alle gerade Potenzen dieser Größe auch rational, alle ungerade aber irrational.

Beyp. Es sey $\sqrt{a}$ oder $a^{\frac{1}{2}}$ irrational, a aber rational, und n eine ganze Zahl, so ist $(a^{\frac{1}{2}})^2 = a$, und $(a^{\frac{1}{2}})^{2n} = a^n$ rational, hingegen $(a^{\frac{1}{2}})^{2n+1} = a^n . a^{\frac{1}{2}}$ irrational.

§. 302. Lehrs. Von jeder bejahten Größe sind alle Potenzen bejaht, von jeder verneinten Größe aber alle gerade Potenzen bejaht, alle ungerade verneint.

Beyp. Das Quadrat von $\pm a$ ist stets $+a^2$. Jede gerade Potenz (des Exponenten $2n$) ist die Potenz n ihres Quadrats $(\pm a)^{2n} = (+a^2)^n$, folglich jederzeit bejaht. Jede ungerade Potenz (also des Exponenten $2n+1$) ist ein Product aus der vorhergehenden geraden Potenz in die Wurzel, folglich bejaht oder verneint, je nachdem es die Wurzel ist.

§. 303. Zus. 1. Jede gerade Wurzel aus einer bejahten Größe kann sowohl bejaht als verneint seyn; jede ungerade Wurzel aus einer bejahten Größe kann nur bejaht, aus einer verneinten nur verneint seyn. Z. E. $\sqrt{9} = \pm 3$; $\sqrt[3]{8} = +2$; $\sqrt[3]{-8} = -2$.

§. 304. Zus. 2. Fodert ein Ausdruck, die gerade Wurzel aus einer verneinten Größe zu ziehen, als $\sqrt{-c}$, so fodert er was Unmögliches, §. 302, und heißt daher eine **unmögliche** oder **eingebildete Größe**, quantitas impossibilis, imaginaria. Jeder andre Ausdruck einer Größe, sie mag rational oder irrational seyn, heißt eine **mögliche** oder **reelle Größe**, quantitas possibilis, rea-

reales. Jeder Ausdruck, worin eine unmögliche Größe vorkömmt, wenn auch das Uebrige reel ist, als $a+\sqrt[2n]{-c}$, zeigt auch etwas Unmögliches an, und heißt daher auch eine unmögliche Größe.

§. 305. Anm. Man legt auch wohl den Namen einer unmöglichen Größe blos dem zusammengesetzten Ausdrucke bey, und nennt das, was nach Wegnahme alles Reellen übrig bleibt, eine eingebildete Größe.

§. 306. Zus. 3. Da $\sqrt[2n]{-c}$, der allgemeine Ausdruck einer eingebildeten Größe, §. 304, $=-c^{\frac{1}{2}}=\left(-c^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\left(\sqrt[n]{-c}\right)}$, wo $\sqrt[n]{-c}$ eine mögliche verneinende Größe, wenn n unger de, aber eine eingebildete Größe, wenn n gerade ist; so kann man jede eingebildete Größe als die Quadratwurzel entweder aus einer möglichen verneinten Größe, oder aus einer eingebildeten Größe, ansehen. Der erste Fall $\sqrt{-p}$, wo p möglich, ist der gewöhnlichste, da dann $(\sqrt{-p})^2=\left(-p^{\frac{1}{2}}\right)^2=p$ ist. Will man dieses aus §. 289 herleiten, wonach $(\sqrt{-p})(\sqrt{-p})=\sqrt{p^2}=+p$ ist, §. 303, so schickt sich hier nicht $+p$, sondern nur $-p$.

§. 307. Zus. 4. Setzt man m gerade, und $\sqrt[n]{c}=\sqrt[m]{a}$, so ist der Ausdruck für eine eingebildete Größe $\sqrt[m]{-c}=\sqrt[m]{-1}.\sqrt[m]{c}=\sqrt[m]{-1}.\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{+1}$, ein allgemeiner Ausdruck für jede eingebildete Größe, a mag rational oder irrational seyn.

§. 308. Zus. 5. Da jede gerade Zahl m das Product aus r (einer Potenz der Zahl 2) in t (die Einheit oder eine ungerade Zahl) ist, so daß $m=rt$, so ist nach §. 307. $a\sqrt[m]{-1}=a\sqrt[rt]{-1}=a\sqrt[r]{\sqrt[t]{-1}}$. Nun ist jederzeit $\sqrt[t]{-1}=-1$

Folglich ist $a\sqrt{-1}^{r} = a^{r}\sqrt{-1}^{r}$ der allgemeine Ausdruck für jede eingebildete Größe, wobey r eine Potenz der Zahl 2 ist. Z. E. $a\sqrt{-1}^{2}$, $a\sqrt{-1}^{4}$, $a\sqrt{-1}^{8}$ u. s. w.

§. 309. Zus. 6. Setzt man eine eingebildete Größe $a\sqrt{-1}$, eine andre $\beta\sqrt{-1}$, so ist ihr Product $-a\beta$, und ihr Quotient $\frac{a}{\beta}$ jederzeit eine reelle Größe; da dann, nach dem allgemeinen Begriffe der Multiplication und Division, die eine eingebildete Größe die reelle Einheit eben so enthält, als das reelle Product die andere eingebildete Größe, und die eine eingebildete Größe die andere so enthält, als der reelle Quotient die reelle Einheit.

§. 310. Lehrs. Von einer eingebildeten Zahl $\sqrt{-c}$, deren Quadrat $-c$ möglich ist, sind alle gerade Potenzen reel, alle ungerade aber eingebildet.

Bew. Denn es ist $(\sqrt{-c})^{2n} = (-c)^{n}$ also reel, und $(\sqrt{-c})^{2n+1} = (\sqrt{-c})^{2n}.\sqrt{-c}$, also eingebildet, weil es das Product aus einer reellen Größe $(\sqrt{-c})^{2n}$ in eine eingebildete $\sqrt{-c}$ ist.

§. 311. Anm. Die oben gegebenen Regeln von der Rechnung mit Wurzelgrößen umfassen auch die eingebildeten Größen.

Der

Der dritte Abschnitt.

Von der Vergleichung der Zahlen.

1. Die Arten Zahlen zu vergleichen.

§. 312. Erkl. Vergleicht man zwey Zahlen in Absicht auf die Größe, welche die eine gegen die andre hat, so betrachtet man ihre Verhältniß, ratio, welche entweder arithmetisch, arithmetica, oder geometrisch, geometrica, genannt wird, je nachdem die Vergleichung mittelst der Subtraction oder der Division geschieht.

Man will nämlich hiebey nicht die absoluten Größen dieser Zahlen bestimmen, sondern blos die relative Größe, welche die eine gegen die andere hat, d. i. man will die Größe der einen blos durch die andre bestimmen, wobey die andre selbst noch unbestimmt gelassen werden kann.

Z. E. 12 — 4 = 8, d. i. 12 ist um 8 größer als 4; oder 12 : 4 = 3, d. i. 12 ist 3mal größer als 4. *

§. 313. Anm. Der Name Verhältniß, ratio, gebührt, nach dem Gebrauche der Alten, nur der geometrischen; daher diese auch oft schlechthin Verhältniß genannt, und unter diesem Beynamen, ohne Zusatz, allemal verstanden wird. Man bezeichnet sie zwar wie die Quotienten, die man aber damit nicht verwechseln muß.

§. 314 Erkl. Die Zahlen, die man mit einander vergleicht, heißen die Glieder, termini, der Verhältniß; wobey es willkührlich, welches man zum Vorderglied, antecedens, oder Hinterglied, consequens, machen will.

Z. E. Die Verhältnisse §. 312. können auch heißen 4 — 12, d. i. 4 ist um 8 kleiner als 12, und 4 : 12, d. i. 4 ist der dritte Theil von 12.

§. 315. Erkl. Der Name, nomen, der arithmetischen Verhältniß heiße die Differenz, welche das Vorderglied vom Hintergliede subtrahirt giebt; der geometrischen aber der Quotient, welchen das Vorderglied in das Hinterglied dividirt giebt.

§. 316. Anm. Der Quotient pflegt auch der Exponent der Verhältniß zu heißen; es ist aber besser, diesen Ausdruck blos den Potenzen vorzubehalten.

§. 317 Zus. Ist das Vorderglied < Hinterglied, so ist der Namen der arithmetischen Verhältniß negativ, und der geometrischen ein ächter Bruch. Z. E. §. 312. ist 12 subtrahirt von 4 = — 8, und 12 dividirt in 4 = $\frac{4}{12}$.

§. 318. Erkl. Vergleicht man eine Zahl mit einer zweyten, die zweyte mit einer dritten, die dritte mit einer vierten u. s. w. d. i. sind mehrere Verhältnisse der Art, daß das Hinterglied der einen das Vorderglied der andern ist, so heißen dergleichen Verhältnisse zusammenhängende oder stetige, continuae, alle andere aber abgesonderte, discretae.

Z. E. 3 : 4, 4 : 8, 8 : 12 u. s. w. sind stetige geometrische Verhältnisse, aber 3 : 4, 7 : 9, 2 : 5 u. s. w. abgesonderte. Dieser Unterschied findet eben so bey den arithmetischen Verhältnissen statt.

§. 319. Erkl. Gleiche Verhältnisse sind, die gleiche Namen haben, und die Gleichheit zweyer Verhältnisse heißt eine Proportion, die wie die Verhältnisse §. 312. 318. entweder arithmetisch oder geometrisch, desgleichen entweder stetig oder abgesondert ist.

Z. E.

Z. E. 2:4=3:6 wäre eine geometriſche abgeſonderte Proportion, 2:4=4:8 aber eine ſtetige. Eine arithmetiſche abgeſonderte Proportion wäre 2--4=3--5, und eine ſtetige 2--4=4--6.

Anm. §. 320. Unter Proportion, ohne Beyſatz, verſteht man allemal die geometriſche, §. 313.

§. 321. Erkl. Zu einer Proportion gehören vier, und wenn ſie ſtetig iſt, drey Glieder, §. 319. Das erſte und letzte Glied heißen die äußerſten, extremi, das zweyte und dritte aber die mittlern, medii. Bey der ſtetigen Proportion ſind beide gleich, und machen das mittlere Glied aus. Gleichnamige oder ähnlich liegende, homologi, heißen die Vorderglieder, oder die Hinterglieder.

Anm. Man bezeichnet auch die ſtetige arithmetiſche Proportion §. 319. durch ÷ 2, 4, 6, und die ſtetige geometriſche durch ∴ 2. 4. 8.

§. 322. Erkl. Eine Menge Zahlen, die alle in gleichen ſtetigen Verhältniſſen, die folglich einen gemeinſchaftlichen Namen haben, fortgehen, machen eine Progreßion oder Reihe, welche, wie die Verhältniſſe §. 312, entweder arithmetiſch oder geometriſch iſt.

Z. E. Eine arithmetiſche Reihe wäre

÷ 2. 4. 6. 8. 10. 12.....

eine geometriſche aber

∴ 2. 4. 8. 16. 32. 64.....

Anm. Beide Reihen ſind vorwärts geleſen ſteigend, rückwärts aber fallend. §. 198.

2. Die arithmetiſchen Proportionen.

§. 323. Grundſ. Das Hinterglied jeder arithmetiſchen Verhältniß entſteht, wenn man den Namen,

er

er mag bejahend oder verneinend seyn, zum Vordergliede addirt. §. 312. 315. 317.

§. 324. Zus. 1. Bedeuten a, b die Vorderglieder zweyer Verhältnisse, und d, g ihre Namen, so ist ihre allgemeine Form a — (a+d), und b — (b+g) wobey d und g auch eine verneinende Zahl bedeuten können.

§. 325. Zus. 2. Sind die Namen gleich, so ist die zweyte Verhältniß b—(b+d), und a—(a+d) = b—(b+d) die allgemeine Form der arithmetischen Proportion, und wenn b = (a+d), die Form der stetigen a—(a+d) = (a+d)—(a+2d) oder ÷a.a+d.a+2d.

§. 326. Lehrs. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder der Summe der mittlern gleich.

Bew. folgt aus der allgemeinen Form a—(a+d) = b—(b+d), wo a+b+d = a+d+b.

§. 327. Zus. 1. In der stetigen Proportion a—(a+d) = (a+d)—(a+2d) ist die Summe der äußern Glieder dem mittlern Gliede doppelt genommen gleich, 2a+2d = 2(a+d).

§. 328. Zus. 2. Man findet also das mittlere Glied, wenn man die Summe der äußern halbirt, $a+d = \frac{2a+2d}{2}$.

Z. E. zwischen 54 und 68 ist das mittlere Glied, oder das arithmetische Mittel $= \frac{54+68}{2} = 61$, folglich ÷54.61.68.

3. Die arithmetischen Progressionen.

§. 329. Grundf. Jedes folgende Glied einer arithmetischen Progression entsteht, wenn man zu dem nächst

nächſt vorhergehenden Gliede den gemeinſchaftlichen Verhältnißnamen, er mag bejahend oder verneinend ſeyn, addirt. §. 322.

§. 330. Zuſ. 1. Nennt man das erſte Glied a, die Zahl der Glieder n, den Verhältnißnamen d, ſo iſt die allgemeine Form der arithmetiſchen Progreſſion

1 2 3 4 . . . n

$\div$ a a+d. a+2d. a+3d . . . . a+(n—1)d.

Die Zahl, welche anzeigt, das wievielſte Glied der Reihe ein jedes Glied ſey, heiße der Zeiger, index. Auch iſt a+(n—1)d das allgemeine Glied der Reihe, woraus ſich jedes beliebige Glied, deſſen Zeiger gegeben iſt, finden läßt, §. 196.

§. 331. Zuſ. 2. Man findet jedes folgende Glied R der Reihe, wenn man zu irgend einem vorhergehenden M den Namen d ſoviel mal addirt, als die von M bis R gehende Zahl der Glieder r weniger 1 beträgt. Denn man kann M als das erſte Glied anſehen, da dann R=M +(r—1)d iſt.

Hieraus folgt auch R—(r—1)d=M, wodurch man aus jedem folgenden Gliede R jedes vorhergehende M findet.

§. 332. Zuſ. 3. Nimmt man aus der Reihe drey oder vier beliebige Glieder, jedoch daß die Zwiſchenglieder jedes Paares von gleicher Anzahl ſeyn, ſo machen ſie eine arithmetiſche Proportion, weil wegen des gleichen Abſtandes gleiche Unterſchiede vorhanden ſind, §. 331. 319.

§. 333. Zuſ. 4. Aus zwey gegebenen Gliedern der Reihe, M und R, und ihrem Abſtande, oder dem Zeiger r, läßt ſich der Verhältnißname d finden. Denn R=M+(r—1)d §. 331. folglich R—M=(r—1)d, und $\frac{R-M}{r-1}=d$.

§. 334.

§. 334. Zuſ. 5. Zwiſchen zwey gegebenen Zahlen A, B, läßt ſich eine beliebige Menge n mittlerer arithmetiſchen Proportionalzahlen finden. Denn hier ſind n+2 Glieder, wovon A, B, die äußerſten. Folglich iſt $d = \frac{B-A}{n+1}$ §. 333, wodurch man die verlangten Glieder findet, §. 330. Dieſes heißt interpoliren.

§. 335. Zuſ. 6. Sind A, B, C, D u. ſ. w. in arithmetiſcher Progreſſion, und man ſetzt zwiſchen jedes Paar eine gleiche Anzahl mittlerer Glieder, §. 334, ſo machen die interpolirten Glieder mit den gegebenen zuſammen eine arithmetiſche Reihe, z. E.

A. a. b. c. B. d. e. f. C. g. h. k. D u. ſ. w.

Denn es iſt B−A=C−B=D−C, und die Zahl n der Zwiſchenglieder einerley, folglich der Name der neuen Reihe $d = \frac{B-A}{n+1}$ §. 334.

§. 336. Lehrſ. In jeder arithmetiſchen Reihe iſt die Summe der beiden äußerſten Glieder der Summe jeder zweyer von den äußerſten gleichweit abſtehender Glieder, und bey ungerader Anzahl der Glieder, dem mittelſten doppelt genommen gleich.

Bew. 1) Stehen zwey Glieder, welche man will, von den äußerſten gleichweit ab, ſo machen ſie mit ihnen eine arithmetiſche Proportion, §. 332. da dann der Satz aus §. 326. erhellet. 2) Eben ſo ſteht das mittelſte Glied von den äußerſten gleichweit ab, und macht mit ihnen eine ſtetige Proportion, §. 332, da dann der Satz aus §. 327. erhellet.

Anderer Beweis. 1) Bedeuten a und u die äußerſten Glieder, ſo iſt nach §. 331. das rte Glied vom Anfange = a+(r−1)d, und das rte Glied vom Ende = u−(r−1)d;

d, folglich ihre Summe $=a+u$. 2) Bedeutet bey ungerader Anzahl der Glieder das rte Glied das mittelſte, ſo iſt ſolches zugleich das rte vom Anfange und vom Ende, folglich $=\frac{a+u}{2}$.

§. 337. Zuſ. 1. Iſt die Zahl der Glieder n gerade, und man nimmt immer ein Paar, von den äußerſten gleichweit entfernter, Glieder, ſo enthält die Reihe $\frac{n}{2}$ ſolcher Paare, deren jedes $=a+u$, daß alſo die Summe der ganzen Reihe $S=(a+u)\frac{n}{2}=\frac{a+u}{2}.n$, d. i. S iſt einer eben ſo großen Menge von Zahlen gleich deren jede $=\frac{a+u}{2}$. Wäre nun die Zahl der Glieder n ungerade, ſo kömmt zu der gedachten Menge von Zahlen noch eine für das mittelſte Glied $=\frac{a+u}{2}$, und es iſt auch hier die Summe der Reihe $S=\frac{a+u}{2}.n$, wobey $u=a+(n-1)d$, § 330.

§. 338. Zuſ. 2. Aus a, n und d findet man u, und hieraus S, §. 337.

Z. E. 1) Soll man die Summe der erſten 1000 natürlichen Zahlen finden, ſo iſt $a=1$, $n=1000$, $d=1$, $u=1000$, folglich $S=1001.500=500500$. 2) Soll man die Summe der erſten n ungeraden Zahlen finden, ſo iſt $a=1$, $d=2$, folglich $u=1+(n-1)2=2n-1$, folglich $S=\frac{2n.n}{2}=n^2$, wie §. 235. folglich, für $n=1000$, $u=1999$, und $S=1000^2=1000000$.

§. 339.

§. 339. Zuſ. 3. Da $u=a+(n-1)d$, §. 330, ſo iſt $S=\frac{a+u}{2}.n$ §. 337. $=\frac{2a+(n-1)d}{2}.n=(2a+nd-d)\frac{n}{2}$, wodurch man S unmittelbar aus a, n, d, in den Exempeln §. 338. findet.

§. 340. Zuſ. 4. Iſt $d=a$, ſo iſt $u=a+(n-1)a=n^2$, und $S=\frac{a+n^2}{2}.n=\frac{na+n^2a}{2}=\frac{n.(n+1).a}{2}$, in welchem Falle man alſo u und S aus a und n findet. Z. E. Für die erſten 1000 natürlichen Zahlen iſt $a=d=1$, $n=1000=u$, und $S=\frac{1000.1001}{2}=500500$, wie §. 338.

§. 341. Zuſ. 5. Aus a, u und d findet man n, und hieraus S.

Denn da $u=a+(n-1)d=a+nd-d$ §. 337. ſo iſt $u-a+d=nd$, folglich $\frac{u-a+d}{d}=n$, und $S=\frac{a+u}{2}.\frac{u-a+d}{d}$. Z. E. Setzt man $a=2$, $d=3$, $u=11$, ſo iſt $n=\frac{11-2+3}{3}=4$, und $S=\frac{2+11}{2}.4=26$. Die Reihe ſelbſt iſt 2. 5. 8. 11.

Setzte man $a=2$, $d=3$, $u=10$, ſo erhielte man $n=\frac{10-2+3}{3}=\frac{11}{3}=3\frac{2}{3}$. Dies zeigt eine Interpolation an §. 335, wovon das Nähere in der Lehre von Zuſammenſetzung und Theilung der Verhältniſſe.

§. 342. Anm. Auf eben die Art laſſen ſich noch mehrere Aufgaben für arithmetiſche Reihen auflöſen. Denn überhaupt, wenn von den fünf Dingen a, u, d, n, S, drey gegeben ſind, ſo laſſen ſich daraus allemal die beiden übrigen nach §. 337. finden, wovon das Nähere in der Algebra. Es finden nämlich folgende Aufgaben ſtatt:

Sege-

gegeben			gesucht		gegeben			gesucht	
a	d	n	S	u	a	S	u	n	d
a	d	S	n	u	d	n	S	a	u
a	d	u	n	S	d	n	u	a	S
a	n	S	d	u	d	S	u	a	n
a	n	u	d	S	n	S	u	a	d

4. Die geometrischen Proportionen.

§. 343. Grundſ. Das Hinterglied jeder geometriſchen Verhältniß entſteht, wenn man das Vorderglied mit dem Namen, er mag eine ganze Zahl, oder ein Bruch, oder eine Irrationalzahl ſeyn, multiplicirt. §. 312. 315. 317.

§. 344. Zuſ. 1. Bedeuten a, b, die Vorderglieder zweyer Verhältniſſe, und e, m, ihre Namen: ſo iſt ihre allgemeine Form a:ae, und b:bm, wobey e und m ganze Zahlen oder Brüche, auch ſelbſt Irrationalzahlen ſeyn können. Iſt nun e < m, ſo ſagt man: das erſte Vorderglied a habe zu ſeinem Hinterglied eine gröſſere Verhältniß, als das zweyte Vorderglied b zu ſeinem Hinterglied, oder es ſey a : ae > b : bm, und umgekehrt b:bm < a:ae.

§. 345. Zuſ. 2. Sind die Namen gleich: ſo iſt die zweyte Verhältniß b:be, und a:ae=b:be die allgemeine Form der geometriſchen Proportion; und, wenn b=ae, die Form der ſtetigen $a:ae=ae:ae^2$, oder $=a.ae.ae^2$. §. 319.

§. 346. Zuſ. 3. Sind zwey Verhältniſſe einer dritten gleich: ſo ſind ſie ſelbſt gleich, weil ſie mit der dritten einen gemeinſchaftlichen Namen haben.

§. 347. Zuſ. 4. Iſt A:B=C:D, ſo iſt auch B:A =D:C. Denn wenn $\frac{B}{A}=\frac{D}{C}$, ſo iſt auch $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$.

§. 348. Zuſ. 5. Die die Multiplication iſt FQ=P, das iſt 1:F=Q:P, §. 16. 17. und für die Diviſion $\frac{P}{F}$=Q, das iſt P:F=Q:1, §. 26. 31.

§. 349. Erkl. Verhältniß der Gleichheit, ratio aequalitatis, heißt, wenn das Vorderglied dem Hintergliede gleich iſt; der Ungleichheit aber, ratio majoris vel minoris inaequalitatis, wenn das Vorderglied größer, oder kleiner, als das Hinterglied iſt.

§. 350. Erklär. Kehrt man die Glieder einer Verhältniß um, ſo heißt die neue Verhältniß die umgekehrte oder verkehrte, ratio reciproca, der vorigen, die alsdann die gerade, directa, heißt.

§. 351. Erklär. Eine Verhältniß heißt rational oder irrational, je nachdem ihr Name rational oder irrational iſt. Letzterer kann der Wahrheit immer näher und näher gebracht werden, §. 279.

§. 352. Lehrſ. Werden zwey Zahlen A, B, mit einerley m multiplicirt, oder dividirt, ſo verhalten ſich die Producte, oder die Quotienten, wie dieſe Zahlen.

Bew. Da $\frac{B}{A}=\frac{mB}{mA}=\frac{B:m}{A:m}$ §. 92, ſo iſt A:B=mA:mB=$\frac{A}{m}:\frac{B}{m}$ §. 319.

§. 353. Zuſ. 1. Der Satz iſt auf die Glieder einer Proportion A:B=C:D leicht anzuwenden, auch ſelbſt auf die homologen Glieder. Denn weil $\frac{B}{A}=\frac{D}{C}$, ſo iſt $\frac{mB}{A}=\frac{mD}{C}$ und $\frac{B}{mA}=\frac{D}{mC}$.

§. 354.

§. 354. Zuſ. 2. Zwey Brüche von einerley Nenner verhalten ſich wie ihre Zähler. Denn $\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = a : b$, und $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = ad : bc$, §. 352.

§. 355. Zuſ. 3. Zwey Brüche von einerley Zähler verhalten ſich wie ihre Nenner umgekehrt. Denn $\frac{a}{m} : \frac{a}{n} = \frac{1}{m} : \frac{1}{n} = \frac{n}{mn} : \frac{m}{mn} = n : m$.

§. 356. Zuſ. 4. Von der geraden Verhältniß §. 350, $a:b$, iſt die umgekehrte $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$.

§. 357. Zuſ. 5. Jede Rationalverhältniß §. 351. läßt ſich in ganzen, und zwar in den kleinſten Zahlen angeben. Denn 1) ſind die Glieder Brüche: ſo mache man ſie gleichnamig, da ſie ſich dann wie ihre Zähler verhalten, §. 354. 2) Sind die Glieder durch ganze Zahlen ausgedrückt, ſo ſuche man ihr größtes gemeines Maaß §. 73, und dividire ſie damit §. 352. vergl. §. 95.

§. 358. Zuſ. 6. Verhältniſſe, deren Glieder Irrationalzahlen ſind, können rational ſeyn. Z. E. $\sqrt{28} : \sqrt{63} = 2\sqrt{7} : 3\sqrt{7}$, §. 291. $= 2 : 3$, §. 352.

§. 359. Zuſ. 7. Irrationalverhältniſſe, §. 351, laſſen ſich Rationalverhältniſſen, als ihren Gränzen, ohne Aufhören immer mehr nähern, daß der Unterſchied kleiner als jedes Gegebene wird. §. 279. 351.

§. 360. Lehrſ. Sind vier Zahlen A, B, C, D, proportionirt: ſo iſt das Product aus den äußern Gliedern AD, dem Producte aus den mittlern BC gleich.

Bew. Da A:B=C:D, so ist $\frac{B}{A}=\frac{D}{C}$, folglich $\frac{BC}{AC}=\frac{AD}{AC}$, folglich BC=AD.

§. 361. Zus. 1. Ist B=C, also die Proportion stetig: so ist $B^2=AD$.

§. 362. Zus. 2. Demnach ist $B=\sqrt{(AD)}$ wodurch man zwischen zwey Zahlen A, D, eine mittlere geometrische Proportionalzahl findet.

§. 363. Zus. 3. Ist in ∴ A. B. D, A=1: so ist $D=B^2$, und $\sqrt{D}=B$. Demnach ist jedes Quadrat die dritte geometrische Proportionalzahl, zu Eins und der Wurzel, und jede Quadratwurzel die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen Eins und dem Quadrate.

§. 364. Zus. 4. Sind in der Proportion A:B=C:D, alle Glieder von einerley Art: so lassen sich die mittlern verwechseln. Denn da AD=BC: so ist $\frac{CD}{AD}=\frac{CD}{BC}$, folglich $\frac{C}{A}=\frac{D}{B}$ folglich A:C=B:D.

§. 365. Zus. 5. Zwey gleiche Producte AD, BC, geben eine Proportion, wenn man beliebig die Factoren des einen zu äußern, des andern zu mittlern Gliedern macht. Z. E. A:B=C:D. Denn wäre dies nicht: so wäre nicht $\frac{B}{A}=\frac{D}{C}$, folglich auch nicht $\frac{BC}{AC}=\frac{AD}{AC}$, folglich auch nicht BC=AD, gegen das Angenommene.

§. 366. Lehrs. Sind vier ganze Zahlen A, B, C, D, proportionirt, und die beiden ersten Primzahlen zu einander, also die kleinsten in solcher Verhältniß §. 357: so

so sind sie in den beiden letzten nach einerley ganzen Zahlen enthalten.

Bew. Da A:B=C:D, so ist auch A:C=B:D, §. 364. folglich $\frac{C}{A}=\frac{D}{B}$, welches entweder eine Zahl r oder einen Bruch $\frac{n}{m}$ giebt. Ist das erste, so ist der Satz klar. Setzte man das zweyte, daß $\frac{n}{m}A=C$, und $\frac{n}{m}B=D$, folglich $\frac{1}{m}A=nC$ und $\frac{1}{m}B=nD$ ganze Zahlen wären; so hätten A, B, ein gemeinschaftliches Maaß m, und wären also nicht Primzahlen zu einander, gegen das Angenommene.

§. 367. Aufg. Es sind zwey Zahlen A, B gegeben, man soll die kleinste Zahl, die von ihnen gegeben wird, (ihren kleinsten Dividuus) finden.

Auflös. 1) Sind A, B Primzahlen zu einander, so ist das Product aus ihnen AB, die gesuchte Zahl.

A, 5. B, 3. C. D. E.

Denn AB wird offenbar von beiden gemessen, §. 29. Wäre nun irgend eine Zahl C<AB, die von A und B nach den Zahlen D und E gemessen würde, daß C=AD=BE: so ist A:B=E:D, §. 365. Nun sind A, B, Primzahlen zu einander. Folglich mißt B die D, §. 366, und da B:D =AB:AD, §. 352, mißt auch AB die AD, d. i. die C (<AB) welches unmöglich ist, §. 63.

2) Sind A, B, nicht Primzahlen zu einander, und C, D, die kleinsten in solcher Verhältniß, §. 357: so ist CB=AD §. 360, die gesuchte Zahl.

A, 8. B, 6. C, 4. D, 3. E.

Denn sie wird offenbar von A und B gemessen, §. 29. daß es aber keine kleinere E geben könne, wird wie zuvor bewiesen.

§. 368. Lehrs. Wird eine Zahl A von zwey andern Zahlen B, C, gemessen: so wird sie auch von deren kleinsten Dividuus D gemessen.

A,	48.
B,	6.
C,	4.
L,	12.
E.	

Bew. Wäre dies nicht: so lasse D in A dividirt, den Rest E < D. Nun messen B und C die D, aber auch A, folglich auch den Rest E (< D) §. 71, gegen das Angenommene.

§. 369. Aufg. Es sind drey Zahlen A, B, C, gegeben, man sokt die kleinste Zahl, die von ihnen gemessen wird, (ihren kleinsten Dividuus) finden.

Auflös. 1) Für A und B suche man die kleinste Zahl D, §. 367. Wird diese auch von C gemessen: so ist sie auch die gesuchte Zahl.

A,	3.
B,	4.
C,	6.
D,	12.

Denn wäre eine kleinere E: so würde solche von A, B, folglich auch von D gemessen, §. 368, welches unmöglich, §. 71.

2) Wird D nicht von C gemessen: so suche man zu C, D, die kleinste E, §. 367. Diese ist die gesuchte Zahl.

A,	2.
B,	3.
C,	4.
D,	6.
E,	12.

Denn E wird von D, und D von A, B, folglich auch E von A, B, gemessen; aber auch von C, also von A, B, C. Wäre nun eine kleinere F: so müßte D die F, folglich auch E die F messen, §. 368, welches unmöglich ist, §. 63.

§. 370. Zus. Wird eine Zahl N von drey andern A, B, C, gemessen: so wird sie auch von deren kleinsten Dividuus D oder E gemessen, vergl. §. 368.

§. 371. Anm. Auf eben die Art findet man auch die kleinste Zahl, die von vier und mehrern gegebenen Zahlen gemessen wird.

§. 372.

§. 372. Aufg. Es sollen Brüche gleichnamig gemacht werden, §. 27, daß sie zugleich den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner erhalten.

Auflös. Man suche die kleinste Zahl G, die von den gegebenen Nennern gemessen wird, §. 367. 369. 371. so ist solche der gesuchte Nenner. Dividirt man G mit jedem der gegebenen Nenner: so erhält man zum Quotienten eine ganze Zahl, die mit jedem der gegebenen Zähler multiplicirt, den solchem Bruche zugehörigen neuen Zähler giebt.

Exempel 1. Für zwey Brüche $\frac{51}{84}, \frac{37}{63}$. Man suche die Verhältniß der gegebenen Nenner in den kleinsten Zahlen 84:63=4:3, §. 357: so ist 84.3=63.4, §. 360=252=G, §. 367; da dann $\frac{G}{84}=3$, und $\frac{51.3}{84}=\frac{153}{252}$; auch eben so $\frac{G}{63}=4$, und $\frac{37.4}{63.4}=\frac{148}{252}$.

	252	
$\frac{51}{84}$	3	153
$\frac{37}{63}$	4	148

Exempel 2. Für drey Brüche $\frac{51}{84}, \frac{37}{63}, \frac{25}{42}$. Man suche für zwey Nenner 84, 63, wie zuvor G=252. Geht hierin der dritte Nenner auf (wie hier $\frac{252}{42}=6$) so ist G der gesuchte Nenner, womit man wie zuvor verfährt.

	252	
$\frac{51}{84}$	3	153
$\frac{37}{63}$	4	148
$\frac{25}{42}$	6	150

Wäre aber der dritte Bruch $\frac{25}{49}$, daß 49 in G nicht aufgeht: so suche man die Verhältniß 252:49 in den kleinsten Zahlen=36:7, §. 357: so ist 252.7=49.36=1764, der gesuchte Nenner, womit man wie oben verfährt.

	1764	
$\frac{51}{84}$	21	1071
$\frac{37}{63}$	28	1036
$\frac{25}{49}$	36	900

Anm. Daß die Brüche bey dieser Operation ihren Werth behalten, und einen gemeinschaftlichen Nenner G bekommen, erhellet aus der Auflösung. Dieser Nenner G aber ist auch der kleinste, den sie zusammen bekommen können.

nen. Denn wäre ein kleinerer, so müßten die gegebenen Nenner darin aufgehen. Folglich wäre G nicht die kleinste Zahl, die von den gegebenen Nennern gemeſſen wird; gegen das Erwieſene §. 367. 369.

§. 373. Lehrſ. Sind vier Zahlen proportionirt, A:B=C:D; ſo verhalten ſich

1) die Summen oder Differenzen der homologen Glieder, wie die beyden erſten oder letzten,

$$A \pm C : B \pm D = A : B = C : D.$$

2) Die Summen oder Differenzen der beyden erſten oder letzten, wie die homologen Glieder, $A \pm B : C \pm D = A : C = B : D$.

Bew. 1) Da $AD = BC$ §. 360: ſo iſt $AD \pm CD = BC \pm CD$, d. i. $(A \pm C)D = (B \pm D)C$, folglich $A \pm C : B \pm D = C : D$, §. 365.

2) Eben ſo iſt $AD \pm BD = BC \pm BD$, d. i. $(A \pm B)D = (C \pm D)B$, folglich $A \pm B : C \pm D = B : D = A : C$.

§. 374. Zuſ. 1. Aus der letzten Proportion §. 373. folgt durch Verwechſelung $A + B : B = C \pm D : D$, oder $A \pm B : A = C \pm D : C$, und hieraus durch Umkehrung $A : A \pm B = C : C \pm D$.

§. 375. Zuſ. 2. Auch bey mehr als zwey gleichen Verhältniſſen $A:B = C:D = E:F = G:H$ u. ſ. w. giebt jede die Verhältniß der Summen aller homologen Glieder. Denn aus §. 373 hat man $A + C : B + D = E : F$, und hieraus $A + C + E : B + D + F = G : H$ u. ſ. w.

§. 376. Anm. Man pflegt auch wohl mehrere gleiche Verhältniſſe ſo anzuſetzen, daß man die homologen Glieder auf eine Seite des Gleichheitszeichens zuſammenbringt. Auf dieſe Art ſetzt man die Verhältniſſe in §. 375. $A : C : E : G = B : D : F : H$, welcher Anſatz auch nach §. 364. ſo geleſen werden kann: $A : C = B : D ; C : E = D : F ; E : G = F : H$.

§. 377.

§. 377. Lehrs. Werden die Glieder zweyer Proportionen nach der Ordnung mit einander multiplicirt: so sind die Producte in der Ordnung auch proportionirt.

Oder: ist $\left.\begin{matrix} a:b=c:d \\ e:f=g:h \end{matrix}\right\}$ und so ist $ae:bf=cg:dh$.

Bew. Aus der ersten Proportion folgt $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, und aus der zweyten $\frac{f}{e}=\frac{h}{g}$, und hieraus $\frac{bf}{ae}=\frac{dh}{cg}$, folglich $ae:bf=cg:dh$.

Anmerkung. Auch gilt der Satz von der Division. Denn aus den Proportionen hat man $ad=bc$, und $eh=fg$, folglich $\frac{ad}{eh}=\frac{bc}{fg}$, oder $\frac{a}{e}\cdot\frac{d}{h}=\frac{b}{f}\cdot\frac{c}{g}$, folglich $\frac{a}{e}:\frac{b}{f}=\frac{c}{g}:\frac{d}{h}$. §. 365.

§. 378. Zus. 1. Der Satz §. 377. gilt auch von mehrern Proportionen, welches erhellet, wenn man die beiden ersten durch Multiplication verbindet, mit dieser neuen die dritte u. s. w.

§. 379. Zus. 2. Sind vier Zahlen proportionirt, $a:b=c:d$, so sind auch ihre Potenzen sowohl als Wurzeln von seinerley Grade in der Ordnung proportionirt, d. i. $a^m:b^m=c^m:d^m$; und $\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}=\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}$.

Das erste erhellet, wenn man die gegebene Proportion m mal unter einander setzt, und die Glieder nach der Ordnung multiplicirt; das zweyte aber also: Gesetzt es wäre nicht $\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{c}:\sqrt[m]{d}$, so wäre auch nicht $a:b=c:d$, gegen das Angenommene.

§. 380. Zus. 3. Sind mehrere Zahlen A, B, C, D, u. s. w. mit eben so vielen andern E, F, G, H, je zwey von

jenen mit je zweyen von dieſen, in einerley oder entgegengeſetzter Ordnung, proportionirt: ſo ſind, mit Weglaſſung der mittlern, die äußerſten von jenen und dieſen proportionirt. Dieſe Schlußart nannten die Alten: ex aequo ordinatim et perturbate. Es iſt nämlich

ordinatim	perturbate.
A:B=E:F	A:B=G:H
B:C=F:G	B:C=F:G
C:D=G:H	C:D=E:F

Folglich ex aequo A:D=E:H.

Dieſes erhellet, wenn man die gegebenen Proportionen nach §. 379 verbindet, und hierauf mit den Producten aus den mittlern Gliedern dividirt. §. 352.

§. 381. Zuſ. 4. Sind mehrere Zahlen a, b, c, d u. ſ. w. ſtetig proportionirt: ſo verhalten ſich die erſte und dritte, wie die Quadrate der beiden erſten; die erſte und vierte, wie die Würfel der beiden erſten u. ſ. w. folglich auch die beiden erſten wie die Quadratwurzeln aus dem erſten und dritten, oder wie die Cubikwurzeln aus dem erſten und vierten u. ſ. w. Denn da

$$\left.\begin{array}{l} a:b=a:b \\ a:b=b:c \\ a:b=c:d \end{array}\right\} \text{ſo iſt } a^2:b^2=a:c \quad a^3:b^3=a:d \text{ u. ſ. w.}$$

folglich auch $a:b=\sqrt{a}:\sqrt{c}=\sqrt[3]{a}:\sqrt[3]{d}$ u. ſ. w.

5. Die ſogenannten Rechnungsregeln.

§. 382. Aufg. Zu drey Zahlen a, b, c, die vierte Proportionalzahl x zu finden, daß nämlich a:b=c:x.

Auflöſ. Da $ax=bc$ §. 360: ſo iſt $x=\frac{bc}{a}$, d. i. man findet x, wenn man die zweyte mit der dritten multiplicirt,

eint, und das Product mit der ersten dividirt. (Wäre $c=b$, so wäre $x=\frac{b^2}{a}$, wodurch man zu zwey Zahlen a, b, die dritte Proportionalzahl x findet.

§. 383. Anm. 1. Man nennt dies die Regel Detri, die im gemeinen Leben und in den Wissenschaften häufig angewandt wird, aber allemal voraussetzt, daß die Dinge, von denen die Rede ist, proportionirt sind, d. i. daß jedesmal das eine Paar sich wie das andre verhalte, welches man also vorher wohl zu beurtheilen hat; wozu folgende Bemerkungen dienlich seyn werden:

1) Will man zwey Dinge so mit einander vergleichen, daß man durch das eine Ding die Größe des andern bestimme: so kann dies geschehen, wenn man beide Dinge nach einerley Maaße durch Zahlen ausdrückt, und forscht, wie oft die eine Zahl in der andern stecke. Solche Zahlen heißen die Verhältnißzahlen dieser Dinge, weil sie ihre (geometrische) Verhältniß angeben. §. 312.

Z. E. In dem Anhange sind §. 13 verschiedene Fußmaaße nach Scrupeln des Pariser Fußes bestimmt, und dadurch ihre Verhältnißzahlen gefunden. Eben dies ist daselbst §. 3. 5. 8 mit dem Handels- Apotheker und Silbergewichte geschehen u. s. w.

2) Man ersieht hieraus, daß blos Dinge von einerley Art, die entweder einerley Namen haben, oder sich auf einerley Namen bringen lassen, eine Verhältniß zu einander haben können. Zwar scheint es bisweilen, als ob man Dinge von verschiedener Art mit einander vergleiche, wenn man z. E. die Verhältniß des Wassers zum Kupfer, des Vermögens zu den Schulden, der Gebornen zu den Gestorbenen u. s. w. anzeigt; allein im ersten Falle ist vom Gewichte, im zweyten vom Gelde, im dritten von Menschen die Rede.

3) Dinge verschiedener Art sind mit einander proportionirt, wenn beide Arten zugleich nach einerley Zahl wachsen und abnehmen. Dahin gehören theils alle Größen, die einander gleich sind, als 1 Fuß = 12 Zoll; theils, die sich als Ursache und Wirkung betrachten lassen, als Gewicht der Waare und Größe des Preises; Menge der Arbeiter und Größe der Arbeit; Zahl der Menschen und Menge der Lebensmittel; Größe des Capitals und Größe der Zinsen, u. s. w. Wenn man z. E. sagt: 100 thlr. Capital bringt 5 thlr. Zinsen; so heißt das eigentlich, jedes Capital von 100 thlr. bringt 5 thlr. Zinsen; so daß für jedes Vielfache dieses Capitals

eben

eben dies Vielfache dieſer Zinſen zu ſetzen iſt, oder mit welcher Zahl man das Capital multiplicirt, mit eben der Zahl auch die Zinſen multiplicirt werden müſſen. Daher dann das eine Capital in dem andern ſo oft ſteckt, als die Zinſen des erſten in den Zinſen des andern; folglich Capital und Zinſen in Proportion ſind. Z. E. 100 thlr. Cap: 1000 thlr. Cap. = 5 thlr. Zinſen: 50 thlr. Zinſen.

4) Zuweilen ſind Dinge verſchiedner Art mit einander ſo proportionirt, daß die eine Art nach eben der Zahl abnimmt, nach welcher die andre wächſt; folglich in umgekehrter Ordnung, wenn ſich ein Paar Zahlen umgekehrt wie ein Paar andre verhalten. Man nennt dies die verkehrte Regel Detri, regula trium inverſa, da vorige die gerade, directa, heißt. Dahin gehören alle Größen in ſolcher Beziehung, daß mit derſelben Zahl, womit man die eine multiplicirt, die andre dividirt werden muß. Z. E. die Menge der Arbeiter, und die Größe der Zeit; desgleichen die Zahl der Menſchen, und die Zeit, wie lange ſie mit dem Vorrath an Lebensmitteln ausreichen u. d. m. Wenn z. E. zu einer gewiſſen Arbeit x Arbeiter y Tage gebrauchen: ſo werden nx Arbeiter in $\frac{y}{n}$ Tagen mit dieſer Arbeit fertig; da hingegen $\frac{x}{n}$ Arbeiter ny Tage dazu nöthig haben.

§. 384. Anmerk. 2. Aus obigen §. 383. iſt die Art des Anſatzes (die Anordnung der Glieder) leicht zu beurtheilen. Z. E. will man wiſſen, wieviel Groſchen 1 ℔ einer gewiſſen Waare gilt, wenn 7 Centner davon 19 thlr 8 gl. gelten: ſo hat man dieſe Proportion: 7 Centner: 1 ℔ = 19⅔ thlr: x ggl. d. i. wie die Gewichte der Waaren, ſo die Preiſe, §. 383. num. 3. Wollte man aber wiſſen, wieviel Tage 7 Arbeiter auf ein gewiſſes Werk zubringen werden, wenn 3 Arbeiter ſolches in 4 Tagen vollenden: ſo hat man dieſe Proportion: 17 Arb: 13 Arb. = 54 T: x T. d. i. die Zeiten der Arbeiter umgekehrt wie die Zahl der Arbeiter §. 383. num. 4. Auch kann man nach §. 356 den Anſatz ſo machen: $\frac{1}{17}$ Arb: $\frac{1}{13}$ Arb. = 54 T: x T.

§. 385. Anmerk. 3. Sind die Glieder einer jeden der beiden Verhältniſſe nach einerley Einheiten bereits beſtimmt, oder, wenn dies nicht iſt, darauf reducirt: ſo betrachte man das Exempel als eine Proportion in unbenannten Zahlen, hebe nach §. 353 das erſte und zweyte, desgleichen das erſte und dritte Glied gegen einander auf, ſoviel es ſich thun läßt, und berechne x nach §. 382. Auch könnte man ſogleich x in Form eines Bruchs anſetzen, und

dann

dann erst die Glieder im Zähler und Nenner gegen einander aufheben.

Exempel der Regel Detri findet man in Rechenbüchern in Menge, die sich nach obiger Anweisung mit Verstande behandeln lassen. Ein gleiches gilt von den Vortheilen, die man bey der Reduction der Glieder anbringen kann, oder der sogenannten wälschen (italienischen) Praktik, welche ein im Rechnen Geübter, wenn er die Gründe der Rechnung versteht, selbst erfindet.

Indeß soll hier noch ein Exempel, wie man beym Geldwechsel zu verfahren habe, beygebracht werden. Da 18 Fl. Hannöversches Cassengeld, oder 20 Fl. Conventionsgeld, oder 21 Fl. Preußisch Courant, 1 Cöln. Mark fein Silber halten: so haben diese einerley innern Werth, der das natürliche Pari zwischen diesen Münzsorten ausmacht. Hievon aber ist der Cours zu unterscheiden, der auf zufälligen Umständen beruhet. Z. E. wird ein Louisd'or mit 5 thlr. Conv. oder mit 5 thlr. 8 ggl. Preußisch Courant, oder mit 4 thlr. 16 ggr. Hannöv. Cassengelde verwechselt: so ist 5 thlr. Conv. $= 5\frac{1}{4}$ thlr. Preuß. Cour. $= 4\frac{4}{5}$ thlr. Hannöv. Casseng. oder 15 thlr. Conv. $= 16$ thlr. Preuß. $= 14$ thlr. Cassengeld.

Gewöhnlich rechnet man beym Geldwechsel nach Procenten. Z. E. 18 Fl. Hannöv. — 21 Fl. Preuß. — 100 Fl. Hannöv. ? Da denn 100 Fl. Hannöv. $= 116\frac{2}{3}$ Fl. Preuß, also jenes um $16\frac{2}{3}$ Procent besser, als dieses.

§. 386. Aufg. Ein Ganzes A in ungleiche Theile, deren Verhältnisse, p, q, r u. s. w. gegeben sind, einzutheilen.

Auflös. Man setze die gesuchten Theile x, y, z, daß $x+y+z=A$: so ist $p:q=x:y$, und $q:r=y:z$, folglich $p:r=x:y$, §. 380. Demnach ist $p:x=q:y=r:z$ §. 364, folglich $p+q+r : A=p:x=q:y=r:z$, §. 375. was auch p, q, r für Zahlen bedeuten mögen.

Man addire also die gegebenen Verhältnißzahlen p, q, r, oder statt ihrer die Quotienten, die durch die Division mit einem gemeinschaftlichen Theiler entstehen, und setze: diese Summe verhält sich zum Ganzen, wie jede der Verhältnißzahlen zu dem ihr zugehörigen Theile.

Sind

Sind die Verhältnisse in Brüchen gegeben: so mache man sie gleichnamig, da sie sich dann wie ihre Zähler verhalten.

§. 387. Anm. 1. Man nennt dies die Theilrechnung, Repartitionsrechnung, wovon eine Anwendung die Gesellschaftsregel, da z. E. ein Gewinnst nach Verhältniß der Beyträge repartirt wird.

§. 388. Anm. 2. Diese Regel erhält den Namen der Vermischungsrechnung, wenn zu einer Mischung die Verhältnisse der Ingredienzen gegeben sind, und man deren Quantitäten für eine gegebene Quantität der Mischung finden soll. Z. E. bey Verfertigung des Schießpulvers rechnet man auf jedes Pfund Salpeter 3 Unzen Kohlen und 2 Unzen Schwefel.

§. 389. Anm. 3. Zuweilen soll das Ganze, das aus ungleichen Theilen besteht, in eben so viel gleiche Theile getheilt werden. Dies heißt den Durchschnitt oder die Mittelzahl finden, wozu auch die Aufgabe gehört, aus der Menge und dem Werthe der gemischten Dinge den mittlern Werth der Mischung zu finden. Z. E.

1.			2.		
12 Mark Silber	14löth.	168 ℔	4 Loth Silber	10löth.	40 ℔
15 " "	11 "	165 "	8 " "	12 "	96 "
3 " "	9 "	27 "	6 " "	14 "	84 "
30		360	18		220

Bey 1. sind in 1 Mark der Mischung $\frac{360}{30} = 12$ Loth fein Silber, bey 2. zeigen die Producte 16theilchen an, und es sind in 1 Loth der Mischung $\frac{220}{18}$ oder $12\frac{4}{9}$ solcher 16theilchen fein Silber.

§. 390. Anm. 4. Alligationsrechnung heißt die Aufgabe: Es sind zwey oder mehrere Dinge von gegebenem Werthe so zu mischen, daß ein gegebener mittlerer Werth herauskomme, und man soll die Quantitäten dieser Dinge finden. Hievon das Nähere in der Algebra.

§. 391. Aufg. Es bedeuten V, v, Ursachen; T, t, Zeiten; E, e, Wirkungen; man soll die Verhältniß der Wirkungen finden.

Auflös.

Auflös. Ist T = t, so ist V : v = E : e, und ist V = v, so ist T : t = E : e. Folglich ist VT : vt = E : e. §. 377.

(Wäre nun E = e: so wäre VT = vt, folglich V : v = t : T. Auch ist $V : v = \frac{E}{T} : \frac{e}{t}$, §. 377. Anm.)

§. 392. Anm. 1. Diese Aufgabe kömmt häufig vor, auch wo nicht selbst Ursachen und Wirkungen vorhanden sind, aber wohl Dinge, die sich nach eben den Grundsätzen verhalten; und heißt die Regel Quinque, oder überhaupt zusammengesetzte Regel Detri, weil man auch mehr als zwey Proportionen auf eben die Art zusammensetzen kann, die von den Rechenmeistern besondere Namen erhalten. Z. E. Regel Septem u. s. w.

§. 393. Anm. 2. Auf eben den Gründen beruhet die sogenannte Kettenregel bey Vergleichungen von Münzen, Maßen, Gewichten u. s. w. wofür diese Form diene:

$$\left.\begin{array}{l} m : n = A : B \\ o : p = B : C \\ q : r = C : D \end{array}\right\} \text{folglich } moq : npr = A : D.$$

§. 394. Anm. 3. Auch gehört hieher die zusammengesetzte Zinsenrechnung, wenn die jährlichen Zinsen mit zum Capital geschlagen, also Zinsen von Zinsen gegeben werden, wozu die Form §. 381 dient. Z. E. man will den Werth von 1 thlr. nach 3 Jahren zu 4 Procenten wissen, so setze man

fürs 1ste Jahr 100 thlr. : 104 thlr. = 1 thlr : x' thlr.
" 2te " 100 thlr. : 104 thlr. = x' thlr. : x'' thlr.
" 3te " 100 thlr. : 104 thlr. = x'' thlr. : x thlr.

folglich $100^3 : 104^3 = 1$ thlr. : x thlr.

und $x = \frac{104^3}{100^3} = 1{,}124864$ thlr.

Hienach ist umgekehrt von 1 thlr., der nach 3 Jahren zahlbar wäre, der baare Werth $y = \frac{100^3}{104^3} = 0{,}888996\,3587$ thlr.

6. Die

6. Die geometrischen Progreßionen.

§. 395. Grundſ. Jedes folgende Glied einer geometrischen Progreßion entſteht, wenn man das nächſtvorhergehende Glied mit dem Verhältnißnamen, wie er auch beſchaffen ſey, multiplicirt. §. 322.

§. 396. Zuſ. 1. Heißt das erſte Glied a, die Zahl der Glieder n, der Verhältnißname e: ſo iſt die allgemeine Form der geometriſchen Progreſſion

1 2 3 4 n
a . ae . ae² . ae³ . . . . . ae^(n−1)

Die überſchriebenen Zahlen ſind die Zeiger, und der letzte Ausdruck das allgemeine Glied, wie §. 330.

§. 397. Zuſ. 2. Man findet jedes der folgenden Glieder R, wenn man irgend eines der vorhergehenden M in die Potenz des Verhältnißnamens multiplicirt, deren Exponent r−1 die Zahl der Glieder von M bis R, weniger Eins iſt. Denn man kann M als das erſte Glied anſehen, da dann R=M e^(r−1) iſt.

Hieraus folgt auch $\frac{R}{e^{r-1}}=M$, wodurch man aus jedem folgenden Gliede R, jedes vorhergehende M findet.

§. 398. Zuſ. 3. Nimmt man aus der Reihe drey oder vier beliebige Glieder, jedoch daß die Zwiſchenglieder von gleicher Anzahl ſeyn: ſo machen ſie eine geometriſche Proportion, weil wegen des gleichen Abſtandes gleiche Verhältnißnamen vorhanden ſind. §. 397. 319.

§. 399. Zuſ. 4. Nimmt man mehrere unmittelbar auf einander folgende Glieder der Reihe: ſo gilt davon der Satz §. 381.

Anmerk. Das Interpoliren der Glieder §. 334. folgt in der Lehre von der Zuſammenſetzung der Verhältniſſe.

§. 400.

§. 400. Lehrs. Die Reihe der Unterschiede einer geometrischen Progreßion ist auch eine geometrische Progreßion, die mit jener einerley Verhältnißnamen hat.

Bew. Die Reihe §. 396. als Hauptreihe betrachtet, giebt folgende Differenzreihe:

$ae - a.\ ae^2 - ae.\ ae^3 - ae^2$ u. s. w. d. i. $(e-1)a.\ e(e-1)a.\ e^2(e-1)a$ u. s. w. wo der Verhältnißname e, wie in der Hauptreihe.

§. 401. Zus. 1. Macht man von dieser ersten Differenzreihe §. 400. eine zweyte, von dieser eine dritte u. s. w. so gilt der Satz auch von der zweyten, folglich von der dritten u. s. w. von allen folgenden.

§. 402. Zus. 2. Da das erste Glied der Hauptreihe a, der ersten Differenzreihe $(e-1)a$, und der zweyten $e^2a - ea - (ea - a)$ d. i. $e^2a - 2ea + a$, oder $(e^2 - 2e + 1)a$, d. i. $(e-1)^2a$, so ist $= a.(e-1)a.(e-1)^2a$, wo der Verhältnißname $e-1$ ist.

§. 403. Zus. 3. Nennt man die ersten Glieder der Hauptreihe und der Differenzreihen in der Ordnung p, q, r, s, t u. s. w. so machen auch diese eine geometrische Progression, deren Name $(e-1)$.

Denn dies gilt von p, q, r, §. 402. Nun kann die erste Differenzreihe als eine Hauptreihe angesehen werden, folglich gilt es auch von q, r, s. Aus eben den Gründen gilt es auch von r, s, t u. s. w.

§. 404. Lehrs. In jeder geometrischen Reihe ist das Product der äußersten Glieder dem Producte jeder zweyer davon gleichweit entfernter Glieder, und wenn die Zahl der Glieder ungerade ist, dem Quadrate des mittelsten Gliedes gleich.

Bew. 1) Stehen zwey Glieder, welche man will von den äußersten gleichweit ab, so machen sie mit ihnen eine geometrische Proportion, §. 398. da dann der Satz aus §. 369. erhellet. 2) Eben so steht das mittelste Glied von den äußersten gleichweit ab, und macht mit ihnen eine stetige Proportion, §. 398, da dann der Satz aus §. 361. erhellet.

Anderer Beweis. 1) Bedeuten a und u die äußersten Glieder, so ist nach §. 397. das rte Glied vom Anfange $a.e^{r-1}$, und das rte Glied vom Ende $\frac{u}{e^{r-1}}$, folglich ihr Product au. 2) Bedeutet bey ungerader Anzahl der Glieder das rte Glied das mittelste, so ist solches zugleich das rte vom Anfange und Ende, folglich $=\sqrt{au}$.

§. 405. Lehrs. In jeder geometrischen Reihe verhält sich das erste Glied zum zweyten, wie die Summe aller Glieder weniger dem letzten zur Summe aller Glieder weniger dem ersten. Oder: Nennt man die beiden ersten Glieder a, b, das letzte u, die Summe aller Glieder S, so ist $a:b=S-u:S-a$.

Bew. Da die Glieder der Reihe in gleichen stetigen Verhältnissen fortgehen, so sind alle, außer dem letzten, Vorderglieder, deren Summe also $S-u$, und alle, außer dem ersten, Hinterglieder, deren Summe also $S-a$. Demnach ist $a:b=S-u:S-a$. §. 375.

§. 406. Lehrs. Heißt die Summe einer geometrischen Reihe S, das erste Glied a, der Verhältnißname e, die Zahl der Glieder n, folglich das letzte Glied $ae^{n-1}=u$, so ist $S=\frac{ue-a}{e-1}=\frac{ae^n-a}{e-1}=\frac{(e^n-1)a}{e-1}$.

Bew.

Bew. 1) Da $a:ae=S-u:S-a$, §. 405. so ist $ae-a:a=u-a:S-u$, §. 374. folglich $S-u=\frac{(u-a)a}{ae-a}$, §. 382. $=\frac{u-a}{e-1}$, folglich $S=\frac{u-a}{e-1}+u$ $=\frac{u-a+ue-u}{e-1}=\frac{ue-a}{e-1}$. 2) Nun ist $a=ae^{n-1}$, und daher $ue-ae^n$. Folglich ist auch $S=\frac{ae^n-a}{e-1}=\frac{(e^n-1)a}{e-1}$.

Andrer Bew. Da $S=a+ae+ae^2\ldots+ae^{n-1}$, so ist $eS=ae+ae^2+ae^3\ldots ae^n$, folglich, wenn man die erste Reihe von der zweyten subtrahirt, $(e-1)S=ae^n-a$, folglich $S=\frac{ae^n-a}{e-1}=\frac{ue-a}{e-1}$.

§. 407. Zus. 1. Für die steigende Reihe ist e ein unächter Bruch, folglich in dem Ausdruck für S §. 406. Zähler und Nenner bejahend; für die fallende Reihe ist e ein ächter Bruch, folglich Zähler und Nenner verneinend, also der Quotient doch bejahend. Er bleibt ungeändert, wenn man beide bejahend macht, und hier setzt $S=\frac{a-ue}{1-e}$ $=\frac{a-ae^n}{1-e}=\frac{(1-e^n)a}{1-e}$.

§. 408 Anm. Diese Formel §. 407. findet man auch unmittelbar, wenn man in dem zweyten Beweise §. 406. die 2te Reihe von der ersten subtrahirt, desgleichen wenn man die erste Reihe $S=a(1+e+e^2\ldots e^{n-1})=aP$ setzt, da dann aus §. 191. $\frac{1}{1-e}=P+\frac{e^n}{1-e}$, folglich $\frac{1-e^n}{1-e}=P$, folglich $S=\frac{(1-e^n)a}{1-e}$, woraus sich umgekehrt die Formel §. 399. herleiten läßt.

§. 409. Zus. 2. Heißt das zweyte Glied der Reihe b, so ist $e=\frac{b}{a}$, daher sich eins für das andre setzen läßt.

§. 410. Zuſ. 3. Aus obigen Formeln §. 406. 407. laſſen ſich u und S finden, wenn a, n, und e oder b gegeben ſind.

Z. E. 1) $a=5$, $e=3$, $n=4$ geben $u=ae^{n-1}=5.27=135$, und $S=\frac{ue-a}{e-e}=\frac{405-5}{2}=200$. Die Reihe ſelbſt iſt $\therefore 5.15.45.135$.

2) $a=135$, $e=\frac{1}{3}$, $n=4$, geben $u=ae^{n-1}=135\frac{1}{27}=5$, und $S=\frac{a-ue}{1-e}=\frac{135-\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}}=(135-\frac{5}{3})\frac{3}{2}=200$.

§. 411. Anm. Auf eben die Art ließen ſich größere Exempel berechnen, auch mehrere Aufgaben für geometriſche Reihen auflöſen; aber dieſes, ſo wie mehrere Betrachtungen und Anwendungen geometriſcher Reihen, (deren Natur in der Lehre von Zuſammenſetzung der Verhältniſſe noch genauer entwickelt wird) werden beſſer der Algebra vorbehalten. Hier kann man vorläufig bemerken, daß ſich von den fünf Dingen a, u, e, n, S jede zwey aus den drey übrigen nach §. 406. 407 finden laſſen, ſo daß hier eben die Aufgaben wie §. 342. ſtatt finden, wenn man dort e anſtatt d ſetzt.

7. Die Zuſammenſetzung der Verhältniſſe.

§. 412. Erkl. Hat man zwey oder mehrere ſtetige Verhältniſſe §. 318. a:b, b:c u. ſ. w. ſo ſagt man die Verhältniß des Vorderliedes der erſten zum Hintergliede der letzten, a:c, ſey aus den einzelnen Verhältniſſen zuſammengeſetzt, oder in dieſelben zerlegt.

§. 413. Anm. Weiß man, wie oft a in c ſtecke, ſo kennt man die Verhältniß a:c unmittelbar. Oft aber iſt dieſes nicht der Fall. Weiß man alsdann, daß a in b zwar und b in c 3mal ſtecke, ſo ergiebt ſich daraus, daß a in c 6mal ſtecke, und man erkennt dadurch mittelbar die Verhältniß a:c, die alſo aus obigen zweyen beſteht.

§. 414.

§. 414. Zuſ. 1. Stellt man ſich vor, wozu das Folgende noch näher berechtigen wird, die einzelnen Verhältniſſe ſeyen Theile der zuſammengeſetzten eben ſo, wie die Zahlen, die man addirt, Theile der Summe ſind, ſo kann man ſich auch hier des Additionszeichens bedienen, und ſetzen a:c=(a:b)+(b:c).

§. 415. Zuſ. 2. Da man keinesweges $\frac{c}{a}=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$ ſetzen kann, ſo muß man, wie immer, alſo vorzüglich hier, Verhältniſſe von Quotienten ſorgfältig unterſcheiden. Denn der Quotient iſt der Name der Verhältniß, nicht die Verhältniß ſelbſt, ob man ſich gleich verſtattet, die Verhältniß wie Quotienten zu bezeichnen, §. 313.

§. 416. Zuſ. 3. Wäre a:b=m:n, und b:c=q:r, ſo laſſen ſich dieſe Verhältniſſe für jene ſetzen, und man hätte auch a:c=(m:n)+(q:r). Demnach beſteht die zuſammengeſetzte Verhältniß a:c aus den Verhältniſſen a:b, b:c, oder ſolchen, die jenen gleich ſind, m:n, q:r.

§. 417. Lehrſ. Die Verhältniß zweyer Producte ac, bd iſt aus den Verhältniſſen ihrer Factoren a:b, c:d, zuſammengeſetzt.

Beww. Man ſetze c:d=b:e, wo $e=\frac{bd}{c}$, §. 382, ſo hat man $\left.\begin{matrix}a:b=a:b\\c:d=b:e\end{matrix}\right\}$ folglich ac:bd=a:e, §. 380. Nun iſt a:e=(a:b)+(b:e)=(a:b)+(c:d) §. 416, folglich iſt auch ac:bd=(a:b)+(c:d)

§. 418. Zuſ. 1. Die zuſammengeſetzte Verhältniß iſt daher die Verhältniß des Products aus den Vordergliedern zum Product aus den Hintergliedern. Und ſo laſſen ſich auch drey und mehrere Verhältniſſe zuſammenſetzen, daß a:b+c:d+e:f=ace:bdf.

Sind dergleichen Verhältnisse nicht stetig, so kann man sie nach §. 382, dazu machen, daß

$$\left.\begin{array}{l} a:b=A:B \\ c:d=B:C \\ e:f=C:D \end{array}\right\} \text{folglich } ace:bdf=A:D.$$

Die Kettenregel §. 393. ist daher eine solche Zusammensetzung der Verhältnisse.

§. 419. Zus. 2. Da $(a:b)+(c:c)=ac:bc=a:b$, so ist die Verhältniß der Gleichheit $c:c$ §. 349. bey der Zusammensetzung der Verhältnisse als Null anzusehen.

§. 420. Zus. 3. Da $(a:b)+(b:a)=ab:ba=1:1=0$ §. 412, so wird jede Verhältniß $a:b$ durch ihre umgekehrte $b:a$, §. 350, bey der Zusammensetzung der Verhältnisse aufgehoben, daß also beide einander entgegengesetzt sind, und eine die Verneinung der andern ist, §. 120. Bezeichnet man daher die gerade Verhältniß $+(a:b)$, so ist ihre umgekehrte $-(a:b)$, welches also soviel gilt als $b:a$, oder $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$ §. 356.

Z. E. $(P:Q)+(a:b)-(a:b)=P:Q$, und $(P:Q)+(a:b)+(b:a)=Pab:Qba=P:Q$, wobey also $a:b$ und $b:a$ einander eben so aufheben, als $+(a:b)-(a:b)$.

§. 421. Zus. 4. Sind die einzelnen Verhältnisse $a:b$, $c:d$, $e:f$ u. s. w. alle einander gleich, so ist jede derselben ein **aliquoter Theil** der daraus zusammengesetzten, und diese ein **Vielfaches** eines solchen Theils. Die Zahlen, welche solchen Theil oder solches Vielfache, d. i. die Theilung oder Vervielfältigung einer Verhältniß anzeigen, sollen die **Exponenten der Verhältniß** (eigentlich ihrer Theilung und Vervielfältigung) heißen.

Denn ist $a:b=c:d=e:f$, und $M:N=a:b+c:d+e:f$, so ist $M:N=a:b+a:b+a:b=3(a:b$, folglich $a:b=\frac{1}{3}(M:N)$, wo 3 und $\frac{1}{3}$ die Exponenten sind.

§. 422.

§. 422. Anm. Hiebey iſt das Vielfache der Verhältniß von der vielfachen Verhältniß wohl zu unterſcheiden. Im Lateiniſchen ſagt man hier ratio multiplicata, nicht multipla, und insbeſondere duplicata, triplicata, ſubduplicata, ſubtriplicata, nicht aber dupla, tripla, ſubdupla, ſubtripla.

§. 423. Zuſ. 5. Von einer Verhältniß wird ein Vielfaches oder ein Theil eines gegebenen Exponenten gemacht, wenn man von den Gliedern der Verhältniß die Potenz oder die Wurzel dieſes Exponenten macht.

Denn es iſt $M:N = a.b + a:b + a:b = a^3 : b^3 = 3(a:b)$,

folglich auch $a:b = \sqrt[3]{M} : \sqrt[3]{N} = \frac{1}{3}(M:N)$.

§. 424. Anm. Aus allem Bisherigen erhellet, daß zwiſchen Zahlen und Verhältniſſen eine genaue Analogie herrſche, und man mit dieſen, ſo wie mit jenen, die arithmetiſchen Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication und Diviſion vornehmen könne, daß auch Verhältniſſe ſo wie Zahlen einander entgegengeſetzt ſeyn können.

Dieſe Analogie wird dadurch noch mehr beſtätigt, wenn man bedenkt, daß bey jeder Zahl die Einheit zum Grunde liegt, und eine Zahl nichts anders, als die Verhältniß der Menge zur Einheit iſt, ob man ſolches gleich nicht ausdrücklich anzeigt. Z. E. unter der Zahl 3 denkt man ſich eigentlich die Verhältniß 1:3.

Auch läßt ſich jede Verhältniß m:n auf dieſe Form $1 : \frac{n}{m}$ oder 1:a bringen, welches der Uebereinſtimmung und nächſten Abſicht wegen im Folgenden immer beobachtet werden ſoll.

§. 425. Lehrſ. Eine geometriſche Reihe (§. 322.), die ſich mit Eins anfängt, enthält lauter Potenzen des zweyten Gliedes a, deren Exponenten die natürlichen Zahlen ſind, und daher eine arithmetiſche Reihe (§. 322.) machen.

Bew. Iſt m eine ganze Zahl, und a^m irgend ein Glied der Reihe, ſo iſt das nächſtfolgende Glied a^{m+1}, weil $1 : a = a^m : a^{m+1}$ §. 382. Iſt alſo ein Glied der Reihe eine Potenz von a, ſo iſt das nächſtfolgende Glied die

um 1 Grad höhere Potenz von a. Demnach hat man die Reihe $= 1.a^1.a^2.a^3.a^4a^5 \ldots a^n$.

Anm. Jede geometrische Reihe erhält diese Form, wenn man alle Glieder mit dem ersten Gliede dividirt, §. 352. Auch kann man $1 = a^0$ setzen, §. 158.

§. 426. Zus. 1. Die Exponenten der Potenzen in §. 425. bedeuten zugleich und eigentlich das Vielfache, oder die Vervielfältigung einer und ebenderselben Grundverhältniß $1:q$; daß nämlich $1:a^0 = 0(1:a)$, $1a^1 = 1(1:a)$, $1:a^2 = 2(1:a)$, und allgemein $1:a^n = n(1:a) = 1^n:a_n$.

§. 427. Zus. 2. Sind zwey oder mehrere Verhältnisse durch einerley Grundverhältniß $1:a$ ausgedrückt, so geschieht ihre Zusammensetzung durch die bloße Addition ihrer Exponenten; z. E. $(1:a^3) + (1:a^2) = (1:a^5)$ weil $1:a^3 = 1:a + 1:a + 1:a = 3(1:a)$, und $1:a^2 = 1:a + 1:a = 2(1:a)$.

§. 428. Zus. 3. Schreibt man die Reihe in §. 425. $= 1.a.b.c.d.e \ldots q$, daß $q = a^n$, folglich zwischen 1 und q, $n-1$ mittlere Proportionalzahlen sind, so kann man sich auch vorstellen, daß die Verhältniß $1:q$ in n Theile getheilt sey, da dann $1:a = \frac{1}{n}(1:q)$; $1:b = \frac{2}{n}(1:q)$; $1:c = \frac{3}{n}(1:q)$ u. s. w. endlich $1:q = \frac{n}{n}(1:q) = 1:q$ ist.

§. 429. Zus. 4. Die nte Wurzel aus einer Zahl q ziehen, heißt die Verhältniß $1:q$ in n gleiche Theile theilen, oder zwischen 1 und q $n-1$ mittlere Proportionalzahlen setzen, von denen die erste a die verlangte Wurzel aus q ist.

Denn man hat $1:q = 1^n:a^n$. Nun ist $1 = 1^n$, folglich ist auch $q = a^n$, folglich $\sqrt[n]{q} = a$.

§. 430. Zus. 5. Will man die Wurzeln nach Art der Potenzen ausdrücken, so schreibe man, der Analogie mit

§. 426.

§. 426 gemäß, die Exponenten der Verhältniß 1:q in §. 428 als Exponenten der Zahl q, da dann die Reihe §. 428 heißt $\frac{1}{n}$ $\frac{2}{n}$ $\frac{3}{n}$ $\frac{n}{n}$
$1 . q^{n} . q^{n} . q^{n} \ldots . q^{n}$, deren Glieder alſo als Potenzen, aber mit gebrochenen Exponenten erſcheinen, die auch eine arithmetiſche Reihe machen.

Wie ſehr dieſe Form mit den vorhergehenden Lehren übereinſtimme, fällt in die Augen. Denn man hat $1:q = 1^{n}:a^{n} = 1^{\frac{1}{n}}:q^{\frac{1}{n}} = 1:q$.

§. 431. Zuſ. 6. Soll demnach eine Verhältniß $1:R^{n}$ in m Theile getheilt, oder aus der Potenz R^{n} die mte Wurzel gezogen werden, ſo braucht man nur den Exponenten n der Verhältniß oder der Potenz durch den Exponenten m der Theilung oder der Wurzel zu dividiren. Nämlich $\frac{1}{m}(1:R^{n}) = 1:R^{\frac{n}{m}}$, oder $\sqrt[m]{R^{n}} = R^{\frac{n}{m}}$. Erſteres heißt auch $\frac{1}{m} . n(1:R) = \frac{n}{m}(1:R) = 1:R^{\frac{n}{m}}$. Dies iſt der §. 153. angedeutete Begriff von Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

§. 432. Zuſ. 7. Sind mehrere ſolche getheilte Verhältniſſe, die aus einerley Grundverhältniß entſtanden ſind, zuſammenzuſetzen, ſo geſchieht dies wie §. 427. durch die bloße Addition der Exponenten. Z. E. Es ſey $1:M = 1:R^{n}$, und $1:N = 1:R^{p}$, ſo iſt $1:M + 1:N = 1:MN = 1:R^{n+p}$

§. 433. Zuſ. 8. Setzt man die Reihe §. 425. rückwärts fort, $\frac{1}{a^{n}} \ldots \frac{1}{a^{3}} \frac{1}{a^{2}} \frac{1}{a^{1}} . 1 . a^{1} . a^{2} . a^{3} \ldots a^{n}$; ſo ſind die Verhältniſſe zur Linken der Eins die umgekehrten von

denen, die mit ihnen in gleichem Abſtande der Eins zur Rechten ſtehen, daß $1:a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}:1 = -(1:a^n)$, §. 420.

Von dieſen umgekehrten Verhältniſſen gilt alſo alles das, was im Vorhergehenden von Zuſammenſetzung und Theilung der geraden Verhältniß gelehrt worden, nur daß ihre Exponenten negativ ſind, daher man aus Obigem leicht verſtehen kann, was $1:a^{-m}$ oder $1:a^{-\frac{m}{n}}$ bedeutet, und hiedurch der §. 160. angedeutete Begriff von Potenzen mit negativen Exponenten gegeben iſt.

§. 434. Zuſ. 9. Hieraus erhellet auch, wenn mehrere Verhältniſſe aus einerley Grundverhältniß hergeleitet ſind, daß ihre Zuſammenſetzung, wie §. 431, durch die bloße Addition der Exponenten, ſie mögen poſitiv oder negativ ſeyn, geſchehe, ſo daß $1:R^{\frac{m}{n}} + 1:R^{-\frac{p}{q}} = 1:R^{\frac{m}{n}}.R^{\frac{p}{q}} = 1:R^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$ werde.

§. 435. Lehrſ. Jede Verhältniß $f:a$, kann ohne Ende immerfort ſowohl getheilt, als vervielfältigt werden.

Bew. Zwiſchen 1 und a läßt ſich die mittlere geometriſche §. 362. und zwiſchen den Exponenten 0 und 1 die mittlere arithmetiſche §. 328. Proportionalzahl finden, wodurch die Verhältniß $1:a$ halbirt wird, und man nach §. 430 hat $\therefore 1.a^{\frac{1}{2}}.a^1$.

Eben ſo läßt ſich wiederum $1:a^{\frac{1}{2}}$ ſowohl als $a^{\frac{1}{2}}:a^1$ halbiren, daß $\therefore 1.a^{\frac{1}{4}}.4^{\frac{2}{4}}.4^{\frac{3}{4}}.a^1$, wodurch die Verhältniß $1:a$ in 4 gleiche Verhältniſſe getheilt iſt, §. 428.

Da nun jede dieſer Verhältniſſe ſich wieder halbiren läßt, und dies ohne Ende wiederholt werden kann, ſo iſt klar, daß ſich die Verhältniß $1:a$ durch fortgeſetzte Inter-

pola-

polationen §. 334. ohne Ende theilen laſſe. Vergl. §. 399. Anm.

Nun kann man auch $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1. a^1. a^2. a^3 u. ſ. w. ohne Ende ſetzen, wodurch die Verhältniß 1 : a ſich ohne Ende vervielfältigen läßt.

§. 436. Zuſ. 1. Da in der letzten Reihe §. 435. alle Verhältniſſe gleich ſind, ſo iſt die Theilung der erſten zugleich die Theilung einer jeden der folgenden. Setzt man alſo eine davon, z. E. $1 : a^2$, mit einer in §. 435. getheilten, z. E. $1 : a^{\frac{1}{2}}$, zuſammen, ſo erhält man $1 : a^{2\frac{1}{2}}$, d. i. $1 : a^{\frac{5}{2}}$, die Hälfte von $a^2 : a^3$, oder $a^{\frac{5}{2}}$ die mittlere zwiſchen a^2 und a^3 u. ſ. w.

§. 437. Zuſ. 2. Kehrt man alle dieſe Verhältniſſe um, ſo hat man unmittelbar auch die Theilung und Vervielfältigung der umgekehrten Verhältniſſe. Vergl. §. 432.

§. 438. Zuſ. 3. Da ſich zwiſchen jede zwey Zahlen P, S, eine unzählige Menge mittlerer Proportionalzahlen ſetzen läßt, die nach und nach zu oder abnehmen, je nachdem $P < \text{oder} > S$ iſt, ſo werden ſolche nach und nach durch alle Werthe gehen, die ſich zwiſchen P und S befinden, daß alſo eine Zahl, die zwiſchen P und S fällt, einer von dieſen Proportionalzahlen nothwendig gleich ſeyn wird.

§. 439. Zuſ. 4. Demnach läßt ſich jede Verhältniß A, B, aus irgend einer angenommenen Grundverhältniß $1 : a$ herleiten. Denn ſetzt man $A:B = 1 : \frac{B}{A} = 1 : R$, wo R entweder der a^n gleich oder ungleich iſt, und ſich im letztern Falle entweder zwiſchen a^{n-1} und a^n, oder zwiſchen a^n und a^{n+1} befindet, folglich einer der dazwiſchen befindlichen Proportionalzahlen $a^{\frac{p}{q}}$ gleich iſt, §. 438, ſo kann 1 R:

R entweder durch $1 : a_n$, oder durch $1 : a^n$ ausgedrückt werden.

8. Die Logarithmen.

§. 440. Erkl. Ein System von Verhältnissen heißt die ganze Folge aller möglichen Verhältnisse, die man als aus einer und derselben Grundverhältniß hergeleitet, §. 439, betrachtet.

§. 441. Zus. Das System von Verhältnissen beruhet auf der Grundverhältniß, und wird bestimmt, wenn die Grundverhältniß bestimmt ist. Da man nun jede Verhältniß zur Grundverhältniß annehmen kann, so ist eine unzählige Menge von Systemen möglich.

§. 442. Erkl. Hat man ein gewisses System von Verhältnissen angenommen, auch für die Grundverhältniß eine beliebige Größe L, und für alle übrigen Verhältnisse andre Größen festgesetzt, die aus L eben so, wie ihre zugehörigen Verhältnisse aus der Grundverhältniß erwachsen, so nennt man diese Größen, die sich wie die Exponenten der Verhältnisse verhalten, die Maaße oder Logarithmen der ihnen zugehörigen Verhältnisse, und die ganze Folge dieser einem gewissen Systeme von Verhältnissen zugehörigen Logarithmen ein System von Logarithmen, oder ein logarithmisches System.

§. 443. Anm. 1. Man kann für den Logarithmus L der Grundverhältniß eine beliebige Größe von jeder Art (eine Zahl, Linie, Fläche, Körper u. s. w.) setzen, da dann die übrigen Logarithmen von eben der Art werden. Setzt man für L eine Zahl, so werden die übrigen Logarithmen auch Zahlen, und heißen im eigentlichen Verstande Logarithmen, λογων αριθμοι, Zahlen der Verhältnisse.

§. 444. Anm. Setzt man die Grundverhältniß $1 : a$, daß man die Reihe §. 425. erhält, so können die Logarithmen dieser

Ver-

Verhältniſſe auch Logarithmen der Zahlen dieſer Reihe (unter denen man ohnedem immer ihre Verhältniß zur Einheit verſtehe, §. 424.) der Kürze wegen heißen. So wäre z. E. $\frac{p}{q}L = \log a^{\frac{p}{q}}$ eigentlich $\log\left(1 : a^{\frac{p}{q}}\right)$, d. i. der Logarithmus einer Zahl N eigentlich der Logarithmus der Verhältniß 1:N.

§. 445. Zuſ. 1. Da die Logarithmen durch ihre Verhältniß gegen L die Ableitung der zugehörigen Verhältniſſe aus 1:a anzeigen ſollen, ſo müſſen gleiche Verhältniſſe auch gleiche Logarithmen haben. Soll man daher gleiche Verhältniſſe 1:a und 1:a zuſammenſetzen, oder eine Verhältniß $1 : a$ in gleiche Theile $1 : a^{\frac{1}{2}}$ und $1 : a^{\frac{1}{2}} : a$ theilen, ſo muß man im erſten Falle zwey gleiche Logarithmen 1L und 1L zuſammenſetzen, um 2L als den Logarithmus der zuſammengeſetzten Verhältniß $1 : a^2$ zu erhalten, und im zweyten Falle ihren Logarithmus L in gleiche Logarithmen $\frac{1}{2}L$ und $\frac{1}{2}L$ theilen, um den Logarithmus eines jeden Theils zu erhalten.

Oder allgemein: So wie der Exponent einer abgeleiteten Verhältniß ein Vielfaches oder Theil des Exponenten der Grundverhältniß 1:a iſt, ſo muß auch der Logarithmus der abgeleiteten ein eben ſo Vielfaches oder Theil von L ſeyn, und wird alſo gefunden, wenn man L mit dem Exponenten der abgeleiteten Verhältniß multiplicirt.

§. 446. Zuſ. 2. Setzt man daher L = 1, ſo ſind die Exponenten der Verhältniſſe zugleich ihre Logarithmen.

§. 447. Zuſ. 3. In jedem Syſteme iſt der Logarithmus der Verhältniß der Gleichheit, oder der Logarithmus der Einheit = 0, §. 419. 426.

§. 448. Zuſ. 4. In jedem Syſteme hat die gerade Verhältniß mit ihrer umgekehrten, oder die Zahl N mit dem

dem Bruche $\frac{1}{N}$, einerley Logarithmus, nur daß die Zeichen entgegengesetzt sind, §. 433.

§. 449. Zus. 5. Der Logarithmus der zusammengesetzten Verhältniß ist die Summe der einzelnen Logarithmen, sie mögen positiv oder negativ seyn.

§. 450. Lehrs. Man findet den Logarithmus 1) eines Products, wenn man die Logarithmen der Factoren addirt, 2) eines Quotienten, wenn man vom Logarithmus des Zählers den Logarithmus des Nenners subtrahirt.

Bew. 1) log pq ist eigentlich log (1 : pq). Nun ist 1 : pq = 1 : p + 1 : q. Folglich ist log (1 : pq) = log (1 : p) + log (1 : q) §. 445. oder log pq = log p + log q.

2) $\log \frac{n}{m}$ ist eigentlich $\log\left(1 : \frac{n}{m}\right) = \log (m : n)$. Nun ist m : n = 1 : n + m : 1 = 1 : n − 1 : m. Folglich ist $\log\left(1 : \frac{n}{m}\right) = \log 1 : n - \log (1 : m)$ §. 449. oder $\log \frac{n}{m} = \log n - \log m$.

§. 451. Lehrs. Man findet den Logarithmus 1) einer Potenz, wenn man den Logarithmus der Wurzel mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt, 2) einer Wurzel, wenn man den Logarithmus der Potenz mit dem Exponenten der Wurzel dividirt.

Bew. 1) log a^3 ist eigentlich log $(1 : a^3)$. Nun ist $1 : a^3 = 1 : a + 1 : a + 1 : a$. Folglich ist log $(1 : a^3) = \log 1 : a + \log 1 : a + \log 1 : a = 3 \log (1 : a)$ oder $\log a^3 = 3 \log a$.

2) Aus $\log a^3 = 3 \log a$ folgt unmittelbar $\frac{\log a^3}{3} = \log a$.

§. 450.

§. 452. Erkl. Setzt man die Grundverhältniß 1:10, und ihren Logarithmus 1, so hat man das gemeine System, oder das Briggisch-Vlacquische, wo N die Reihe der Decimalzahlen, und L die Reihe der Logarithmen, welche hier die Exponenten der Verhältnisse selbst sind.

N) 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000.

L) 0. 1. 2. 3. 4. 5.

§. 453. Anm. Nach Anweisung des §. 435. 439 hat man auf eine mühsame Art die Zwischenverhältnisse in N und die zugehörigen Logarithmen in L berechnet, aber von diesen nur diejenigen in die Tafeln gebracht, welche Verhältnissen, die durch ganze Zahlen ausgedrückt werden, zugehören, und, der Kürze wegen, Logarithmen solcher Zahlen (unter denen man immer ihre Verhältniß zur Einheit versteht §. 424.) heißen. So ist z. E. log 9: in den Tafeln eigentlich log (1:9) und so auch bey den übrigen. §. 444.

Obige Berechnung der Logarithmen brauchte nur für die Primzahlen zu geschehen, aus denen sich die Logarithmen für die zusammengesetzten Zahlen nach §. 454. 451. bestimmen lassen. Auch waren nur Tafeln für ganze Decimalzahlen nöthig, die für Decimalbrüche dieselben bleiben, nur daß sie negativ sind.

§. 454. Erkl. Die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 sind > 0 und < 1, derer zwischen 10 und 100 sind > 1 und < 2 u. s. w. Da man sie nun durch Decimalzahlen anzeigt, so besteht jeder aus einer ganzen Zahl und aus einem Decimalbruche, wovon jener die Kennziffer oder Charakteristik, dieser aber die Mantissa heißt.

§ 455. Anm. Die kleinern Tafeln gehen bis zu der Zahl 10000, und liefern nur 7 Stellen der Mantissa. Größere Tafeln nennt man theils die bis zu 100000 und drüber gehen, theils solche, die 10 und mehrere Stellen der Mantissa angeben. In beiden Tafeln ward die letzte Ziffer um 1 vermehrt, wenn die erste der weggelassenen > 5 war. Auch muß man auf das Weggelassene Rücksicht nehmen, wenn ein Logarithmus von einem andern, dessen Mantissa aus lauter Nullen besteht, zu subtrahiren ist, daß man nämlich die niedrigste Ziffer der Differenz um 1 vermindert. Ueberhaupt muß man nicht vergessen, daß man nur mit Stücken der Logarithmen rechnet, folglich eine ganz vollständige Genauigkeit in allen Fällen nicht fodern darf. Je größer die Genauigkeit seyn soll, desto mehr sind größere Tafeln nothwendig.

Wir

Wir schränken uns, bey der nun folgenden Anweisung des Gebrauchs, auf die kleinern Tafeln ein, woraus man die gröſsern leicht gebrauchen lernt. Es kommen aber zwo Hauptfragen dabey vor: Wie findet man den einer gegebenen Zahl zugehörigen Logarithmus, oder die einem gegebenen Logarithmus zugehörige Zahl, auch wenn das Gegebene sich nicht in den Tafeln befindet?

§. 457. Aufg. Den jeder gegebenen Zahl zugehörigen Logarithmus aus den Tafeln zu finden.

Auflöſ. 1) Für jede ganze Zahl, die nicht über 4 Ziffern hat, findet man den zugehörigen Logarithmus unmittelbar in den Tafeln. Sind solcher Zahl Nullen angehängt, so vermehre man die Charakteristik des vorigen Logarithmus mit so vielen Einheiten, als Nullen angehängt sind. Z. E. log 3595 = 3,5434472, und log 349500 = 5,5434472.

Denn es ist log R = l. so ist R 10^n = log R + n log 10 = l + n, weil log 10 = 1.

2) Ist die gegebene Zahl R mehrziffrig 1822632, so schneide man ihre 4 höchsten Ziffern durch das Comma ab 1822,632 (wodurch die gegebene Zahl in eine ganze Zahl m = 1822, und einen Decimalbruch u = 0,632 getheilt, also durch 1000 dividirt ist) und subtrahire den log der ganzen Zahl 1822 von dem nächstfolgenden log 1823 (wodurch man die logarithmische Differenz 2383 erhält), suche hierauf zu Eins, dem Decimalbruche 0,632 und der logarithmischen Differenz 2383, die vierte Proportionalzahl x (wodurch man x = 1506, oder die dem Decimalbruche zugehörigen logarithmischen Proportionaltheile erhält), addire ferner die gefundnen Proportionaltheile zu dem log der ganzen Zahl 1822 (wodurch man 1822,632 = 3,2606990 erhält) und vermehre endlich die Charakteristik mit so vielen Einheiten, als der Decimalbruch 0,632 Ziffern hat, so hat man log 1822632 = 6,2606990.

Man

Man nimmt hiebey an, daß die Differenzen solcher Zahlen, die nur wenig von einander abstehen, den Differenzen ihrer Logarithmen ziemlich genau proportionirt sind, wie an den Zahlen über 1000 wahrzunehmen ist. Bedeutet nun m eine ganze Zahl, und u einen ächten Bruch, so ist nach der Voraussetzung $1 : u \log(m+1) - \log m : \log(m+u) - \log m$, wo das letzte Glied die gesuchten Proportionaltheile x giebt, die zum log m zu addiren sind, um den log (m+u) zu haben. Nun war $\frac{R}{1000} = m+u$. Folglich ist $R = (m+u) \cdot 1000$ und $\log R = \log(m+u) + \log 1000$, woraus der letzte Theil der Auflösung erhellet. Auch kann man während der Rechnung die Charakteristik weglassen, und sie nach vollendeter Rechnung dem Werthe der gegebenen Zahl gemäß beyfügen, §. 454.

Könnte man die gegebene Zahl R in Factoren p, q, zerlegen (1822632 = 3426.532), so hat man $\log R = \log p + \log q$ genauer, wodurch sich obige Rechnung prüfen läßt. In den größern Tafeln findet man nicht nur die Logarithmen größerer Zahlen, auch wohl mehrere Decimalstellen, welches obige Rechnung genauer giebt, sondern auch die Aufsuchung der Proportionaltheile sehr erleichtert.

3) Für jeden Bruch findet man den zugehörigen Logarithmus, wenn man vom Logar. des Zählers den Logar. des Nenners subtrahirt. Z. E. $\frac{576}{\frac{1}{3}\frac{5}{9}\frac{4}{7}\frac{8}{4}} = \log 576548 = \log 3974$.

Ist der gegebene Bruch $\frac{n}{m}$ ächt, so ist sein Logar. der Logar. des umgekehrten Bruchs $\frac{m}{n}$ negativ genommen,

d. i. $\log\frac{n}{m} = -\log\frac{m}{n}$, weil $1:\frac{n}{m}$ das Umgekehrte von $1:\frac{m}{n}$ ist. Ein solcher verneinter Logarithmus bedeutet, daß bey allen Operationen, wobey $\log\frac{n}{m}$ als Factor vorkömmt, $\log\frac{m}{n}$ subtrahirt werden müsse, indem S. $\frac{n}{m} = S:\frac{m}{n}$, folglich $\log\left(S.\frac{n}{m}\right) = \log S + \log\frac{n}{m} = \log S - \log\frac{m}{n}$.

Für einen Decimalbruch $7{,}654 = \frac{7654}{1000}$, oder $0{,}07654 = \frac{7654}{100000}$, findet man den zugehörigen Logarithmus, wenn man den Bruch als eine ganze Zahl behandelt, und die Kennziffer des gefundenen Logarithmus um die gehörigen Einheiten vermindert.

4) Man hat noch eine andere Methode, wenn ein größerer Logarithmus von einem kleinern zu subtrahiren ist, daß man zu der Kennziffer des kleinern eine oder mehrere Einheiten hinzusetzt, und was man solchergestalt addirt, mit den negativen Zeichen anhängt. Z. E. $\log 0{,}436 = \log 436 - \log 1000$ kann auf zweyerley Art gefunden werden:

log. 436 = 2,6394865	log. 436 = 3,6394865 — 1
log. 1000 = 3,0000000	log. 1000 = 3,0000000
log. 0,436 = —0,3605134	log 0,436 = 0,6394865 — 1

Von diesen beiden gefundenen Logarithmen ist der erste ganz negativ, der zweyte aber besteht aus einem positiven und

und aus einem negativen Theile. Subtrahirt man den negativen Theil (welcher zur Kennziffer gehört, und 10000000 bedeutet) von dem positiven, so erhält man den zuerst gefundnen Logarithmus. Der ganze Unterschied ist also, daß man hier die Subtraction blos anzeigt, die man in Aufl. 3. wirklich verrichtet.

Diese Methode, negative Logarithmen zu vermeiden, ist hier an einem Decimalbruche gezeigt, erstreckt sich aber auch auf gemeine Brüche. Ueberhaupt läßt sich ein jeder Logarithmus ohne Veränderung seines Werthes auf mannichfaltige Art nach dieser Methode ausdrücken, wenn man die Kennziffer des positiven und negativen Theils gehörig gegen einander verändert. Z. E.

$\log 0{,}436 = 0{,}6394865 - 1 = 3{,}6394865 - 4$ u. s. w.

5) Für die Potenzen und Wurzeln sey $a = P$, so ist $n \log a = \log P$, folglich auch $\log a = \frac{\log P}{n}$, und $n = \frac{\log P}{\log a}$. Diese drey Aufgaben sind aus Obigem verständlich. Wäre in der zweyten P ein ächter Bruch, so drücke man seinen Logarithmus nach der Methode in Aufl. 4. so aus, daß n in dem negativen Theile aufgehe.

In dergleichen Rechnungen zeigen die Logarithmen ihre Unentbehrlichkeit und vorzüglichsten Vortheile.

§. 457. **Aufg.** Die jedem gegebenen Logarithmus zugehörige Zahl aus den Tafeln zu finden.

Auflös. 1) Ist der gegebene Logarithmus, den man allemal unter der Kennziffer 3 aufsuchen kann, genau in den Tafeln befindlich (nämlich seiner Mantissa nach), so gebe man der dabey stehenden Zahl den der gegebenen Kennziffer gemäßen Werth, §. 454.

Denn ist $l = \log R$, so ist $l + n = \log R.10^n$, und $l - n = \log \frac{R}{10^n}$, wobey $\pm n$ zur Kennziffer gehört.

2) Fällt der gegebene Logarithmus zwischen log m und log(m + 1), so besteht die zugehörige Zahl aus der ganzen Zahl m, und einem Decimalbruche u, den man nach §. 456. Aufl. 2. findet.
$\log(m+1) - \log m : \log(m+u) - \log m = 1 : u$, wo log(m + u) der gegebene Logarithmus, ohne auf die Kennziffer zu sehen, ist, und man u, oder den Decimalbruch findet, der zu der ganzen Zahl m, welche die Tafeln geben, zu addiren ist, um die Zahl m + u zu haben, der man noch den der gegebenen Kennziffer gemäßen Werth zu geben hat, §. 454.

Zur Erläuterung sey 6,2606990 (aus §. 456. Aufl. 2.) der gegebene Logarithmus, wozu man, wenn man dort, nach der hier gegebenen Vorschrift, rückwärts rechnet, die Zahl 1822632, oder, wenn die gegebene Kennziffer 2 wäre, die Zahl 182,2632 findet, u. s. w.

3) Besteht der gegebene Logarithmus aus einem positiven und negativen Theile, wie 0,6394865 — 1 (aus §. 456. Aufl 4.) so findet man für den positiven Theil die Zahl 4,360, die wegen des negativen Theils mit 10 zu dividiren ist, und die dem gegebenen Logarithmus zugehörige Zahl 0,436 giebt.

4) Ist der gegebene Logarithmus ganz negativ, wie —0 3605134 (aus §. 456. Aufl. 4.) so sehe man ihn als einen positiven Logarithmus an, der von 0, als dem log 1, zu subtrahiren ist, suche in den Tafeln die ihm zugehörige Zahl 2,2935, so ist die dem negativen Logarithmus zugehörige Zahl $= \frac{1}{2,2935} = \frac{10000}{22935} = 0,436$.

Auch

Auch kann man den gegebenen Logarithmus zuvor in einen positiven verwandeln, wenn man ihn vom log 10^{4} = 4,6394865 — 4 — n = o subtrahirt, wozu die Zahl $\frac{4360}{10000}$ = 0,436 gehört.

4,0000000 — 4
0,3605134

§ 458. Anm. Durch Obiges ist man in den Stand gesetzt, die logarithmische Rechnung in vorkommenden Fällen gehörig anzuwenden, wovon Beyspiele leicht aufzufinden sind, auch in der Folge noch vorkommen werden.

Anhang.

Beylagen zur Arithmetik.

für

die Rechnung in benannten Zahlen.

Aus Krusens Hamburgischem Contoristen von 1771.

I. Vom Gewichte.

§. 1. Beym Gewichte ist die Einheit 1 Pfund (℔), welches in kleinere Gewichte, als Mark, Unzen, Lothe, Quentlein u. s. w. getheilt wird, und woraus größere Gewichte, als Stein, Liespfund, Centner, Schiffpfund, zusammengesetzt werden.

A. Handelsgewicht.

§. 2. Beym Handelsgewicht ist 1 Centner = 5 Stein, 1 Stein = 20 Pfund, 1 Pfund = 32 Loth, 1 Loth = 4 Quentl. Auf Schiffen, auch bey Landfrachten, ist 1 Schiffpfund = 20 Liespfund, 1 Liespfund = 14 Pfund Hamburger; desgleichen 1 Last = 2 Tonnen = 4000 Pfund Seewasser französ. Gewicht, wovon 70 Pfund auf 1 Cubikfuß gehen.

§. 3. Es wiegt aber 1 Pfund Handelsgewicht an Assen Holl. Troy

Berlin	—	9750	Hamburg	—	10080
Braunschweig		9716	Hannover	—	10127
Breslau	—	8434	Leipzig	—	9716
Cöln	—	9728	Magdeburg	—	9750

B.

D. Juwelengewicht.

§. 4. Beym Apothekergewicht ist 1 Pfund = 1½ Mark = 12 Unzen (℥), 1 ℥ = 8 Drachmen (ʒ), 1 ʒ = 3 Scrupel (℈), 1 ℈ = 20 Gran. Demnach ist 1 Drachme = 60 Gran, und 1 Unze = 480 Gran.

§. 5. Es wiegt aber 1 Pfund Apothekergewicht an Assen Holl. Troy

England	—	7766	Holland	—	7680
Frankreich	—	7641	Nürnberg	—	7452
Hannover	—	7595	Schweden	—	7416

Das Nürnberger Apothekergewicht gilt durch ganz Deutschland, Hannover ausgenommen.

C. Gold- und Silbergewicht.

§. 6. Nach Cölnischem Markgewicht ist 1 Pfund = 2 Mark = 16 Unzen, und insbesondere

1) nach Silbergewicht: 1 Unze = 2 Loth, 1 Loth = 4 Quentlein, 1 Quentl. = 4 Pfenniggewicht, 1 Pfenniggewicht = 15 Gran. Demnach ist 1 Unze = 480 Gran. Beym Münzwesen wird in ganz Deutschland die Mark in 16 Loth, das Loth in 18 Grän, und 1 Pfenniggewicht in 256 Richtpfennigstheile getheilt.

2) Nach Goldgewicht: 1 Unze = 3 Carat, 1 Carat = 12 Grän. Demnach ist 1 Mark = 24 Carat. Diese Eintheilung ist bey den Goldmünzen in mehrern Ländern gewöhnlich, wobey man auch die Ducaten-Aeßchen hat, deren 17 ein Pfenniggewicht betragen.

§. 7. Nach Troygewicht ist 1 Pfund = 1½ Mark = 12 Unzen, und insbesondere

1) in Holland. 1 Unze = 20 Engel, 1 Engel = 32 Aß = 24 Gran. Die Cölnische Unze wiegt 19 solcher Engel, und 1 Cöln. Pfenniggewicht, von 15 Gran oder 17 Ducaten-Aeßchen, wiegt 19 Aß Holl. Troy.

2) in England. 1 Unze = 20 Pennys, 1 Penny = 20 Gran.

3) in Frankreich. 1 Once = 8 Gros; 1 Gros = 3 Derniers; 1 Dernier = 24 Grains. Diese Eintheilung ist wie beym Apothekergewicht, nur daß der Dernier, oder Scrupel, hier in 24 Theile getheilt wird; auch ist in Frankreich das Apothekergewicht mit dem Silbergewichte einerley. Bey den Silbermünzen wird die Mark auch in 12 Derniers eingetheilt.

§. 8. Es wiegt aber 1 Mark Gold- und Silbergewicht an Assen Holl. Troy

England	—	5177½	Berlin	—	4875
Frankreich	—	5094	Braunschweig		4858
Holland	—	5100	Cöln	—	4864

Das Cölnische Markgewicht gilt auch für Frankfurt am Mayn, Hamburg, Hannover, Leipzig, Lübeck.

D. Juwelengewicht.

§. 9. Das Juwelengewicht für Perlen und Edelsteine ist ziemlich aller Orten in Europa gleich, und 1 Unze Holl. Troy = 150 Carat Juwelengewicht; 1 Carat = 4 Grän. So wiegt z. E. der größte Diamant, den Portugal aus Brasilien hat, 1680 Carat = 11⅕ Unze.

II. Vom Maaße.

A. Längenmaaß.

§. 10. Das Längenmaaß für Längen hat zur Einheit eine Elle, oder einen Fuß, oder eine Meile.

§. 11. Das Ellenmaaß wird in Halbe, Viertel, Achtel u. s. w. eingetheilt. Es ist aber 1 Elle an Scrupeln des Pariser königlichen Fußes

Braunschweig		2530	Leipzig	—	2506
Hamburg	—	2540	Magdeburg	—	2956

§. 12. Das Fußmaaß wird nach der Zahl 10 oder 12, d. i. nach der Decimal- oder Duodecimaleintheilung, in Zolle, Linien und Scrupel getheilt, auch zu Faden, Klafter, Ruthen zusammengesetzt. Der Pariser königliche Fuß, deren 6 eine Toise machen, hält 12 Zoll, 1 Zoll 10 Linien, und eine Linie 10 Scrupel.

§. 13.

§. 13. Es hält aber 1 Fuß an solchen Scrupeln des Pariser königlichen Fußes

Dänemark	1391	Berlin	1373
England	1350	Braunschweig	1260
Frankreich	1440	Cöln	1220
Holland	1255	Hamburg	1270
Spanien	1253	Leipzig	1251
Venedig	1540	Magdeburg	1257
Schweden	1316	Rheinländisch	1391,3

§. 14. Das Meilenmaaß bestimmt folgende Tafel, deren erste Columne anzeigt, wieviel Meilen in ganzen und Hundertheilen auf einen Mittelgrad der Erde gehen, der nach den Ausmessungen der Herren Maupertuis und Bouguer zu 57106 franz. Toisen angenommen ist; die zweyte, wieviel französische, und die dritte, wieviel rheinl. Fuß auf eine Meile gehen:

Dänische —	—	14,77	23188 24000
Deutsche; kleine	—	17,73	19324 20000
gemeine oder geographische		15,00	22842 23642
Englische; Landmeilen	—	69,12	4956 5130
Seemeilen	—	60,00	5711 5910
Französische; Lieues	—	25,00	13705 14485
kleine Landmeilen	—	28,55	12000 12420
große Landmeilen	—	22,84	15000 15525
Seemeilen	—	20,00	17132 17731
Holländische —	—	19,00	18033 18664
Italienische —	—	60,00	5711 5910
Russische Werste —	—	104,30	3285 3400
Schwedische —	—	10,41	32900 34052
Spanische —	—	26,25	13052 13509
Stadia; griechische	—	724,40	473 489
römische	—	604,30	567 587

B. Flächenmaaß.

§. 15. Das Flächenmaaß für Flächen, die Länge und Breite haben, heißt auch Quadratmaaß. Der Quadratfuß hat nach der Decimaleintheilung 100, nach der Duodecimaleintheilung aber 144 Quadratzoll, und so auch bey den übrigen Abtheilungen des Fußes. Macht man von den Verhältnißzahlen, die oben für den Längenfuß angezeigt worden, die Quadrate, so hat man die Verhältnisse für die Quadratfuße.

C. Körpermaaß.

§. 16. Das Körpermaaß für körperliche Räume, die Länge, Breite, und Tiefe, oder Höhe haben, heißt auch Cubikmaaß. Der Cubikfuß hat nach der Decimaleintheilung 1000, nach der Duodecimaleintheilung aber 1728 Cubikzoll, und so auch bey den übrigen Abtheilungen des Fußes. Macht man von den Verhältnißzahlen, die oben für den Längenfuß angezeigt worden, die Würfel, so hat man die Verhältnisse für die Cubikfuße.

III. Von der Zahl.

§. 17. Dinge, die man nicht nach vorstehenden Maaßen zu bestimmen pflegt, haben entweder ihr besondres Maaß, oder werden blos gezählt, wobey 10 einen Decher, 12 ein Dutzend, 15 ein Mandel, 20 eine Stiege, 60 ein Schock, 72 eine Webe ausmachen.

1) **Papier.** 1 Ballen = 10 Rieß; 1 Rieß = 20 Buch; 1 Buch = 24 Bogen.

2) **Garn.** 1 Stück = 4 Strähn, 1 Strähn = 3 Zaspel oder Zahl, 1 Zaspel = 80 Gebünd, 1 Gebünd = 20 Faden, 1 Faden = 4 Ellen.

3) **Getreide.** 1 Last = 1½ Wispel, 1 Wispel = 2 Malter, 1 Malter = 12 Scheffel, 1 Scheffel = 4 Viertel, 1 Viertel = 4 Metzen.

4) **Wein.** 1 Tonne = 4 Oxhoft, 1 Oxhoft = 3 Eimer, 1 Eimer = 2 Anker, 1 Anker = 30 Maaß = 40 Bouteillen.

5) **Bier,** in Berlin: 1 Gebräude = 36 Faß, 1 Faß = 2 Tonnen, 1 Tonne = 96 Quart.

IV. Von den Münzen.

A. Von den Münzen überhaupt.

§. 18. Silber mit Kupfer, und Gold mit Silber oder Kupfer, oder beiden legiren oder beschicken heißt, solche Metalle zusammenschmelzen. Feines Gold oder Silber ist, das keinen Zusatz hat. Da 1 Mark 16 Loth oder 24 Carat enthält, so heißt z. E. 12löthiges Silber oder 23caratiges Gold, wenn in jedem Stücke

Stücke Silber 12 Theile fein, und in jedem Stücke Gold 23 Theile fein sind, daher ihr Gehalt durch $\frac{12}{12}$, $\frac{23}{24}$, ausgedrückt wird, und so auch in andern ähnlichen Fällen.

Anm. Der Gehalt der Sole wird bestimmt, wenn man angiebt, wieviel Salz in 1 Pfunde, oder in einer Kanne zu 2 Pfund steckt. Im ersten Falle heißt die Sole 6löthig, wenn sie $\frac{6}{12}$, im zweyten 12löthig, wenn sie $\frac{12}{24}$ Salz hat. Zu Halle im Saalkreise nimmt man die Kanne zu 74 Loth an, und nennt die dortige Sole 16löthig, weil sie $\frac{16}{74}$ Salz hält.

§. 19. **Reelle oder gangbare Münzen** sind wirklich geprägte Geldstücke. Durch **fingirte oder Rechnungsmünzen** versteht man den Maaßstab für den Kaufwerth der Dinge, und also auch der gangbaren Münzen, dergleichen in England Pfund Sterling, in Frankreich Livre, in Deutschland Thaler u. s. w. Jene bestimmt man nach diesem Maaßstabe aus Beschaffenheit und Gewicht des darin enthaltenen Metalls. Hiezu braucht man in Deutschland das Cölnische Markgewicht. Es heißt aber 1 Mark reines Silber oder Gold eine **feine Mark**, oder eine **Markfein**, und eine Mark des legirten oder beschickten edlern Metalls eine **rauhe Mark**, oder eine **Markrauh**. Das Gewicht einer Münzsorte heißt ihr **Schrot**, und ihr Gehalt am edlern Metall das **Korn**. Durch den **Münzfuß** wird Schrot, Korn und Kaufwerth einer Münze bestimmt.

Anm. Das Gepräge der Münze enthält Schrift, Namen, Bildniß und Wappen des Münzherrn, wodurch derselbe die Beschaffenheit der Münze versichert. Die Bildseite heißt die **Hauptseite, Avers**, die Schrift- oder Wappenseite aber die **Rückseite, Revers**.

§. 20. Die vornehmsten Veränderungen des **Teutschen Münzfußes** sind folgende:

1) **Der alte Reichsfuß**, 1566 auf dem Reichstage zu Augsburg. 8 Rthlr. auf die rauhe, und 9 auf die feine Mark. Ein solcher Thaler hieß von seinem Gewichte uncialis, wie jetzt ein Speciesthaler.

2) **Der Zinnaische Fuß** 1667 zu Zinna im Magdeburgischen, von Sachsen und Brandenburg. Die feine Mark Silber auf $10\frac{1}{2}$ Rthlr. oder $15\frac{3}{4}$ fl.

3) Der

3) Der **Leipziger**, oder 18 Gulden-Fuß, 1690 zu Leipzig von Sachsen, Brandenburg und Braunschweig. Die feine Mark Silber auf 12 Rthlr. oder 18 fl. Dieser ward 1738 zum allgemeinen Reichsfuß angenommen, ist aber nur noch von Churbraunschweig beybehalten.

4) Der **Graumannsche** oder 21 Gulden-Fuß, 1750 von Preußen angenommen, 1764 erneuert. Die feine Mark Silber auf 14 Rthlr. oder 21 fl.

5) Der **Conventions-** oder 20 Gulden-Fuß, 1753 von Oesterreich und Bayern, den auch Sachsen und Braunschweig angenommen. Die feine Mark Silber auf 13⅓ Rthlr. oder 20 fl.

6) Der 24 Gulden-Fuß 1766, im Schwäbischen und Fränkischen Kreise Die feine Mark Silber auf 16 Rthlr. oder 24 fl.

§ 21. Zur Prüfung (Valvation) der Münzen hat man richtig legirte **Probirnadeln**, **Streichnadeln**, das ist, dünne Stifte, die aus einer verschiedenen Zusammensetzung der edlen Metalle verfertigt sind. Zum Silber hat man einerley Nadeln vom 1 bis 16löthigen. Zum Golde sind dreyerley Nadeln auf halbe Carate nöthig, zur rothen, weißen und vermischten Legirung, (d. i. mit Kupfer, Silber, oder beiden.) Nun streicht man mit dem zu probirenden Metalle auf dem Probirsteine, und zugleich mit einer oder der andern Probirnadel so lange, bis man den Strich einer Nadel findet, der mit der Farbe des zu probirenden Metalls übereinkömmt, wodurch geübte Probirer die Legirung oft bis auf 6 Gran angeben können. Zuverlässiger freylich geschieht die Valvation durch die Probe auf der **Capelle**, wobey sich der **Münz-Wardein** einer feinen **Waage**, der **Probirwaage**, und eines verjüngten Gewichts, des **Probirgewichts**, bedient.

§. 22. **Geldwechseln**, oder eine Münzsorte in eine andere versetzen heißt, den Werth der einen Sorte dem Werthe der andern gleich machen. Derjenige, der das bessere Geld ausgiebt, bekömmt eine größere Menge des schlechtern, oder einen **Ueberschuß**, **Aufgeld**, **Agio**: derjenige aber, der das schlechtere Geld ausgiebt, bekömmt eine geringere Menge des bessern, und leidet einen **Abzug**, **Rabat**, **Disconto**. Rechnet man hiebey nach **Procenten**, d. i. setzt man den Werth von 100 der einen Sorte in den Werth der andern, so entstehen Procente entweder auf oder von Hundert, je nachdem man die 100 in der bessern oder schlechtern Sorte nimmt. Im ersten Falle rechnet man das

Auf-

Aufgeld, im zweyten den Rabat nach Procenten. Wird Rabat nicht ausdrücklich genannt, so versteht man immer das Aufgeld, wenn man sagt, daß zwey Münzsorten um so und so viel Procent differiren, d. i. die eine um soviel Procent besser oder schlechter als die andre sey.

B. Rechnungsmünzen.

§. 23. Die Rechnungsmünzen in folgender Tafel sind nach Assen Holländisch Troy in der ersten Columne in feinem Golde, in der zweyten nach feinem Silber gewürdigt:

Deutschland. 1 Thlr. zu 3 Mark oder 48 ß. à 6 pf. oder 8 ß fl. oder 96 Grotfl. Hamburger Banco.	35,54	508,21
1 Thlr. zu 3 Mark oder 48 ß. Lüb. à 6 pf. nach dem Lübischen Münzfuße. Hamb. Courant	29,10	429,18
1 Thlr. zu 36 mgr. à 8 pf. nach dem 18 fl. Fuße Hannöverisch Courant oder Cassengeld	26,84	405,33
1 Thlr. zu 24 ggr. oder 36 mgr. oder 90 kr. Conventionsgeld nach dem 20 Fl. Fuße in Leipzig, Braunschweig, Oesterreich.	25,50	364,80
1 Thlr. zu 24 ggr. à 12 pf. nach dem 21 Fl. Fuße in Berlin und allen Brandenburgischen Landen	24,00	347,43
1 Thlr zu 90 kr. à 4 pf. nach dem 24 Fl. Fuße im Reiche		304,00
England. 1 Pfund Sterl. zu 20 ß. oder 240 Pence	158,21	2306,83
Frankreich. 1 Livre zu 20 Sous Tournois, oder 240 Deniers	6,43	92 87
Holland. 1 Lvl. zu 6 Fl. oder 20 ß. fl. oder 240 Grotfl. Cassa	81,67	1200,38
Banco	86,50	1267 36
1 Thlr. zu 2½ fl. oder 50 Stüver oder 100 Grotfl. Cassa	34,30	500,60
Banco	36,00	528, 0

C.

C. Gold- und Silbermünzen.

§. 24. Von den Gold- und Silbermünzen in folgender Tafel ist von jedem Stücke in der ersten Columne das Schrot, in der zweyten das Korn nach Assen Holländisch Troy angegeben.

1. Goldmünzen.

Augustd'or. Sachsen zu 5 Thlr. Conv.	137,50	124,10
Carld'or. Braunschweig desgl.	138,00	125,00
Carolind'or. Pfalzbayern zu 10 fl.	202,66	158,00
Doblon oder Pistolen. Spanien zu 80 Real.	141,00	129,30
Ducaten. Holländischer zu 5 fl. 5 Stüver, auch 2¾ Thlr. Conventionsgeld	72,60	71,30
Dänischer v. 1757 zu 12 Mark Dän.	65,00	57,40
Friedrichd'or. Preußen	138,90	125,90
Gutnee. England zu 21 Schilling	174,50	159,97
Louisd'or. Frankreich von 1786 zu 24 Liv.	169,80	155,65

2. Silbermünzen.

Gulden. Holland zu 20 Stüver	219,50	200,00
Krone. Dänische zu 4 Mark Dänisch	464,00	311,00
Englische zu 5 Schill.	625,00	573,00
Markstück. Lübisches zu 10 Schill.	190,70	143,00
Piaster oder Stück von Achten. Spanien zu 20 Real	564,00	511,00
Rubel. Rußland von 1759 zu 100 Kopecken	543,00	437,00
Thaler. Preußischer seit 1750 zu 24 ggr.	463,00	347,00
Conventions- zu 24 ggr.	437,76	364,50
Laub- Frankr. 1726 zu 6 Liv.	613,70	562,50
Species- zu 2 fl. Convent.	538,68	486,40

II.
Die Algebra.

1. Von den Gleichungen überhaupt.

§. 1. Erkl. Eine Gleichung, aequatio, ist ein doppelter Ausdruck einerley Größe, als $\frac{7.6}{9}+\sqrt{49}-\frac{5}{3}=5^2-5.3$. Diese beiden Ausdrücke heißen die Seiten, membra, und ihre durch die Zeichen + und − verbundne Theile die Glieder, termini, der Gleichung.

§. 2. Erkl. Die Algebra lehret, den Werth der unbekannten Größen, aus gegebenen Bedingungen, mittelst Gleichungen herzuleiten. Z. E. $5.x=35$, folglich $x=\frac{35}{5}=7$.

§. 3. Anm. 1. Hiebey kommen dreyerley Verrichtungen vor:

1) Die Formation der Gleichung: daß man die gegebenen und die noch unbekannten Größen genau von einander unterscheide, und hiezu gewöhnlicher Weise die bekannten Größen mit Ziffern oder den ersten Buchstaben des Alphabets, die unbekannten aber mit den letzten Buchstaben bezeichne (wobey Coefficienten der unbekannten Größe die bekannten, die in sie multiplicirt sind, heißen); ferner, daß man die Verbindung beiderley Größen aus den gegebenen Bedingungen mittelst der arithmetischen Zeichen bestimme, und hiedurch die vorgelegte Aufgabe gleichsam aus der ge-

gemeinen Sprache in die algebraische übertrage (wobey man die unbekannte Größe nicht anders, als wären sie schon bekannt, behandelt); endlich, daß man aus solcher Verbindung die Gleichung selbst herleite.

2) Die Reduction der Gleichung: daß man der formirten Gleichung eine einfachere und schicklichere Gestalt gebe; wobey vorzüglich darauf zu sehen ist, daß die Glieder, worin die unbekannte Größe als Divisor, oder unter einem Wurzelzeichen vorkömmt, eine veränderte Gestalt bekommen, auch die Glieder, worin einerley unbekannte Größe vorkömmt, auf eine Seite der Gleichung zusammengebracht werden.

3) Die Solution, oder völlige Reduction: daß die also zubereitete Gleichung nun weiter so behandelt werde, daß die unbekannte Größe auf der einen Seite allein stehe, und blos bekannte Größen auf der andern Seite sich befinden.

§. 4. Anm. 2. Da die erste dieser Verrichtungen §. 3. auf Sachkenntniß, Nachdenken und Uebung beruhet, aber nicht durch allgemeine Regeln gelehrt werden kann, so setzt die Algebra dieselbe gemeiniglich als schon geschehen voraus, und beschränkt ihre Anweisung blos auf die beiden übrigen. Kommen indeß Beyspiele von solcher Formation der Gleichungen vor, so müssen Anfinger ihr vorzügliches Augenmerk darauf richten, um den Geist derselben kennen, und auf ähnliche Fälle anwenden zu lernen.

§. 5. Grundſ. Wenn man zu beiden Seiten einer Gleichung einerley addirt, wie auch davon subtrahirt; oder beide Seiten mit einerley multiplicirt, wie auch dividirt; oder beide Seiten zu einerley Potenz erhebt, wie auch daraus einerley Wurzel zieht, so bleibt noch eine Gleichung.

§. 6. Zuſ. 1. Jedes Glied der Gleichung läßt sich, wenn man sein Zeichen verändert, versetzen, d. i. von der einen Seite auf die andre bringen.

§. 7. Zuſ. 2. Die Zeichen aller Glieder lassen sich in die entgegengesetzten verwandeln.

§. 8. Zuſ. 3. Jede Gleichung läßt sich auf Null bringen, wenn man alle Glieder von der einen Seite auf die andre versetzt.

§. 9.

§ 9. Zuſ. 4. Die Brüche werden weggeſchafft, wenn man die ganze Gleichung mit den Nennern der Brüche multiplicirt. So kann man auch die unbekannte Größe, wenn ſie als Diviſor vorkömmt, aus dieſer Stelle bringen.

Z. E. aus der Gleichung $\frac{35}{x}=5$ wird $35=5x$.

3. Von den einfachen Gleichungen.

§. 10. Erkl. Eine einfache Gleichung, oder vom erſten Grade, heißt, worin die unbekannte Größe, nachdem ſie kein Diviſor mehr iſt, §. 9. die erſte Potenz nicht überſteigt.

§. 11. Aufg. Eine einfache Gleichung mit einer einzigen unbekannten Größe aufzulöſen.

Auflöſ. Man verſetze alle Glieder, welche die unbekannte Größe enthalten, auf eine Seite, daß auf der andern blos bekannte Größen ſtehen, bringe die einzelnen Coefficienten in eine Summe, (Ar. §. 147.) und dividire damit in die andre Seite der Gleichung.

§ 12. Exempel 1. Ein Bote A, der täglich 5 Meilen macht, iſt ſchon 10 Tage weg, da ihm ein anderer B, der täglich 7 Meilen macht, nachgeſchickt wird; man fragt, wenn dieſer jenen einholen wird?

Er hole ihn in x Tagen ein. Da nun B täglich 7 Meilen macht, ſo hat er 7x Meilen zurückgelegt. Dies muß ſoviel betragen, als der Weg, auf dem A, der täglich 5 Meilen macht, $10+x$ Tage zugebracht, wo er alſo $5(10+x)$ Meilen zurückgelegt hat. Demnach iſt $7x=5(10+x)=50+5x$, folglich $7x-5x$, d. i. $2x=50$, folglich $x=\frac{50}{2}=25$ Tage, wovon die Probe $7.25=5.35=175$ Meilen.

§. 13. Exempel 2. Es ſoll aus gutem Weine das Maaß zu 16 gr. und ſchlechterm zu 10 gr. ein gemiſchter Wein zu 12 gr. werden; man fragt, wieviel von jeder Sorte zur Miſchung kommen muß? (Alligationsregel, Ar. §. 390.)

Setzt man das Ganze 1, und den Theil der schlechtern Sorte x, so ist der Theil der bessern $1-x$, und der Werth des ersten Theils $16x$, des zweyten $16(1-x)$ d. i. $16-16x$, folglich der Werth der Mischung $10x+16-16x=12$, oder $10x-16+16x=-12$, folglich $(16-10)x=16-12$, d. i. $6x=4$, folglich $x=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, wovon die Probe $\frac{2}{3}.10$ gr. $+\frac{1}{3}$, 16 gr. $=6\frac{2}{3}+5\frac{2}{3}=12$ gr.

§. 14. Zus. 1. Drückt man die gegebenen Größen allgemein durch Buchstaben aus, so erhält man den Vortheil, daß die Auflösung der Gleichung die Entstehungsart des Unbekannten aus dem Bekannten im Allgemeinen lehret, d. i. eine allgemeine Formel giebt, welche für alle Fragen ähnlicher Art dient.

§. 15. Exempel 1. Für §. 12: A macht täglich a Meilen, und ist c Tage voraus; B bewegt sich geschwinder, und macht täglich b Meilen. Holt nun dieser jenen in x Tagen ein, so hat dieser bx, und jener $a(c+x)$ Meilen gemacht. Demnach ist $bx=ac+ax$, folglich $(b-a)x=ac$, folglich $x=\frac{ac}{b-a}$, d. i. man findet x, wenn man ac, d. i. den Weg, den A voraus hat, mit $b-a$, d. i. mit der Differenz der beiden Geschwindigkeiten, dividirt.

Im Exempel § 12. ist $a=5$, $c=10$, $b=7$, folglich $x=\frac{5.10}{7-5}=\frac{50}{2}=25$ Tage.

Oder: Ein Körper, der 17 Zoll voraus hat, bewegt sich in 3 Minuten durch 7 Zoll; ein anderer nach eben der Richtung in 4 Minuten durch 15 Zoll: so ist die Geschwindigkeit des ersten $\frac{7}{3}$, des zweyten $\frac{15}{4}$, und ihre Differenz $\frac{15}{4}-\frac{7}{3}=\frac{3\,15-4.7}{4.3}=\frac{17}{12}$. folglich $x=\frac{17.12}{17}=12$.

§. 16. Exempel 2. Für §. 13: Der Werth der Einheit des bessern sey a, des geringern b, des gemischten c, der Theil des geringern x, folglich des bessern $1-x$, so ist jenes Werth bx, dieses

ſes $a(1-x)$ oder $a-ax$. Demnach iſt $bx+a-ax=c$, oder $-bx-a+ax=-c$, folglich $(a-b)x=a-c$, folglich $x=\frac{a-c}{a-b}$, d. i. man findet x, wenn man die Differenz des hohen und mittlern Werths mit der Differenz des hohen und geringen dividirt.

Im Exempel §. 13. iſt $a=16$, $b=10$, $c=12$, folglich $x=\frac{16-12}{16-16}=\frac{4}{12}$. Nähme man Waſſer anſtatt des ſchlechtern Weins, ſo wäre $b=0$, folglich $x=\frac{a-c}{a}=\frac{16-12}{16}=\frac{4}{16}$.

Oder: Aus 15- und 9löthigem Silber ſoll 13löthiges gemacht werden, daher $a=\frac{15}{16}$, $b=\frac{9}{16}$, $c=\frac{13}{16}$. Folglich iſt hier $x=\frac{15-13}{16}:\frac{15-9}{16}=\frac{15\ 13}{15-9}=\frac{2}{6}$.

Auch könnte man die Verhältniſſe beider Sorten ſo finden:

Man ſetze die Quantität der beſſern x, der geringern y, ſo iſt der Werth der beſſern ax, der geringern by, der Miſchung $c(x+y)$, folglich $ax+by=cx+cy$, folglich $(a-c)x=(c-b)y$, folglich $x:y=c-b:a-c$, (Ar. §. 365.) worauf ſich die gewöhnliche Behandlung der Alligationsrechnung in den gemeinen Rechenbüchern gründet.

§. 17. Exempel 3. Eine Zahl x zu finden, die mit a multiplicirt um c zu wenig, mit b aber multiplicirt um d zu viel giebt.

Hienach iſt $ax+c=bx-d$, folglich $c+d=(b-a)x$, folglich $\frac{c+d}{b-a}=x$.

Z. E. bezahle ich jedem Arbeiter 6 Rthlr., ſo habe ich 5 Rthlr. übrig; bezahle ich jeden mit 7 Rthlr., ſo habe ich 3 Rthlr. zu wenig. Wieviel Arbeiter ſind dieſes, und wie groß iſt meine Baarſchaft?

Hier iſt $a=6$, $c=5$, $b=7$, $d=3$, folglich $x=\frac{6+3}{7-6}=8$, Zahl der Arbeiter, folglich $6\cdot 8+5=7\cdot 8-3=53$ Rthlr. meine Baarſchaft.

Oder: eine Sache soll stückweis gewisse Summe ausgelegt werden. Kostet nun 1 Loos 5 Fl., so kommen 42 Fl zu wenig: kostet es 6 Fl.: so kommen 58 Fl. zu viel. Wieviel waren es Loose, und wie groß die Summe? Hier ist a=5, c=42, b=6, d=58, folglich $x=\frac{42+58}{6-5}=100$ Zahl der Loose, folglich 5.100+42=542 die Summe.

§. 18. Zus. 2. Eine solche allgemeine Formel §. 14. giebt auch so viele Gleichungen, als Größen darin vorhanden sind, daß sich jede derselben als unbekannt ansehen, und durch die übrigen bestimmen läßt.

Z. E. Die Formel §. 15. bx=ac+ax enthält 4 Größen, a, c, b, x, und giebt 4 Gleichungen: $x=\frac{ac}{b-a}$; $b=\frac{ac}{x}+a$; $a=\frac{bx}{c+x}$; $c=\frac{(b-a)x}{a}$.

Auf eben die Art giebt die zusammengesetzte Proportionsregel (Ar. §. 391.) die Gleichung VTe=vtE, wodurch jedes dieser 6 Dinge aus den 5 übrigen gefunden werden kann.

§. 19. Zus. 3. In obigen Aufgaben sind Beyspiele vorgekommen, daß man durch eine Gleichung mehr als eine unbekannte Größe gefunden hat. So oft nämlich durch die eine unbekannte Größe zugleich die andre bestimmt wird, kann man diese durch jene und durch bekannte Größen ausdrücken, also nur eine unbekannte Größe in die Gleichung bringen. Hiebey dienen zur Erläuterung außer obigen Exempeln noch folgende:

§. 20 Exempel 1 Man soll 2 Zahlen finden, deren Summe S, und Differenz D gegeben ist.

Die größere sey x, so ist die kleinere S—x, und D=x—(S—x) =2x—S, folglich 2x=S+D, und $x=\frac{S+D}{2}$ die größere Zahl;

also

also, die kleinere $S = \frac{S+D}{2} = \frac{2S-S-D}{2} = \frac{S-D}{2}$. Vergl. Art. §. 171.

2) Man soll 3 Zahlen finden, wenn die Summe eines jeden Paares davon gegeben ist; nämlich a die Summe der 1ten und 2ten Zahl, b der 1sten und 3ten, c der 2ten und 3ten.

Man setze die Summe aller 3 Zahlen $= x$, so ist offenbar die 3te $= x - a$, die 2te $= x - b$, die 1te $= x - c$, folglich $x - a + x - b + x - c = x$, folglich $2x = a + b + c$, und $x = \frac{a+b+c}{2}$ wodurch sich alle 3 Zahlen bestimmen.

3) Eine Zahl a soll in zwey Theile dergestalt zerlegt werden, daß, wenn die erste mit m, die zweyte mit n multiplicirt wird, beide Producte einander gleich sind.

Der erste Theil sey $= x$, folglich der 2te $a - x$, und $mx = na - nx$, folglich $(m+n)x = na$, und $x = \frac{na}{m+n}$.

Z. E. Zwey Spieler haben 200 Rthlr. zu ungleichen Theilen zusammengelegt, doch daß sie den Gewinn halbiren wollen, und es findet sich, daß der erste 6mal, der andre 10mal soviel erhalten, als sein Beytrag gewesen ist. Wie groß war dieser Beytrag, und wie groß der Gewinn?

Hier ist $a = 200$, $m = 6$, $n = 10$, folglich $x = \frac{2000}{16} = 125$, der Beytrag des ersten, folglich $200 - 125 = 75$ der Beytrag des zweyten, wodurch zugleich der Gewinn bestimmt wird.

4) Zu 2 silbernen Bechern ist 1 Deckel. Der erste Becher wiegt 12 Loth, und mit dem Deckel 2mal soviel als der 2te Becher. dieser aber mit dem Deckel 3mal soviel als der erste. Wieviel wiegt der Deckel und der 2te Becher?

Der Deckel wiege x Loth, folglich der erste Becher mit dem Deckel $12 + x$, folglich der 2te halb so viel $6 + \frac{1}{2}x$, und mit dem Deckel $6 + \frac{1}{2}x + x = \frac{3}{2}x + 6$, welches 3mal so viel ist, als der erste. Demnach ist $\frac{3}{2}x + 6 = 36$, folglich $\frac{1}{2}x = 30$, und $3x = 60$, folglich $x = 20$ Loth Gewicht des Deckels, folglich $6 + \frac{1}{2}x = 16$ Loth Gewicht des 2ten Bechers.

5) Ein Vater sagt zu seinem Sohne: Dein jetziges Alter ist $\frac{1}{3}$ des meinigen, vor 6 Jahren aber war es $\frac{1}{4}$. Wie alt ist jetzt der Vater, und wie alt der Sohn?

Der Vater sey jetzt x Jahr alt, folglich der Sohn $\frac{x}{3}$. Vor 6 Jahren war das Alter des Vaters $x-6$, des Sohns $\frac{x}{3}-6$, und jenes das Vierfache von diesem. Demnach ist $x-6=4\left(\frac{x}{3}-6\right)$ $=\frac{4x}{3}-24$, folglich $3x-18=4x-72$, folglich $72-18$, d. i. $54=4x-3x=x$ das jetzige Alter des Vaters, folglich $\frac{54}{3}$ das jetzige Alter des Sohnes.

§. 21. Zus. 4. Zuweilen muß man die Frage durch einzelne Gleichungen führen, und das letzte Resultat, oder die Summe aller Resultate in Betracht ziehen, wie aus folgenden Beyspielen zu ersehen ist.

§. 22. Exempel. 1) Ein Kaufmann braucht für sein Hauswesen jährlich 100 Louisd'or. Nimmt er diese jährlich von seinem Capital, so vermehrt er den Rest jedesmal um $\frac{1}{3}$. Nach 3 Jahren findet er sein anfängliches Capital gerade verdoppelt; wie groß war dieses?

Es sey x, so ist im ersten Jahre Rest $x-100$, folglich das Vermögen am Schluß $x-100+\frac{x-100}{3}=\frac{4x-400}{3}$. Im 2ten Jahre ist Rest $\frac{4x-400}{3}-100$, d. i. $\frac{4x-700}{3}$, folglich am Schluß $\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}=\frac{16x-2800}{9}$. Im 3ten Jahre ist Rest $\frac{16x-2800}{9}-100$, d. i. $\frac{16x-3700}{8}$, folglich am Schluß $\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}$, d. i. $\frac{64x-14800}{27}=2x$, folglich $64x-14800=54x$, folglich $10x=14800$, und $x=1480$.

2) Ein

2) Ein Rittergut ist so verpachtet, daß nach 6 Jahren zugleich mit den Zinsen 12000 Rthlr. bezahlt werden. Im 3ten und 5ten Jahre war Mißwachs, wofür nach gerichtlicher Besichtigung das 1temal $\frac{1}{3}$, das 2temal $\frac{3}{4}$ von der Pacht erlassen wird. Wie groß war die Pacht, und wieviel geht von der Summe ab?

Die Pacht sey x, so war zu zahlen

1stes Jahr	x	
2.	— — x +	$\frac{1}{20}$ x
3.	— — x +	$\frac{2}{20}$ x
4.	— — x +	$\frac{3}{20}$ x
5.	— — x +	$\frac{4}{20}$ x
6.	— — x +	$\frac{5}{20}$ x
Summa	$(6+\frac{3}{4})x =$	$\frac{27}{4}$ x

Demnach ist $\frac{27}{4}x$ 12000, folglich $27x = 48000$, und $x = \frac{48000}{27} = \frac{16000}{9}$.

Nun ist Erlaß mit Zinsen

3tes Jahr	$\frac{1}{3}x +$	$3 \cdot \frac{x}{40}$
5tes Jahr	$\frac{1}{4}x +$	$\frac{3x}{80}$
Summa	$(\frac{1}{4}+\frac{9}{80})x =$	$\frac{109}{80}x$.

Folglich geht ab von der Summe $\frac{109}{80} \cdot \frac{16000}{9} = 2422\frac{2}{9}$ Rthlr.

3) Ein Vermögen ward unter die Söhne so vertheilt: Der erste nimmt 100 Thlr und $\frac{1}{10}$ des Uebrigen, der 2te 200 Thlr. und $\frac{1}{10}$ des Uebrigen, der 3te 300 Thlr. und $\frac{1}{10}$ des Uebrigen, u. s. w. da sich dann findet, daß jeder gleichviel bekommen hat. Wie groß war das Vermögen, wieviel Söhne, wieviel bekam jeder?

Das Vermögen sey z, der Antheil eines jeden x, folglich die Zahl der Söhne $\frac{z}{x}$.

Der 1ste erhält $100+\frac{z-100}{10}=x$

2te - $200+\frac{z-x-200}{10}=x$

3te - $300+\frac{z-2x-300}{10}=x$ u. s. w.

Die Differenz des 2ten und ersten, und so auch der übrigen, ist $100+\frac{-x-100}{10}=0$, d. i. $1000-x-100=0$, folglich $900=x$. Demnach ist für den ersten, und so auch für die folgenden $100+\frac{z-100}{10}=900$, d. i. $1000+z-100=9000$, folglich $z=8100$, folglich $\frac{z}{x}=\frac{8100}{900}=9$.

§. 23. Aufg. Eine Aufgabe mit zwey unbekannten Größen x, y, für welche zwey einfache Gleichungen $x+y=a$ und $fx+dy=b$ vorhanden sind, aufzulösen.

Auflös. Man suche den Werth der einen unbekannten Größe, z. E. x, in jeder Gleichung, und setze beide Werthe einander gleich. so enthält die neue Gleichung die unbekannte Größe y allein, wodurch also x weggeschafft oder eliminirt ist. Hienach ist $x=a-y=\frac{b-dy}{f}$, folglich $fa-fy=b-dy$, folglich $(d-f)y=b-fa$, und $y=\frac{b-fa}{d-f}$. Setzt man diesen Werth statt y in eine der beiden ersten Gleichungen, z. E. $x+y=a$, so hat man $x+\frac{b-fa}{d-f}=a$, folglich $(d-f)x+b-fa=da-fa$, folglich $(d-f)x=da-b$, und $x=\frac{da-b}{d-f}$.

§. 24.

§. 24. Exempel 1. Es ſollen 30 Rthlr. bezahlt werden. Dies kann A, wenn ihm B $\frac{2}{3}$ ſeines Geldes zu Hülfe giebt, B aber, wenn ihm A $\frac{3}{4}$ ſeines Geldes giebt. Man fragt: wie groß war die Baarſchaft eines jeden?

A habe x, B aber y. Demnach iſt $x+\frac{2}{3}y=30$, und $y+\frac{3}{4}x=30$, folglich $x=30-\frac{2}{3}y=(30-y)\frac{3}{4}$, folglich $90-2y+120-4y$, folglich $2y=120-90=30$, alſo $y=15$, folglich $x=30-\frac{2}{3}y=30-10=20$.

§. 25. Exempel 2. Aus 2 Röhren A, B, läuft Waſſer in ein Gefäß. Das 1temal läuft A a, B b Stunden, man findet c Maaß im Gefäße. Das 2temal läuft A α, B β Stunden, und man findet γ Maaß im Gefäße. Wieviel giebt jede Röhre ſtündlich?

A gebe x, B y Maaß in jeder Stunde. Demnach iſt das 1temal $ax+by=c$, das 2temal $\alpha x+\beta y=\gamma$, folglich $x=\frac{c-by}{a}=\frac{\gamma-\beta y}{\alpha}$, folglich $\alpha c-\alpha by=a\gamma-a\beta\gamma$, folglich $(\alpha\beta-\alpha b)y=a\gamma-\alpha c$ und $y=\frac{a\gamma-\alpha c}{a\beta-\alpha b}$. Demnach iſt $ax=c-by=c-\frac{ba\gamma-bac}{a\beta-\alpha b}=\frac{ca\beta-ba\gamma}{a\beta-\alpha b}=\frac{c\beta-b\gamma}{a\beta-\alpha b}\cdot a$, oder $x=\frac{c\beta-b\gamma}{a\beta-\alpha b}$.

Z. E. Setzt man $a=2, b=3, c=195, \alpha=5, \beta=4, \gamma=330$, ſo iſt $x=30$, $y=45$.

Setzt man aber $a=4, b=6, c=120, \alpha=3, \beta=7, \gamma=190$, ſo iſt $x=\frac{300}{-10}$, $y=\frac{-400}{-10}$, d. i. $x=-30$, $y=40$, welches anzeigt, daß durch A ſtündlich 30 Maaß ausfließen, indem B ſtündlich 40 Maaß ausſchüttet. Dieſen Umſtand hätte man auch in die anfängliche Gleichung mit hineinbringen können.

§. 26. Anm. Dieſe Auflöſung §. 25. gilt für alle Aufgaben des erſten Grades mit 2 unbekannten Größen.

Z. E. Man ſoll 2 Zahlen finden, deren Summe S, und deren Differenz D gegeben iſt, wo folglich $x+y=S$, und $x-y=D$. Demnach ſetze man (in den Gleichungen $ax+by=c$, und $\alpha x+\beta y=\gamma$ §. 25.) $a=1=b$, $c=S$, $\alpha=1$, $\beta=-1$, $\gamma=D$. Dies giebt

$x=\frac{-S-D}{-1-1}=\frac{-(S+D)}{-2}=\frac{S+D}{2}$, und $y=\frac{D-S}{-1-1}=\frac{-(S-D)}{-2}$ $=\frac{S-D}{2}$, vergl. §. 20.

Oder: In dem Exempel §. 24 hatte man $x+\frac{2}{3}y=30$, und $\frac{3}{4}x+y=30$, wo also $a=1$, $b=\frac{2}{3}$, $c=30$; $\alpha=\frac{3}{4}$, $\beta=1$, $\gamma=30$. Dies giebt $x=\frac{30-\frac{2}{3}\cdot 30}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{10}{\frac{1}{2}}=20$, und $y=\frac{30-\frac{3}{4}\cdot 30}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{4}\cdot 30}{\frac{1}{2}}$ $=\frac{1}{2}\cdot 30=15$.

§. 27. Aufg. Eine Aufgabe mit drey unbekannten Größen x, y, z, für welche man drey einfache Gleichungen A, B, C wie §. 23. hat, aufzulösen.

Z. E. Man soll drey Zahlen finden, wenn die Summe eines jeden Paares davon gegeben ist. Vergl. §. 20. Die Zahlen sind x, y, z, und A) $x+y=a=9$. B) $x+z=b=10$. C) $y+z=c=13$.

Auflös. 1) Man suche wie §. 23. den Werth der einen unbekannten Größe x aus A, B. Nämlich aus A) $x=a-y$, B) $x=b-z$.

2) Man setze die beiden Werthe von x einander gleich, so erhält man D) $a-y=b-z$, wo x eliminirt ist.

3) Aus C, wo auch kein x ist, und aus D suche man y, nämlich aus C) $y=c-z$, D) $a-b+z=y$, und mache E) $a-b+z=c-z$, wo auch y eliminirt ist.

Anm. Wäre in C auch x befindlich, so würde dessen Werth daraus bestimmt, und seinem Werthe aus A oder B gleich gesetzt.

4) Aus E findet man $2z=c-a+b$, folglich $z=\frac{c-a+b}{2}=7$. Dieser Werth anstatt z in C gesetzt,

giebt

giebt $y = c - \frac{c-a+b}{2} = \frac{c+a-b}{2} = 6$, in B aber

$x = b - \frac{c-a+b}{2} = \frac{b-c+a}{2} = 3$.

Anm. Enthielte jede der gegebenen Gleichungen alle 3 unbekannte Größen, so setze man in eine derselben statt y und z die gefundenen Werthe, um x zu finden.

§. 28. Exempel 1. Drey Spieler A, B, C haben dergestalt gewonnen, daß der Gewinn des 1sten nebst $\frac{1}{2}$ der beiden übrigen ist a

2ten nebst $\frac{1}{3}$ " " " b

3ten nebst $\frac{1}{4}$ " " " c

wieviel hat jeder gewonnen?

Man setze, der Gewinn eines jeden nach der Reihe sey x, y, z, so ist

A) $x + \frac{y+z}{2} = a$, B) $y + \frac{x+z}{3} = b$, C) $z + \frac{x+y}{4} = c$, folglich

$z = 2a - 2x - y$, $z = 3b - 3y - x$, $z = \frac{4c-x-y}{4}$.

Setzt man die Werthe von z in A und B, und in A und C gleich, so erhält man hieraus

D) $y = \frac{3b+x-2a}{2} = \frac{-4c-7x+8a}{3}$, folglich $9b + 3x - 6a = 16a - 8c - 14x$, folglich $x = \frac{22a-8c-9b}{17}$.

Setzt man diesen Werth in D) $y = \frac{3b-2a+x}{2}$, so erhält man $y = \frac{21b-6a-4c}{17}$. Setzt man die Werthe von x und y in A) $z = 2a - 2x - y$, so erhält man $z = \frac{20c-3b-4a}{17}$.

Z. E. Es sey $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$, so ist $x = \frac{45}{17}$, $y = \frac{31}{17}$, $z = \frac{15}{17}$ vom Rthlr. oder einer andern Größe.

Oder

Oder es sey $a=1, b=2, c=3$, so ist $x=-\frac{20}{17}$, $y=\frac{24}{17}$, $z=\frac{52}{17}$, d. i. der erste hat so viel Verlust.

§. 29. Exempel 2. Drey Personen A, B, C, spielen mit einander. Im ersten Spiele verliert A an jeden der beiden andern soviel, als jeder davon Geld hat. Im zweyten thut eben dies B, im 3ten C. Zuletzt hat jeder 24 Rthl. Wieviel hatte jeder Anfangs?

Man setze, jeder nach der Reihe habe Anfangs x, y, z, und $x+y+z=S$.

Im ersten Spiele hat A x, und die beiden andern $S-x$. Soviel aber verliert A, daher er noch behält $x-(S-x)=2x-S$, B aber hat nun 2y, und C 2z.

Im 2ten Spiele hat B 2y, und die beiden andern $S-2y$. Soviel aber verliert B, daher er noch hat $2y-(S-2y)=4y-S$, A aber hat nun $4x-2S$, und C 4z.

Im 3ten Spiele hat C 4z, und die beiden andern $S-4z$. Soviel aber verliert C, daher er noch hat $4z-(S-4z)=8z-S$; A aber hat nun $8x-4S$, und B $8y-2S$. Dies beträgt für jeden 24 Rthl.

(folglich $S=72$ Rthl.) Demnach ist

$8x-4S=24$ folglich $x=3+\frac{1}{2}S=39$

$8y-2S=24$ $y=3+\frac{1}{4}S=21$

$8z-S=24$ $z=3+\frac{1}{8}S=12$.

Anm. Diese Aufgabe läßt sich auch ohne Algebra auflösen, wenn man rückwärts geht. Denn da am Ende jeder 24 Rthl hat, und A, B, ihr Geld verdoppelt haben, so hatten sie vor dem 3ten Spiele: A 12, B 12, C 48.

Im 2ten Spiele haben A und C ihr Geld verdoppelt, folglich hatten sie vor dem 2ten Spiele: A 6, C 24, B 42.

Im 1sten Spiele haben B und C ihr Geld verdoppelt, folglich hatten sie zu Anfang: B 21, C 12, A 39.

§. 30 Anm Man sieht aus Obigem leicht ein, wie man auf eben die Art 4 und mehrere unbekannte Größen aus eben so vielen einfachen Gleichungen finden könne. Es sind aber hier noch Hauptbedingungen bey allen dergleichen Aufgaben: daß das Gegebene zu soviel Gleichungen hinreiche, als unbekannte Größen vorhanden sind, auch daß diese sämtlich blos in der ersten Potenz vorkommen, und keine mit der andern multiplicirt sey, weil sonst die Auflösung auf höhere Potenzen des Unbekannten führen würde.

3. Von

3. Von den zuſammengeſetzten, beſonders quadratiſchen Gleichungen.

§. 31. Erkl. Eine Gleichung heißt beſtimmt, determinata, worin nur eine unbekannte Größe vorkömmt, und eine Aufgabe heißt beſtimmt, wenn ſie durch eine beſtimmte Gleichung aufgelöſt wird.

§ 32 Anm. Die unbekannte Größe in der Gleichung wird durch die übrigen bekannten Größen ſo beſtimmt, daß ſie nur einen Werth (wie bey den einfachen Gleichungen) oder eine beſtimmte Anzahl von Werthen hat, (wovon die quadratiſchen Gleichungen ein Beyſpiel geben werden) Eine Aufgabe kann auf unbeſtimmte Gleichungen führen, und dennoch beſtimmt ſeyn, wenn ſich aus ihr ſoviel unbeſtimmte Gleichungen machen laſſen, als unbekannte Größen vorhanden ſind, wie 23, 27.

§. 33. Erkl. Eine beſtimmte Gleichung heißt irrational, wenn in einem oder in mehrern Gliedern die unbekannte Größe unter einem Wurzelzeichen ſteht, rational aber, wo dieſes nicht iſt, die Coefficienten mögen rational oder irrational ſeyn.

§. 34. Anm. In der allgemeinen Theorie der Gleichungen wird gelehrt, die Wurzelgrößen aus einer Gleichung wegzuſchaffen, alſo eine irrationale Gleichung rational zu machen. Hier kann ein Exempel hinreichen. Wäre nämlich $4x - \sqrt{3x} = 3$ rational zu machen, ſo ſetze man das Glied mit dem Wurzelzeichen allein, und erhebe die ganze Gleichung ins Quadrat. Hienach hat man $2x - 3x\sqrt{3} =$, folglich $4x^2 - 12x + 9 = 3x$, oder $x^2 - 1\frac{1}{4}x + \frac{9}{4} = 0$. Das nun Folgende redet blos von rationalen Gleichungen.

§. 35. Erkl. Eine beſtimmte Gleichung heißt zuſammengeſetzt, worin die unbekannte Größe die erſte Potenz überſteigt, und iſt hienach vom 2, 3, 4ten und höhern Grade, oder eine quadratiſche, cubiſche, biquadratiſche und höhere Gleichung.

§. 36. Erkl. Eine zuſammengeſetzte Gleichung iſt rein, pura, wenn darin die unbekannte Größe blos in einer Potenz vorkömmt, gemiſcht aber, oder unrein, acl-

adfecta, wenn sie verschiedene Potenzen der unbekannten Größe enthält.

§. 37. Anm. Der kürzeste Ausdruck, oder die allgemeine Form einer reinen Gleichung ist $x^n = r$, wenn man unter r die Summe aller bekannten Glieder der Gleichung, sie mag positiv oder negativ seyn, versteht. Z. E. aus $ax^3 + bx^3 + cd = fg$ wird $(a+b)x^3 = fg - cd$, oder $x^3 = \frac{fg-cd}{a+b}$, wofür man setzt $x^3 = r$. Auf ähnliche Art ist $x^2 + px = q$ die allgemeine Form der gemischten quadratischen Gleichung, wo p der Coefficient von x, und q das bekannte Glied heißt.

§. 38. Erkl. Die Wurzel, radix, einer Gleichung heißt der Werth der unbekannten Größe in der Gleichung. Diesen Werth finden, heißt die Gleichungen auflösen.

§. 39. Aufg. Eine reine Gleichung aufzulösen.

Auflös. Ihr allgemeiner Ausdruck ist $x^n = r$, daher $x = \sqrt[n]{r}$ ist, und gefunden wird, wenn man zwischen 1 und r $n-1$ mittlere Proportionalzahlen setzt, (Ar. §. 429.) Oder mittelst der logarithmischen Tafel, $n \log x = \log r$, folglich $\log x = \frac{\log r}{n}$ (Ar. §. 456. Aufl. 5.)

§. 40. Zus. Für eine quadratische Gleichung $x^2 = r$, folglich $x = \pm\sqrt{r}$ (Ar. §. 302.) findet man x, wenn man aus r die Quadratwurzel zieht, (Ar. §. 244.) und diese positiv und negativ nimmt. Ist r selbst negativ, so ist x unmöglich. (Ar. §. 304.)

§. 41. Exempel. Die Summe a zweyer Zahlen, und die Summe b ihrer Quadrate ist gegeben; man soll die Zahlen selbst finden.

Es sey x die halbe Differenz der Zahlen, folglich $\frac{1}{2}a + x$ die größere, und $\frac{1}{2}a - x$ die kleinere (Ar. §. 171.) so ist (Ar. §. 233.)

das

das Quadrat der größern $\frac{1}{2}a^2+ax+x^2$
der kleinern $\frac{1}{2}a^2-ax+x^2$

folglich der Quadrate Summe $=\frac{1}{2}a^2+2x^2=b$,
folglich $x^2=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a^2=r$, folglich $x=\pm\sqrt{r}$. Demnach iſt die eine Zahl $\frac{1}{2}a+\sqrt{r}$, die andre $\frac{1}{2}a-\sqrt{r}$.

Z. E. Es ſey $a=10$, $b=58$, ſo iſt $\sqrt{r}=\sqrt{(29-25)}=\pm 2$, und die größere Zahl $5+2=7$, die kleinere $5-2=3$, da dann $7+3=10$, und $49+9=58$.

Setzte man $a=10$, $b=42$, ſo wäre $\sqrt{r}=\sqrt{(21-25)}=\sqrt{-4}$ unmöglich, welches anzeigt, daß a und b unrichtig angegeben ſind, oder es gebe keine zwey Zahlen, daß ihre Summe 10, und die Summe ihrer Quadrate 42 wäre.

§. 42 Anm. So wie die Wurzeln quadratiſcher Gleichungen einen doppelten Werth haben, auch wohl unmöglich ſind, ſo könnte vielleicht etwas Aehnliches bey den Wurzeln höherer Gleichungen ſtattfinden. Dieſe Vermuthung wird in der allgemeinen Theorie der Gleichungen außer Zweifel geſetzt. Bis dahin begnügen wir uns an dem einen Werthe ihrer Wurzeln, §. 39.

§. 43. Aufg. Eine gemiſchte quadratiſche Gleichung aufzulöſen.

Auflöſ. Für die allgemeine Form $x^2+px=q$ ſetze man $x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}$, wo p und q bejaht oder verneint ſeyn können.

Regel. Man findet x, wenn man dem halben Coefficienten des zweyten Gliedes der Gleichung die Quadratwurzel aus der Summe des dritten Gliedes und des Quadrats dieſes halben Coefficienten beyfügt.

Bew. Zieht man aus x^2+px die Quadratwurzel nach (Ar. §. 249.) ſo findet man, daß ſie $x+\frac{1}{2}p$ ſeyn würde, wenn man zu jener Größe noch $\frac{1}{4}p^2$ addirte. Nun iſt $x^2+px=q$. Folglich iſt $x^2+px+\frac{1}{4}p^2=q+\frac{1}{4}p^2$, folglich $x+\frac{1}{2}p=\pm\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}$ folglich $x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}$.

Anm. Sollte q entweder $=-\frac{1}{4}p^2$, oder $=r-\frac{1}{4}p^2$ ſeyn, ſo hat man im erſten Falle $x^2+px=-\frac{1}{4}p^2$, folglich

$x^2+px+\frac{1}{4}p^2=0$, folglich $x+\frac{1}{2}p=0$, oder $x=\frac{1}{2}p$; im zweyten Falle aber $x^2+px=r\frac{1}{4}p^2$, folglich $x^2+px+\frac{1}{4}p^2=r$, folglich $x+\frac{1}{2}p=\pm\sqrt{r}$, oder $x=\frac{1}{2}p+\sqrt{r}$.

§. 44. Zus. Die Wurzel x hat einen doppelten Werth $\frac{1}{2}p+\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}$, und $\frac{1}{2}p-\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}$. Hiebey ist $\frac{1}{4}p^2$ allemal positiv, was auch p sey. Ist nun q negativ und $>\frac{1}{4}p^2$, so ist $\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$, folglich auch $\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$ unmöglich.

Ist aber q negativ und $=\frac{1}{4}p^2$, so wird $\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}=0$, und x hat nur einen Werth $\frac{1}{2}p$, weil die Gleichung alsdann nur einfach ist. Denn nach der Voraussetzung hat man $x^2+px=-\frac{1}{4}p^2$, folglich $x^2+px+\frac{1}{4}p^2=0$, folglich $x+\frac{1}{2}p=0$ eine einfache Gleichung.

§. 45. Exempel. Die Summe a zweyer Zahlen, und die Summe bb ihrer Quadrate ist gegeben wie §. 41; man soll die Zahlen x, y, selbst finden.

Hier hat man $x+y=a$, und $x^2+y^2=b^2$, folglich $y=a-x$, oder $y^2=a^2-2ax+x^2$, und daher $2x^2+a^2-2ax=b^2$, oder $x^2-ax=\frac{b^2-a^2}{2}$, folglich $x=\frac{a\pm\sqrt{(2b^2-a^2)}}{2}$, folglich $y=a-x=\frac{a\mp\sqrt{(2b^2-a^2)}}{2}$.

Z. E. Es sey $a=7$, $b=5$, so ist $x=\frac{7\pm1}{2}=4$, und $y=\frac{7\mp1}{2}=3$, oder auch $x=3$, und $y=4$.

Setzte man $a=20$, $b=12$, so wäre $x=10\pm\sqrt{-28}$, und $y=10\mp\sqrt{-28}$, also beides unmöglich, vergl. §. 41. Unter dieser Voraussetzung wird aus obiger Gleichung $x^2-ax=\frac{b^2-a^2}{2}$, diese $x^2-20x=-128$, welche also dennoch einen reellen Werth giebt, weil das Unmögliche darin durch die entgegengesetzten Zeichen einander aufhebt. Denn für $x=10\pm\sqrt{-28}$ ist

$$\begin{array}{rl} x = & 100-28\pm20\sqrt{-28} \\ -20x = & -200\quad\pm20\sqrt{-28}, \text{ folglich} \\ \hline x^2-20x= & -128. \end{array}$$

4. An-

4. Anwendung der Gleichungen auf die Progreßions- und Zinsenrechnung.

§. 46. Aufg. Die Gleichungen für das letzte Glied einer arithmetischen Reihe, und für die Summe der Reihe (Ar. §. 337.) sind gegeben; man soll von den fünf Dingen a, u, d, n, S jede zwey aus den übrigen finden.

Auflös. Aus den gegebenen Gleichungen leite man nach §. 17. andre ab, für die Aufgaben in (Ar. §. 342.), wovon hier einige Beyspiele folgen.

§. 47. Exempel 1. Es sind a, u, d gegeben; man soll n und S finden.

Aus (Ar. §. 337.) hat man $u=a+nd-d$, folglich $\frac{u-a+d}{d}=n$. Nun ist (Ar. §. 337.) $S=\frac{a+u}{2}.n$. Folglich ist $S=\frac{a+u}{2}\cdot\frac{u-a+d}{d}$.

Z. E. Es sey $a=7$, $u=37$, $d=5$, so ist $n=\frac{37-7+5}{5}=7$, und $S=\frac{7+37}{2}.7=154$, nämlich die Reihe 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37.

Setzte man $u=35$, so wäre $n=\frac{35-7+5}{5}=6\frac{3}{5}$, welches bedeutet, daß die letzte Verhältniß in 5 Theile getheilt sey, (Ar. §. 428.) daß nämlich zwischen 32 und 37 vier mittlere Proportionalzahlen 33, 34, 35, 36 gesetzt sind, welche $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ der ganzen Verhältniß 32—37 bedeuten, daß also von 7 bis 32 fünf ganze Verhältnisse vorhanden, und $35=u$ noch $\frac{3}{5}$ der 6ten Verhältniß betrage.

§. 48. Exempel 2. Es sind a, d und S gegeben; man soll n und u finden.

Aus (Ar. §. 339.) hat man $(2a+nd-d)\frac{n}{2}=S$, folglich $2an+n^2d-nd=2S$, oder $n^2+\frac{(2a-d)}{d}n=\frac{2S}{d}$, folglich nach §.

43. $n = \frac{-(2a-d) \pm \sqrt{(2ad)^2+8dS}}{2d}$, wodurch man (Ar. §. 337.) $u = a+(n-1)d$ hat.

Z. E. Es sey $a = 3$, $d = 2$, $S = 80$, so ist $2a-d = 4$, $(2a-d)^2 = 16$, $8dS = 1280$, $\sqrt{(16+1280)} = 36$, folglich $n = \frac{-4 \pm 36}{4} = -1 \pm 9$, welches $+8$ giebt, da dann $u = a+7d = 3+14$, und die Reihe 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17.

Man findet aber auch $n = -10$, welches hier bedeutet, daß man noch 10 Glieder linker Hand von a setzen solle, nämlich -17, -15, -13, -11, -9, -7, -5, -3, $-1+1$, deren Summe gleichfalls 80 ist.

§. 49. Exempel 3. Es sind u, d und S gegeben; man soll n und a finden.

Aus (Ar. §. 337.) hat man $a = u-dn+d$, folglich $S = \frac{(a+u)n}{2} = \frac{(2u-dn+d)n}{2}$, woraus die Gleichung $n^2 - \frac{2u+d}{d}n = -\frac{2S}{d}$ folgt, und hieraus nach §. 43. $n = -\frac{(2u+d) \pm \sqrt{(2u+d)^2-8dS}}{2d}$, wodurch man auch $a = u-dn+d$ findet.

Z. E. Es sey $u = 17$, $d = 2$, $S = 80$, so ist $2u+d = 36$, $(2u+d)^2 = 1296$, $8dS = 1280$, $\sqrt{(1296-1280)} = 4$, folglich $n = \frac{-36 \pm 4}{-4} = 8$. und $a = 17-16+2 = 3$.

§. 50. Aufg. Die Gleichungen für das letzte Glied einer geometrischen Reihe, und für die Summe der Reihe (Ar. §. 406.) sind gegeben; man soll von den fünf Dingen a, u, e, n, S jede zwey aus den übrigen finden.

Auflös. Man leite aus den gegebenen Gleichungen andre ab §. 17, für die Aufgaben Ar. §. 411, wovon hier einige Beyspiele folgen.

§. 51. Exempel 1. Es sind a, e, n gegeben; man soll S und u finden.

Aus

Aus (Ar. §. 406.) hat man $S=\frac{(e^n-1)a}{e-1}$, und $u=ae^{n-1}$, woraus auch $S=\frac{ue-a}{e-1}$ gefunden wird.

Z. E. 1) Der Erfinder des Schachſpiels verlangte zur Belohnung ſoviel Weizenkörner, als für die 64 Felder des Schachbrets erfordert werden, wenn man für das erſte Feld 1 Korn, und für jedes folgende das doppelte des vorhergehenden zählet, da dann $a=1, e=2$, $e-1=1$, und $n=64$, folglich $S=2^{64}-1$ iſt. Es iſt aber nach (Ar. §. 150.) $2^2.2^2=2^4$, $2^4.2^4=2^8$, $2^8.2^8=2^{16}$, $2^{16}.2^{16}=2^{32}$, und $2^{32}.2^{32}=2^{64}$.

Oder man nehme aus den Tafeln der Potenzen $2^{44}=17\,592\,186\,044\,416$, und $2^{20}=1048576$, und mache beide Produkte $2^{44}.2^{20}=2^{64}=18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$.

Oder mittelſt der logarithmiſchen Tafeln hat man $\log 2^{64}=64.\log 2=64.0{,}30103000=19{,}26592000$, wozu man die Zahl 18 446 700 000 000 000 000 findet.

2) Es ſey $a=2$, $e=5$, $n=11$, ſo iſt $\log u=\log a+10\log 5=0{,}30103000+6{,}98970000=7{,}29073000$, wozu man die Zahl 19531250 findet, woraus man $S=\frac{ue-a}{e-1}$ hat.

§. 52. Exempel 2. Es ſind a, u und n gegeben; man ſoll e und S finden.

Da $u=ae^{n-1}$, ſo iſt $\log u=\log a+(n-1)\log e$, folglich $\frac{\log u-\log a}{n-1}=\log e$, woraus man $S=\frac{ue-a}{e-1}$ hat.

Z. E. Es ſey $a=2$, $u=19531250$, $n=11$, ſo iſt $\log u=7{,}29073000$, $\log a=0{,}30103000$, und $\frac{\log u-\log a}{10}=0{,}69897000=\log 5$, folglich $S=\frac{5u-2}{10}$.

§. 53. Exempel 3. Es ſind a, u und e gegeben; man ſoll n und S finden.

Da $\log u=\log a+(n-1)\log e$ §. 52, ſo iſt $\frac{\log u-\log a}{\log e}+1=n$, da man dann auch S hat.

Z. E. Es sey a=2, u=19531250, e=5, so ist aus §. 52. $\frac{\log u - \log a}{\log e} = \frac{6,9899700}{0,6989700} = 10$, folglich 10+1=n.

Wären a, u und e so gegeben, daß für n eine gemischte Zahl gefunden wird, so zeigt dies eine Theilung der Verhältniß an, wie §. 47.

§. 54. Anm. Aus obigen Aufgaben erhellet zur Gnüge die Methode für die übrigen in Nr. §. 411; nur zwey derselben führen auf höhere Gleichungen, und müssen daher der Algebra vorbehalten bleiben. Nämlich

1) Wenn u, n, S gegeben sind, und man soll e finden, so hat man aus (Nr. §. 406.) $S = \frac{ae^n - a}{e-1}$, folglich $a = \frac{Se-S}{e^n-1}$, und aus $u = ae^{n-1}$, $\frac{u}{e^{n-1}} = a$, folglich $\frac{Se-S}{e^n-1} = \frac{u}{e^{n-1}}$, folglich $Se^n - Se^{n-1} = ne^n - u$, oder $e^n - \frac{S}{S-u} \cdot e^{n-1} = \frac{u}{S-u}$.

2) Wenn a, n, S gegeben sind, und man sucht e, so hat man aus $S = \frac{ae^n - a}{e-1}$ die Gleichung $ae^n - a = Se - S$, folglich $e^n - \frac{S}{a} \cdot e = \frac{a-S}{a}$.

§. 55. Zus. 1. Ist a=e, so enthält die Reihe lauter Potenzen von e, deren Summe $S = \frac{e^{n+1} - e}{e-1}$.

§. 56. Zus. 2. Ist a=e, so ist $S = \frac{e^n - 1}{e-1}$, einer ganzen Zahl, wenn e eine ganze Zahl ist, welches dient, Zahlen zu finden, die sich ohne Rest dividiren lassen. Z. E. für den Divisor 7 setze man e=8, da dann $\frac{8^n - 1}{8-1}$ aufgehen muß.

§. 57.

§. 57. Anm. In der Gleichung für $S=\frac{(e^n-1)a}{e-1}$ (Ar. §. 406.) läßt man n immer eine ganze bejahte Zahl seyn, weil es die Glieder der Reihe zählt; aber e kann auch ein ächter Bruch, auch verneint seyn.

§. 58. Zuf. 3. Ist e verneint, aber kein ächter Bruch, so ist in $S=\frac{e^n-1}{e-1}.a$ der Nenner in allen Fällen verneint, der Zähler aber verneint, wenn n ungerade, und bejaht, wenn n gerade ist. Im ersten Falle ist S bejaht, im zweyten aber verneint. Dies zeigt an, daß im zweyten Falle die Summe der ungeraden Glieder die Summe der geraden übersteige, und daß dies im ersten Falle umgekehrt sey.

§. 59. Zuf. 4. Setzt man a=1, n ungerade, und e=−f (wo f eine ganze Zahl bedeutet) so ist §. 58. $S=\frac{-f^n-1}{-f-1}=\frac{-(f^n+1)}{-(f+1)}=\frac{f^n+1}{f+1}$ gewiß eine ganze Zahl, welches gleichfalls, wie §. 56, dient, Zahlen zu finden, die sich durch eine gegebene Zahl ohne Rest dividiren lassen. Z. E. ist die gegebene Zahl 7, so setze man f=6, da dann $\frac{6^n+1}{6+1}$ aufgehen muß.

§. 60. Zuf. 5. Ist e=a ein ächter Bruch, folglich die Reihe fallend, so ist (Ar. §. 407.) $S=\frac{e-ue}{1-e}=\frac{e}{1-e}-\frac{ue}{1-e}=\frac{e}{1-e}.(1-u)$, wo S dem Werthe $\frac{e}{1-e}$ immer näher kömmt, je kleiner u ist, d. i. je weiter man die Reihe fortsetzt. Z. E. e=½, also die Reihe

$\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{8}.\frac{1}{16}.\frac{1}{32}.\frac{1}{64}.\frac{1}{128}.\frac{1}{256}.\frac{1}{512}.\frac{1}{1024}$..... und

$S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot(1-u)=1-u$, d. i. $1-\frac{1}{2}\frac{1}{2}$, oder $1-\frac{1}{4}\frac{1}{2}$, oder $1-\frac{1}{8}\frac{1}{24}$ u. s. w.

§. 61. Erkl. Die Zahl, welcher sich eine Reihe immer abnehmender Zahlen immer mehr nähert, und solcher, je mehr Glieder dieser Reihe man annimmt, so nahe kömmt als man will, jedoch sie nie völlig erreicht, heißt die Summe dieser Reihe, die man sich ohne Ende fortgesetzt gedenkt, oder die Summe der unendlichen Reihe.

§. 62. Zus. 1. Setzt man allgemein $e=\frac{1}{x}$, also $S=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\ldots$ in infin., so ist $S=\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x-1}{x}$ $=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x-1}=\frac{x}{x-1}$. Z. E. wenn man x nach und nach 2, 3, 4 u. s. w. setzt, so ist

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\ldots=1$
$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}\ldots=\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}\ldots=\frac{1}{3}$ u. s. w.

§. 63. Zus. 2. Wechseln in solcher Reihe die Zeichen der Glieder $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}\ldots=A$

so theile man sie in $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}\ldots=C$

und in $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}\ldots=\frac{1}{x}(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\ldots)$
$=\frac{1}{x}(1+C)=B$.

Demnach ist $A=B-C=\frac{1+C}{x}-C$. Setzt man nun in der Formel §. 62. x^2 anstatt x, so ist $C=\frac{1}{x^2-1}$,

folg.

folglich $A=\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)-\frac{1}{x^2-1}=\frac{x^2}{x(x^2-1)}$

$\frac{1}{x^2-1}=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{(x-1)1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x+1}$. Z. E.

$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\ldots\ldots=\frac{1}{3}$.

§. 64. Zuſ. 3. Da $A+2C=B-C+2C=B+C$, ſo giebt $A+2C$ eine Reihe wie A §. 63, aber mit lauter bejahten Gliedern, §. 62. Dies erhellet auch ſo:

$A+2C=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{x-1+2}{x^2-1}=\frac{(x+1)1}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{1}{x-1}$ wie §. 62.

§. 65. Zuſ. 4. Setzt man §. 62. $x+2$ anſtatt x, ſo wird $S=\frac{1}{x+1}$, und die Reihe $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+2)^3}\ldots\ldots=\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}\ldots\ldots$ §. 63.

So iſt z. E. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\ldots\ldots=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\ldots\ldots$

§. 66. Aufg. Ein Capital a ſteht n Jahr auf $\frac{q}{r}$ Zinſen, welche jährlich dazu geſchlagen werden (Ar. §. 394.); wie groß wird nach Verlauf dieſer Zeit ſein Werth S ſeyn?

Auflöſ. Da $r:r+q=a:a.\frac{r+q}{r}$ (A), folglich nach 2 Jahren $A.\frac{r+q}{r}=a.\left(\frac{r+q}{r}\right)^2$ (B), und nach 3 Jahren B. $\frac{r+q}{r}=a.\left(\frac{r+q}{r}\right)^3$ u. ſ. w. ſo iſt nach

n Jahren $a.\left(\frac{r+q}{r}\right)^n = S$. Denn wenn dies Gesetz für $n-1$ Jahre stattfindet, daß der Werth $a\left(\frac{r+q}{r}\right)^{n-1} = Q$ ist, so ist der Werth nach n Jahren $= Q.\frac{r+q}{r} = a.\left(\frac{r+q}{r}\right)^n$. Demnach ist

I. $lS = la + nl\left(\frac{r+q}{r}\right)$ Z. E. $a = 1000$ Thl. $n =$ 20 Jahre $\frac{q}{r} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$.

II. $la = lS - nl\left(\frac{r+q}{r}\right)$ Z. E. 1000 Thl. ist nach n Jahren ohne Zinsen gefällig; wie groß ist sein jetzigen Werth a? Oder: ich will nach n Jahren 10000 Thlr.; wieviel Capital ist dazu nöthig?

III. $l(r+q) = \frac{lS - la + nlr}{n}$. Z. E. $S = 10000$ nach $n = 10$ Jahren gefällig, wird verkauft für $a = 6756$ Thlr.; wieviel Procent q? Oder: aus 6 Menschen nach der Sündfluth war nach 200 Jahren eine Million geworden; wie groß war jährlich die Bevölkerung?

IV. $n = \frac{lS - la}{l\left(\frac{r+q}{r}\right)}$ Z. E. $a = 1000$ bringt $S = 2500$ zu 3 Procent, wieviel Jahre?

§. 67. Aufg. Ein Capital a steht unter vorigen Bedingungen §. 66, und wird am Ende eines jeden Jahrs mit einem Capitale b unter eben den Bedingungen

gen vermehrt; wie groß iſt der geſammte Werth T nach n Jahren?

Auflöſ. Das erſte b wird am Ende des erſten, d. i. zu Anfange des 2ten Jahres angelegt, und ſteht alſo 1 Jahr weniger, d. i. n—1 Jahr, das zweyte b n—2 Jahr, und ſo fort, das letzte b, 1 Jahr. Setzt man nun z für $\frac{r+q}{r}$; ſo iſt der Werth

für a $= az^n$
für das erſte b $= bz^{n-1}$
für das zweyte b $= bz^{n-2}$ u. ſ. w.
für das letzte b $= bz$. Demnach iſt

$$T = az^n + b(z+z^2.....+z^{n-1}) = az^n + b\left(\frac{z^n-z}{z-1}\right)$$

§. 55.

Setzt man den Werth für z, ſo iſt

$$T = a\left(\frac{r+q}{r}\right)^n + b\,\frac{\left(\frac{r+q}{r}\right)^n - b\left(\frac{r+q}{r}\right)}{\frac{r+q}{r} - 1}, \text{ wo}$$

der Diviſor $\frac{r+q-r}{r} = \frac{q}{r}$ alſo $T = a\left(\frac{r+q}{r}\right)^n + \frac{br}{q}$

$\left(\frac{r+q}{r}\right)^n - \frac{b}{q}$, $(r+q)$, d. i.

$$\text{V. } T = \frac{aq+br}{q}.\left(\frac{r+q}{r}\right)^n - \frac{b(r+q)}{q}$$

Nimmt man b=a, daß aus T, R wird, ſo iſt

$$\text{VI. } R = a.\frac{r+q}{q}\left(\frac{r+q}{r}\right)^n - a\,\frac{r+q}{q}, \text{ folglich}$$

VII. $a = \frac{Rq}{(r+q)\left(\frac{r+q}{r}\right)^n - (r+q)}$ Z. E. R = 10000

Thl. nach n = 20 Jahren ohne Zinsen gefällig, soll so abgetragen werden, daß jährlich eine gleiche Summe a bezahlt wird, (so daß a jährlich mit den Zinsen, und mit a vermehrt, nach n Jahren R bringt), wie groß muß a seyn?

Ferner ist nach VI. $\frac{Rq+ar+aq}{ar+aq} = \left(\frac{r+q}{r}\right)^n$, folglich

$l(Rq+ar+aq) - l(ar+aq) = nl\left(\frac{r+q}{r}\right)$, folglich

VIII. $n = \frac{l(Rq+ar+aq) - l(ar+aq)}{\left(\frac{r+q}{r}\right)}$. Z. E. ich zahle wie zuvor jährlich a; in wieviel Jahren ist R abgetragen?

§. 68. Aufg. Es hat jemand eine jährliche Rente a durch n Jahre zu genießen, und will sie verkaufen; welches ist ihr jetziger Werth P?

Auflös. Dieser Werth P als ein Capital angelegt, ist nach n Jahren $= P.\left(\frac{r+q}{r}\right)^n$ §. 66. Diesen muß der Werth R der jährlichen Rente a nach n Jahren gleich seyn. Man findet aber R, wenn man in VI. (n — 1) statt n setzt (weil a erst nach Ende des ersten Jahres angelegt wird) und a addirt, (weil nach Verlauf des nten Jahres noch ein a ohne Zinsen fällt.) Demnach ist in VI. $R = \frac{ar+aq}{q}\left(\frac{r+q}{r}\right)^{n-1} - \frac{ar+aq}{q} + a$, wo die beiden letzten Glieder $= \frac{-ar-aq+aq}{q} = -\frac{ar}{q}$. Demnach

nach ist $P.\left(\frac{r+q}{r}\right)^n = \frac{ar+aq}{q}\left(\frac{r+q}{r}\right)^{n-1} - \frac{ar}{q}$. Dividirt man beide Seiten dieser Gleichung mit $\left(\frac{r+q}{r}\right)^n$, so wird das erste Glied P, das zweyte $a, \frac{r+q}{r}.\frac{1}{\frac{r+q}{r}}$, d. i. $\frac{ar}{q}$, das dritte $\frac{ar}{q}.\left(\frac{r}{r+q}\right)^n$. Folglich ist

IX. $P = \frac{ar}{q} - \frac{ar}{q}.\left(\frac{r}{r+q}\right)^n$. Z. E. für eine jährliche Rente a auf n Jahr muß ich der allgemeinen Leihbank das Capital P zahlen, wo freylich a > als die Zinsen $P.\frac{q}{r}$.

Hieraus folgt auch $Pq = \left(r - r.\frac{r^n}{r+q}\right)a$, folglich

X. $a = \frac{Pq}{r - r\left(\frac{r}{r+q}\right)^n}$. Z. E. für das Capital P erhalte ich auf n Jahre die Rente a. Oder: wie groß ist für das Capital P die Leibrente a, wenn die Bank meine Lebenszeit n Jahre schätzt, und q Zinsen zahlt? Oder: eine Schuld P, die jährlich mit q Procent zu verzinsen ist, soll in n Jahren abgetragen seyn, wenn jährlich eine gleiche Summe a? gezahlt wird.

Ferner ist aus IX. letzte Formel $ar.\left(\frac{r}{r+q}\right)^n = ar - Pq$, folglich $\left(\frac{r}{r+q}\right)^n = \frac{ar-Pq}{ar}$ und $n.l\frac{r}{r+q} = l(ar-Pq) - lar$, folglich

XI.

XI. $n = \frac{l(ar-Pq)-lar}{lr-l(r+q)} = \frac{lar-l(ar-Pq)}{l(r+q)-lr}$

Z. E. für das Capital P zu q Procent genieße ich die Rente a, die größer als die Zinsen $P.\frac{q}{r}$, nach wieviel Jahren wird das ganze Capital verzehrt seyn?

5. Von den unbestimmten Gleichungen.

§. 69. Erkl. Eine Gleichung heißt unbestimmt, wenn sie mehr als eine unbekannte Größe enthält, und eine Aufgabe heißt unbestimmt, wenn sie durch eine unbestimmte Gleichung aufgelöst wird. Vergl. §. 31.

§. 70. Anm. Jede Gleichung bestimmt eine unbekannte Größe, d. i. giebt nur einen oder etliche gewisse Werthe der unbekannten Größen an, (z. E. zwey bey den quadratischen, und nur einen bey den einfachen Gleichungen). Sind nun bey einer Aufgabe die gegebenen Bedingungen zu so vielen verschiedenen Gleichungen hinreichend, als unbekannte Größen gesucht worden, so läßt sich daraus eine Finalgleichung herleiten, die nur eine dieser unbekannten Größen enthält, folglich deren Werth, und hiedurch die Werthe aller übrigen vollkommen bestimmt, §. 30. Eine solche Aufgabe ist also bestimmt, und giebt nur eine bestimmte Auflösung. Reichen aber die Bedingungen der Aufgabe nicht zu so vielen verschiedenen Gleichungen hin, so ist man genöthigt, für einige der unbekannten Größen verschiedene willkührliche Werthe anzunehmen, worauf dann auch die Werthe der übrigen beruhen. Eine solche Aufgabe ist unbestimmt, weil sie mehrere Auflösungen verstattet. Geben endlich die Bedingungen mehrere Gleichungen, als erforderlich sind, so ist die Aufgabe mehr als bestimmt, problema plus quam determinatum, und nur möglich, wenn Bedingungen, woraus man dieselben Gleichungen herleitet, auf eine und dieselbe Größe sich beziehen.

Z. E. Eine bestimmte Aufgabe: Man sucht zwey Zahlen x, y, deren Product 30, und deren Summe 11 gebe, d. i. $xy=30$, und $x+y=11$. Eine unbestimmte Aufgabe: Man sucht zwey Zahlen x, y, deren Summe 30 gebe, das ist,

$x+y=30$, wo man für x mancherley ganze und gebrochene, bejahte und verneinte Zahlen annehmen, und dadurch mancherley Werthe von y erhalten kann. Eine mehr als bestimmte Aufgabe: Man sucht eine Zahl x, deren 2faches ihrem Quadrate, deren 4faches ihrem Würfel, und deren 16faches ihrem Biquadrate gleich sey, d. i. $x^2=2x$, $x^3=4x$, $x^4=16x$, wovon jedes sich auf die Zahl 2 bezieht. Unmöglich wäre die Aufgabe, wenn das 2fache und 3fache von x dem Quadrate von x gleich seyn sollte; denn $2x=x^2$ giebt $2=x$, und $3x=x^2$ giebt $3=x$, daher $2=3$ seyn müßte, welches ungereimt ist.

§. 71. Anm. 2. Eine bestimmte Aufgabe soll eben so viele verschiedene Gleichungen darreichen, als unbekannte Größen gesucht werden, welcher Beysatz: verschiedene, wohl zu bemerken, weil zuweilen einige Data verschieden zu seyn scheinen, die im Grunde es nicht sind. Z. E. man sucht zwey Zahlen x, y, daß $\frac{1}{4}$ der Summe 48, desgleichen die Hälfte und $\frac{1}{4}$ der Summe 144 betragen, d. i. $\frac{x+y}{4}=48$, und $\frac{1}{4}(x+y)=144$. Ersteres giebt $x+y=48.4$, und letzteres $x+y=\frac{144}{\frac{1}{2}}=48.4$.

Eben so darf man die aus den gegebenen Gleichungen abgeleitete nicht für = ue, von den gegebenen verschiedene Gleichungen halten, weil sie nichts mehr bestimmen, als was die gegebenen schon bestimmten.

§. 72. Anm. 3. Ist, wie gemeiniglich geschieht, bey einer einfachen Gleichung, wie $xy=100$, die Frage blos auf bejahte ganze Zahlen eingeschränkt, so darf man nur solche Werthe von x annehmen, und nur solche Werthe von y zulassen, als mit dieser Bedingung bestehen können; aber man soll auch alle diese Werthe finden. Z. E. für die Werthe 2, 4, 5, 10 von x erhält man die Werthe 50, 25, 20, 10 von y. Andere Werthe von x und y können mit der Bedingung der Frage nicht bestehen.

Hiedurch wird die Zahl der Werthe von x bestimmt, doch nicht so, wie §. 42, wo aus der Gleichung $x^2=r$ folgt $x=\pm\sqrt{r}$, oder wie §. 43, wo aus der Gleichung $x^2+px+q=0$ folgt $x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$. Denn hier kömmt der doppelte Werth von x nicht von einem Werthe einer zweyten unbekannten Größe, sondern von der zweyten Potenz der einen unbekannten Größe x.

§. 73. Anm. 4. Gemeiniglich erfordern die Bedingungen der Frage bey einer zusammengesetzten Gleichung, wie $y^2-x^2=a$,

$=n$, folglich $y^2 = a + x^2$, und $y = \mp\sqrt{(a + x^2)}$ daß die Werthe von y rational seyn sollen, wo es dann blos darauf ankömmt, für x solche Werthe anzunehmen, daß $a + x^2$ eine vollständige Quadratzahl werde, woraus sich die Quadratwurzel genau ziehen lasse.

Die hiezu erforderlichen Kunstgriffe waren den Alten unentbehrlich, da ihnen die Irrationalzahlen weniger Schwierigkeiten machten. Zur Uebung des Verstandes, und zu größerer Fertigkeit in analytischen Rechnungen, sind sie noch dienlich.

§. 74. Anm. 5. Aus §. 72. 73. erhellet, daß bey unbestimmten Fragen alles darauf ankömmt, für jeden Fall zu erforschen, unter welchen Umständen die Auflösung in ganzen und bejahten, oder doch rationalen Zahlen möglich sey. Hierüber findet man ausführliche Untersuchungen in B. Eulers vollständigen Anleitung zur Algebra, Petersburg 1770. 8. worin der ganze zweyte Abschnitt des zweyten Theils, von der unbestimmten Analytik, die auch analysis Diophantea, nach dem Diophantus, benennt wird, in folgender Ordnung handelt:

I. von den einfachen Gleichungen, und zwar
   1. aus einer Gleichung zwey unbekannte Zahlen zu finden, Cap. 1.
   2. aus zwey Gleichungen drey und mehrere unbekannte Zahlen zu finden, Cap. 2.

II. von den zusammengesetzten Gleichungen für zwey unbekannte Zahlen, und zwar,
   1. wenn die eine nur in der ersten Potenz ist, Cap. 3.
   2. wenn beide in höhern Potenzen sind, so dann die Größe unter das Wurzelzeichen kömmt. Hiezu lehrt Herr Euler
      a) Kunstgriffe, dergleichen Irrationalformen rational zu machen, d. i. solche Werthe für die eine unbekannte Zahl zu finden, daß die Größe unter dem Wurzelzeichen eine vollkommene Potenz werde, woraus sich die verlangte Wurzel genau ziehen läßt, Cap. 4—13.
      b) Die Anwendung solcher Kunstgriffe zur Auflösung zusammengesetzter unbestimmter Gleichungen, Cap. 14. 15.

Da eine nur etwas vollständige Unterweisung in der unbestimmten Analytik hier zu vielen Raum einnehmen würde, welcher wichtigern Lehren vorbehalten werden muß, so mag es genügen, daß durch obigen Entwurf auf ein Buch gewiesen worden, welches noch bis jetzt das ausführlichste in diesem Fache ist. Nur einige Beyspiele sollen noch zur Erläuterung des Vorhergehenden gegeben werden.

§. 75.

§. 75. Aufg. Ein Münzmeister hat dreyerley Silber, 14- 11- und 9löthiges, und soll 30 Mark 12löthiges daraus machen. Wieviel Mark muß er von jeder Sorte dazu nehmen?

Auflös. Er nehme von der ersten Sorte x, von der zweyten y, und von der dritten z Mark, so ist $x+y+z=30$, oder $9x+9y+9z=270$, die erste Gleichung. Nun wird diese Masse an Silber enthalten $14x+11y+9z$ Loth, und wiegt 30 Mark, wovon jede 12 Loth Silber enthalten soll, folglich zusammen 360 Loth. Demnach hat man die zweyte Gleichung $14x+11y+9z=360$. Subtrahirt man davon die erste, so erhält man $5x+2y=90$, folglich $2y=90-5x$, oder $y=45-\frac{5}{2}x$, folglich x eine gerade Zahl, und $\frac{5}{2}x<45$, oder $5x<90$, und daher $x<18$. Es war nach der ersten Gleichung $z=30-x-y$, folglich, den gefundenen Werth für y gesetzt, $z=30-x-45+\frac{5}{2}x=\frac{3}{2}x-15$, folglich $\frac{3}{2}x>15$, oder $3x>30$, und daher $x>10$. Soll also x gerade seyn, und >10, aber <18, so kann x nichts anders seyn, als entweder 12, oder 14, oder 16. Daher ist nach den gefundnen Gleichungen

x	y	z
12	15	3
14	10	6
16	5	9

§. 76. Aufg. Man soll eine Quadratzahl x^2 finden, welche von einer gegebenen Quadratzahl a^2 subtrahirt, zur Differenz eine Quadratzahl y^2 habe.

Auflös. Hienach ist $a^2=x^2=y^2$. Nun sey $y=a-px$, so ist $a^2-x^2=a^2-2apx+p^2x^2$, folglich $x^2=2apx-p^2x^2$, oder $x=2ap-p^2x$, folglich $x+p^2x=(1+p^2)x=2ap$, folglich $x=\frac{2ap}{1+p^2}$. Nun nehme man a und p wie

man

man will, nur rational, so wird auch x, folglich auch y, rational werden.

Z. E. Es sey $a=10$, $p=\frac{1}{4}$, so ist $x=\frac{10}{1+\frac{1}{4}}=\frac{40}{5}=8$, und $y=10-4=6$, auch $100-64=36$. Es sey $a=7$, $p=3$, so ist $x=\frac{2.7.3}{1+9}=4,2$ u. s. w.

§. 77. Aufg. Man soll zwey Quadratzahlen finden, deren Summe auch eine Quadratzahl ist; doch sollen alle ganze Zahlen seyn.

Auflös. Es sey $x^2+y^2=z^2$, folglich $y^2=z^2-x^2=(z+x)(z-x)$, folglich $z+x>y$. Es sey daher $z+x=ny$, wo n eine ganze Zahl seyn muß, so ist $z-x=\frac{y}{n}$. Setzt man nun $\frac{y}{n}=m$, so ist $y=nm$, und $ny=n^2m$. Nun ist $z=\frac{z+x}{2}+\frac{z-x}{2}$. Folglich ist $z=\frac{n^2m}{2}+\frac{m}{2}=\frac{n^2+1}{2}$. m. Eben so ist auch $x=\frac{z+x}{2}-\frac{z-x}{2}=\frac{n^2m}{2}-\frac{m}{2}=\frac{n^2+1}{2}$. m. Da nun z und x ganze Zahlen seyn sollen, so müssen sich die Zähler der Brüche mit 2 dividiren lassen. Ist daher m ungerade, so muß n^2+1 gerade, folglich n ungerade seyn; ist aber m gerade, so kann n^2+1, folglich auch n, gerade oder ungerade seyn.

Wäre z. E. $m=1$, folglich ungerade, so kann man für n alle ungerade Zahlen setzen. Alsdann aber ist

$y = m$ $n = 1, 3, 5, 7, 9, 11 \ldots$

$x = \frac{n^2 - 1}{2} \cdot m = 0, 4, 12, 24 \ldots$

$z = \frac{n^2 + 1}{2} \cdot m = 1, 5, 13 \ldots$

Wäre hingegen $m = 2$, folglich gerade, so kann man für n jede ganze Zahl setzen. Alsdann ist

$y = m$ $n = 2, 4, 6, 8, 10 \ldots$

$x = (n^2 - 1)\frac{m}{2} = 0, 3, 8, 15 \ldots$

$z = (n^2 - 1)\frac{m}{2} = 2, 5, 10, 17 \ldots$

III.

Die Geometrie.

Erster Theil: die Planimetrie.

1. Erste Begriffe von den Figuren.

§. 1. Erkl. Eine ſtätige Größe, continuum, heißt, deren Theile ſo zuſammenhängen, daß des einen Ende zugleich des andern Anfang iſt.

Der ſtätigen Größe iſt die abgeſonderte, quantitas diſcreta, dergleichen jede Zahl iſt, entgegengeſetzt.

§. 2. Erkl. Der Raum, den eine ſtätige Größe einnimmt, heißt eine geometriſche Ausdehnung, extenſum, und deren Aeußerſtes, oder wo ſie aufhört, ihre Gränze, terminus.

§. 3. Erkl. Ein geometriſcher Körper, ſolidum, heißt, was nach allen Seiten ausgedehnt und begränzt iſt,

iſt, der eine Länge, Breite und Tiefe hat. Die Gränzen des Körpers heißen Flächen, ſuperficies, die blos Länge und Breite haben; der Flächen aber, Linien, die blos Länge haben; und der Linien, Punkte, die weder Ausdehnung noch Theile haben.

§. 4. Erkl. Eine gerade Linie, linea recta, iſt, deren Punkte alle nach einerley Gegend zu liegen; eine krumme, curva, von der kein Theil gerade iſt.

§. 5. Anm. Eine Linie kann anfangen und aufhören, wo man will. Daher kann man in ihr überall Punkte annehmen, oder ſich auch nur einen Punkt vorſtellen, der nach und nach in verſchiedene Stellen der Linie gekommen wäre. Hienach ſagt man: die Linie entſtehe aus der Bewegung eines Punktes. Es beſchreibt aber der Punkt eine gerade Linie, wenn er beſtändig nach einerley Gegend zugeht, alſo den einmal genommenen Weg nie ändert; eine krumme aber, wenn er niemals nach einerley Gegend zu fortgeht, ſondern ſeinen Weg nach dem Geſetze der Stätigkeit beſtändig ändert.

§. 6. Foderung. Man ſoll von jedem gegebenen Punkte zum andern eine gerade Linie ziehen, auch jede gegebene gerade Linie an beiden Enden in eben derſelben Richtung beliebig verlängern können.

§. 7. Zuſ. 1. Durch jede zwey Punkte einer geraden Linie iſt ihre Lage, poſitio, und durch ihre beiden Endpunkte auch ihre Länge, magnitudo, gegeben.

§. 8. Zuſ. 2. Durch zwey Punkte geht nur eine gerade Linie.

§. 9. Zuſ. 3. Zwey gerade Linien ſchließen daher keinen Raum ein, und haben, wenn ſie zuſammentreffen, ohne ganz auf einander zu fallen, nichts gemein, als nur einen Punkt, worin ſie verlängert einander ſchneiden, ſo daß von jeder etwas zu beiden entgegengeſetzten Seiten des Punktes iſt.

§. 10. Erklär. Eine ebene Fläche, oder Ebene, planum, iſt, in der man von jedem Punkte zum an-

dern gerade Linien, deren Punkte alle in der Fläche liegen, ziehen kann; eine gekrümmte Fläche, superficies curva, von der kein Theil eben ist.

§. 11. Zus. Eine unbegränzte gerade Linie theilt die unbegränzte Ebene, in der sie liegt, in zwey Theile, die an ihren entgegengesetzten Seiten liegen.

§. 12. Erkl. Ein ebener Winkel, angulus planus, ist die Neigung, die zwey verschiedene in der Ebene liegende und zusammentreffende Linien gegen einander haben. Die Schenkel, crura, des Winkels heißen diese Linien, die ihn einschließen; der Scheitel oder die Spitze, vertex, heißt der Punkt, wo die Linien zusammentreffen.

§. 13. Anm. (Fig. 1.) Sind des Winkels BAC Schenkel BA, AC, gerade Linien, so heißt er ein geradliniechter Winkel. Von solchen ist vorerst blos die Rede, daher man sie auch schlechthin Winkel nennt, und darunter blos ebene geradlinichte Winkel versteht. Man pflegt aber jeden Winkel entweder nach seinen Schenkeln BAC, oder nach seiner Spitze A, oder nach seiner Oeffnung x zu benennen.

§. 14. Erkl. (Fig. 2.) Eine gerade Linie AB ist auf einer andern CD senkrecht oder lothrecht, perpendicularis, normalis, wenn die Winkel ABC, ABD, die sie mit ihr macht, (die Nebenwinkel, contigui) einander gleich sind. Jede andre EB ist schief, obliqua, auf CD.

§. 15. Erkl. (Fig. 2.) Ein rechter Winkel, rectus, ABC, oder ABD, ist, den eine senkrechte Linie AB macht, oder der seinem Nebenwinkel gleich ist, §. 14. Ein stumpfer Winkel, obtusus, CBE, heißt, der größer; ein spitzer, acutus, DBE, der kleiner als ein rechter ist. Beide heißen schiefe Winkel, obliqui.

An-

Anm. Ein rechter Winkel soll im Folgenden durch R angezeigt werden. Z. E. ABC = ABD = R.

§. 16. Erkl. Eine allenthalben begränzte Fläche heißt eine Figur, und zwar eine ebene Figur, wenn solche Fläche eben ist.

§. 17. Anmerk. Wir reden vorerst blos von ebenen Figuren, die wir schlechthin Figuren nennen wollen. Ueberhaupt muß man sich durch die ganze Planimetrie immer eine Ebene, wofür die Oberfläche des Papiers oder der Tafel gelten kann, denken, worin die Verzeichnung geschieht, wenn auch gleich dies nicht immer ausdrücklich angezeigt wird.

§. 18. Erkl. Geradlinichte Figuren sind, die von geraden Linien eingeschlossen werden. Diese Linien heißen ihre Seiten, latera, und machen zusammen ihren Umfang oder Umring, perimeter.

Die Seite, über der man sich die Figur beschrieben denkt, heißt ihre Grundlinie.

§. 19. Erkl. Eine dreyseitige Figur, oder ein Triangel, hat drey, eine vierseitige Figur hat vier, eine vielseitige Figur, oder ein Polygon, hat mehr als vier Seiten.

Die gerade Linie zwischen zwey entgegengesetzten Winkelspitzen der Figur heißt eine Diagonale.

§. 20. Erkl. (Fig. 3.) Ein gleichseitiger Triangel ABC hat drey gleiche Seiten.

(Fig. 4.) Ein gleichschenklichter DEF hat zwey gleiche Seiten.

(Fig. 5.) Ein ungleichseitiger GHK, hat drey ungleiche Seiten.

Die beiden Seiten über der Grundlinie des Triangels heißen seine Schenkel.

§. 21. Erkl. (Fig. 4.) Ein rechtwinklichter Triangel GHK, hat einen rechten Winkel G.

(Fig. 6.) Ein ſtumpfwinklichter LMN, hat einen ſtumpfen Winkel L.

(Fig. 3.) Ein ſpitzwinklichter ABC, hat drey ſpitze Winkel.

(Fig. 5.) Im rechtwinklichten Triangel GHK heißen Cathyten die Seiten KG, GH, die den rechten Winkel einſchließen, und Hypotenuſe die Seite KH, die ihm gegenüberſteht.

§. 22. Erkl. Unter den vierſeitigen Figuren iſt (Fig. 7.) ein Quadrat ABCD gleichſeitig und rechtwinklicht.

(Fig. 8.) Ein Rectangel EFGH rechtwinklicht aber nicht gleichſeitig.

(Fig. 9.) Ein Rhombus KLMN gleichſeitig aber nicht rechtwinklicht.

(Fig. 10.) Ein Rhomboid OPQR weder gleichſeitig noch rechtwinklicht, doch daß die einander gegenüberſtehenden Seiten gleich ſind;

ein Trapez jede von den genannten verſchiedene vierſeitige Figur.

§. 23. Erkl. Eine geradlinichte Figur heißt ordentlich oder regulär, die lauter gleiche Seiten und lauter gleiche Winkel hat; jede andre heißt unordentlich oder irregulär.

§. 24. Erkl. (Fig. 11.) Eine Figur heißt ein Kreis, circulus, wenn ſie von einer Linie ABDEFA, dem Umkreiſe, peripheria, deren Punkte alle von einem Punkte C innerhalb der Figur, dem Mittelpunkte,

punkte, centrum, gleichweit abſtehen, eingeſchloſſen iſt. Oder: ein Kreis wird von einer geraden Linie CF, welche ſich in einer Ebene um einen unverrückten Punkt C rings umdrehet, beſchrieben. Ein Durchmeſſer, diameter, des Kreiſes AE iſt jede gerade Linie durch den Mittelpunkt, die zu beiden Seiten vom Umkreiſe begränzt wird. Eine Sehne, chorda, iſt jede vom Umkreiſe begränzte gerade Linie BD, die nicht durch den Mittelpunkt geht. Ein Halbmeſſer, radius, iſt jede gerade Linie CF vom Mittelpunkte bis zum Umkreiſe. Ein Kreisbogen, arcus, iſt jedes Stück des Umkreiſes, wie DEF.

§. 25. Zuſ. 1. Alle Halbmeſſer eines Kreiſes ſind einander gleich; daher iſt der Durchmeſſer der doppelte Halbmeſſer, und folglich ſind auch alle Durchmeſſer eines Kreiſes einander gleich.

§. 26. Zuſ. 2. Jeder Punkt iſt innerhalb eines Kreiſes oder Umkreiſes, wenn ſein Abſtand vom Mittelpunkte kleiner; außerhalb aber, wenn ſolcher Abſtand größer als des Kreiſes Halbmeſſer iſt.

§. 27. Zuſ. 3. (Fig. 12.) Jede Linie AB oder FG durch zwey Punkte, deren einer innerhalb, der andere auſſerhalb eines Kreiſes um C iſt, ſchneidet ſeinen Umkreis, als welcher eine zuſammenhängende krumme Linie iſt.

§. 28. Foderung. Man ſoll um jeden Punkt mit jedem Halbmeſſer einen Kreis beſchreiben können.

§. 29. Zuſ. (Fig. 13.) Von jeder geraden Linie AB läßt ſich jede kleinere CD abſchneiden, wenn man um A mit dem Halbmeſſer AE=CD einen Kreis beſchreibt. §. 27.

§. 30. Aufg. (Fig. 12.) Um jeden Punkt C einen Kreis zu beſchreiben, der eine unbegränzte gerade Linie BE in mehr als einem Punkte ſchneide.

Auflöſ. Nach einem beliebigen Punkte A in der Linie BE ziehe man CA, und beſchreibe um C mit einem gröſsern Halbmeſſer CH einen Kreis, deſſen Durchmeſſer HK: ſo liegen deſſen Endpunkte H, K, auf zwey entgegengeſetzten Seiten (§. 11.) der unbegränzten BE. Daher muß der Umkreis, um von H zu beiden Seiten nach K zu kommen, auf jeder Seite durch BE gehen, alſo wenigſtens zweymal die BE ſchneiden.

§. 31. Zuſ. 1. Jede gerade Linie BE durch einen Punkt A innerhalb eines Kreiſes, ſchneidet genugſam verlängert den Umkreis wenigſtens in zwey Punkten.

§. 32. Zuſ. 2. Solche Schlüſſe gelten auch von zwey Kreiſen um C und D, wenn in dem Umkreiſe des einen zwey Punkte ſind, deren einer innerhalb, der andere auſſerhalb des andern Kreiſes liegt.

§. 33. Aufg. (Fig. 14.) Ueber jeder geraden Linie AB einen gleichſeitigen Triangel zu beſchreiben.

Auflöſ. Aus A und B beſchreibe man mit AB, BA, Kreiſe, die einander in C ſchneiden, und ziehe von C nach A und B gerade Linien.

Bew. Verlängert man AB bis D, ſo iſt A innerhalb, D auſſerhalb des Kreiſes um A, folglich giebt es einen Durchſchnitt, wie C §. 27. Nun iſt AC=AB, und AB=BC §. 25. Folglich iſt auch AC=BC (4. Grundſ.) folglich △ABC gleichſeitig. §. 20.

2. Von der Congruenz.

§. 34. Erkl. Gröſsen ſind congruent oder decken einander, wenn ſie ſo auf oder in einander paſſen, daß ſämmtliche Gränzen und das davon Eingeſchloſſene der einen Gröſse auf ſämmtliche Gränzen und das davon Eingeſchloſſene der andern fallen.

§. 35. Zuſ. 1. Gröſsen, die einander decken, ſind einander gleich. Jede kann völlig in den Raum der andern

dern gesetzt werden, daß also für geometrische Betrachtung gar kein Unterschied unter ihnen ist.

§. 36. Zus. 2. Gerade Linien und Winkel, die gleich sind, decken einander.

§. 37. Zus. 3. Alle rechte Winkel sind einander gleich, weil sie einander decken müssen. §. 15.

§. 38. Anm. 1. Obgleich Figuren, die sich decken, gleich sind, so können sie doch auch gleich seyn, ohne sich zu decken, indem, wenn man sie auf einander legt, ein Stück, was auf der einen Seite fehlt, auf der andern hervorragen kann. Man muß daher Gleichheit der Figuren aus der Congruenz, und Gleichheit ihres Flächeninhalts ohne Congruenz unterscheiden.

§. 39. Anm. 2. Hier pflegt man auch schon zu beweisen, daß Kreise von gleichen Halbmessern oder Durchmessern congruent sind, und daß der Durchmesser den Kreis in zwey congruente Stücke theilet; aber ein völligst überzeugender Beweis beider Sätze kann erst in der Lehre vom Kreise geführt werden, wozu auch Euklides im dritten Buche alle nöthigen Anlagen absichtlich gemacht hat. Dies läßt dann auch höchstwahrscheinlich vermuthen, daß sein Text in manchen Demonstrationen corrumpirt sey, indem z. E. beym 3 B. 26 Satze von gleichen Kreisen, das als Proposition gebraucht wird, was Euklides als Definition, blos als abgekürzten Ausdruck, angegeben hat.

§. 40. Anm. 3. Das Principium der Congruenz ist, wie es Manchen zu seyn scheinen möchte, doch gar nicht mechanisch, indem es hiebey nicht darauf angelegt wird, durch Versuche zu forschen, ob die Congruenz erfolgen werde, sondern aus der Natur der Sache zu demonstriren, daß die Congruenz erfolgen müsse.

§. 41. Lehrs. (Fig. 15.) Zwey Triangel ABC, DEF, sind congruent, wenn zwey Seiten nebst dem davon eingeschlossenen Winkel in dem einen Triangel so groß als in dem andern sind.

Bew. Es sey AB=DE, AC=DF, BAC=EDF, und man lege △ABC auf △DEF, daß A auf D, und AB längs DE falle.

Da AB=DE, so fällt B auf E, §. 36. Da BAC=EDF, so fällt AC längs DF, §. 36. Da AC=DF, so

fällt C auf F §. 36. Da also B auf E und C auf F fällt: so müssen auch BC und EF § 8. 9. folglich beide Triangel einander decken §. 34. Auch ist BC=EF, B=E, C=F. §. 35.

§. 42. Zus. 1. In zwey congruenten Triangeln stehen gleiche Seiten gleichen Winkeln, und gleiche Winkel gleichen Seiten gegenüber. §. 35. 36.

§. 43. Zus. 2. Zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel bestimmen einen Triangel, d. i. es läßt sich daraus nur ein Triangel machen, ob er gleich verschiedene Lagen haben kann.

§. 44. Lehrs. (Fig. 16.) In jedem gleichschenklichten Triangel ABC=ACD sind die Winkel an, und nach verlängerten Schenkeln auch unter der Grundlinie BC gleich.

Bew. Man verlängere AB, AC, mache beliebig BD, CE einander gleich §. 29. daß auch AD=AE (5. Grundſ.) und ziehe BE, CD.

Da AB=AC, AE=AD, und A=A: so ist ABE=ACD; E=D, BE=CD, §. 41. 42. Nun ist auch CE=BD. Folglich ist BCE=CBD (die Winkel unter der Grundlinie) und CBE=BCD, §. 41. 42. Nun war ABE=ACD. Folglich ist ABC die Winkel an der Grundlinie. (7. Grundſ.)

§. 45. Zus. Ein gleichseitiger Triangel hat lauter gleiche Winkel, ist also eine reguläre Figur. §. 23.

§. 46. Lehrs. (Fig. 17.) Ein Triangel ABC ist gleichschenklicht, wenn die Winkel an der Grundlinie BC gleich sind.

Beweis. Wären AB, AC, ungleich, etwa AB größer: so sey BD=AC, und DC gezogen.

Da BD=AC, BC=BC, und DBC=ACB: so wäre △DBC=△ABC, §. 41, welches unmöglich ist. (3. Grundſ.)

§. 47.

§. 47. Zuſ. Ein Triangel, der lauter gleiche Winkel hat, iſt gleichſeitig.

§. 48. Lehrſ. (Fig. 15.) Zwey Triangel ABC, DEF ſind congruent, wenn die drey Seiten in dem einen Triangel ſo groß als in dem andern ſind.

Bew. Es ſey AB=DE, BC=EF, CA=FD, und man lege B auf E, daß BC längs EF falle: ſo fällt C auf F. §. 36.

Fiele nun der Punkt A nicht auf D: ſo fiele er entweder auf einen Schenkel, oder innerhalb der Schenkel, oder außerhalb. Das erſte kann nicht ſeyn, weil ſonſt AB <ED wäre, da doch AB=ED iſt.

(Fig. 18.) Wäre das zweyte: ſo ziehe man AD, und verlängere CA, FD, nach G, H: da dann, weil AC=DF iſt, GAD=HDA §. 44, folglich EAD> HDA und noch > EDA ſeyn muß; da doch, weil AB=DE iſt, EAD= EDA ſeyn müßte §. 44, welches einander widerſpricht.

(Fig. 19). Wäre das dritte: ſo ziehe man AD, da dann, weil AB=DE iſt, ADE=DAE § 44, folglich ADF> DAE, und noch > DAF ſeyn muß; da doch, weil AC=DF iſt, ADF=DAF ſeyn müßte §. 44, welches einander widerſpricht.

Demnach iſt es unmöglich, daß A nicht auf D fallen ſollte. Folglich decken (Fig. 15.) BA und ED, CA und FD, folglich beide Triangel einander, §. 34. Auch iſt A=D, B=E, C=F.

§. 49. Zuſ. 1. Sind in zwey Triangeln die Seiten gleich, ſo ſind auch die Winkel gleich. Vergl. §. 42.

§. 50. Zuſ. 2. Drey Seiten beſtimmen einen Triangel. Vergl. §. 43.

§. 51. Aufg. (Fig. 20.) Einen Winkel BAC und (Fig. 21.) eine gerade Linie AB zu halbiren.

Auf-

Aufl. I. (Fig. 20.) Von den Schenkeln des Winkels nehme man beliebig gleiche AD, AE, ziehe DE, beschreibe den gleichseitigen Triangel DEF, §. 33, und ziehe AF, so halbirt diese den gegebenen Winkel.

Bew. Da AD=AE, DF=FE, AF=AF: so ist DAF=EAF, §. 48.

II. (Fig. 21.) Ueber AB beschreibe man den gleichseitigen △ABC §. 33, halbire C durch CD (Aufl. 1.). so halbirt diese die gegebene Linie.

Bew. Da AC=CB, CD=CD, und ACD=BCD, so ist AD=DB, §. 41.

Anm. Durch wiederholtes Halbiren läßt sich der Winkel sowohl als die gerade Linie in 4, 8, 16 u. s. w. Theile theilen, so daß man nach n Halbirungen 2^n Theile erhält.

§. 52. Aufg. (Fig. 22. 23.) Auf eine gerade Linie AB durch einen Punkt C einen Perpendikel zu ziehen.

Auflös. I. (Fig. 22.) Ist C in AB, so nehme man beliebig gleiche CD, CE, beschreibe den gleichseitigen Triangel DEF §. 33, und ziehe CF: so ist diese auf AB in C senkrecht aufgerichtet.

Bew. Da CD=CE, DF=FE, CF=CF: so ist DCF=ECF §. 48. =R. §. 15. 14.

II. (Fig. 23.) Ist C nicht in AB, so beschreibe man aus C einen Kreis, der AB in E, F, schneide §. 30. halbire EF in G, §. 51, und ziehe CG: so ist diese auf AB senkrecht aus C gefället.

Bew. Da CE=CF, §. 25, GE=GF, GC=GC: so ist EGC=FGC §. 48. =R. §. 15. 14.

§. 53. Zus. Zwey gerade Linien können keinen gemeinschaftlichen Abschnitt haben.

Denn

Denn gesetzt (Fig. 24.) ACB, ACF, wären zwey gerade Linien, die den Abschnitt AC gemein hätten. Man errichte den Perpendikel CE §. 52, so wären ACE=ECB =ECF, welches unmöglich ist. (3. Grundſ.)

§. 54. Lehrſ. (Fig. 24.) Die beiden Nebenwinkel ACD, BCD, die eine gerade Linie CD mit einer andern AB macht, sind allemal zusammen zwey rechten Winkeln gleich.

Beweis. Gedachte Winkel sind entweder gleich oder nicht. Im ersten Falle ist der Satz an sich klar, §. 14. 15; im zweyten errichte man den Perpendikel CE §. 53, so ist ACE+ECB=2R=ACE+ECD+DCB=ACD +DCB.

§. 55. Zuſ. 1. Von zwey ungleichen Nebenwinkeln ist allemal der eine spiz, der andre stumpf, §. 15. da dann der eine die Ergänzung, complementum, des andern zu zwey rechten heißt.

§. 56. Zuſ. 2. Sind zwey Winkel BCD, ACD, die einen Schenkel DC gemein haben, =2R, so sind sie Nebenwinkel, d. i. so liegen ihre beiden übrigen Schenkel BC, AC, in einer geraden Linie AB.

Denn wäre dieſes nicht, so sey AC nach F verlängert, folglich ACD+DCF=2R=ACD+DCB, folglich DCF=DCB (7. Grundſ.) welches unmöglich ist. (3. Grundſ.)

§. 57. Zuſ. 3. Alle Winkel, die mehrere Linien FC, DC, EC u. ſ. w. mit AB in C an einer Seite machen, sind zusammen zwey rechten gleich.

§. 58. Lehrſ. (Fig. 24.) Wenn zwey gerade Linien AB, DG, einander schneiden, so sind die am Scheitel C entgegengeſetzten Winkel, die Scheitelwinkel DCB, ACG, einander gleich.

Bew.

Bew. DCB + BCG = 2R = BCG + ACG, §. 54. folglich DCB = ACG. (7. Grundſ.)

§. 59. Zuſ. 1. Wenn von zwey gleichen Winkeln DCB, ACG, zwey Schenkel DG, CG, in einer geraden Linie liegen, ſo ſind ſie Scheitelwinkel, d. i. ſo machen die beiden übrigen Schenkel auch eine gerade Linie AB.

Denn wäre dieſes nicht, ſo ſey AC nach F verlängert, folglich DCB = ACG = DCF, §. 58, welches unmöglich iſt. (3. Grundſ.)

§. 60. Zuſatz 2. Alle Winkel um einen Punkt C ſind zuſammen vier rechten gleich.

§. 61. Anmerk. Euklides 1. Buch 15. Satz Zuſ. drückt den Satz §. 60 alſo aus: »Wenn gerade Linien, ſo viele ihrer ſind, »einander ſchneiden, ſo ſind die Winkel am Durchſchnittspunkte C »zuſammen vier rechten gleich.« Aber die Linien müſſen nicht eben einander ſchneiden, wenn ſie nur ſämtlich aus einem Punkte C in der Ebene gezogen werden. Soll nun dieſes von ſo vielen Linien, als man will, alſo auch von zweyen AC, AB, (Fig. 1.) gelten, ſo muß man ſich nicht blos einen Winkel vorſtellen, der ∢2R iſt, angulus concavus, ſondern auch einen Winkel, der ▷ 2R iſt, und mit jenem vier rechte ausmacht, angulus gibbus, ſeu convexus. Letztern erwähnt Euklides gar nicht, ob er gleich in dieſem Falle und in vielen andern unentbehrlich iſt. Jedoch wollen wir mit Euklides unter Winkel immer blos den erſtern verſtehen, wofern nicht ausdrücklich das Gegentheil angezeigt wird.

§. 62. Lehrſ. (Fig. 25.) Wird eine beliebige Seite eines Trianaels ABC verlängert, ſo iſt der äußere Winkel ACD größer, als jeder der beiden innern gegenüberſtehenden A, B.

Bew. Man halbire AC in E, ziehe BEF, daß BE = EF, und ziehe CF. Da AEB = FEC, §. 58, AE = EC, BE = EF: ſo iſt BAE = ECF §. 41, ∢ACD (3. Grundſ.)

Verlängert man AC nach G, halbirt BC, und macht

AH

AH=HK: so wird auf eben die Art bewiesen, daß ABH<BCG, d. i. <ACD. §. 58.

§. 63. Zus. 1. Jede zwey Winkel eines Triangels sind zusammen <2R. Denn da ABC <ACD, so ist auch ABC+ACB <ACD+ACB (6. Grundsatz) d. i. <2R. §. 54. Eben so beweist man dies von jeden zwey andern Winkeln des Triangels.

§. 64. Zus. 2. (Fig. 24.) Macht eine Linie DC mit einer andern AB ungleiche Nebenwinkel, so fällt ein Perpendikel von jedem Punkte der ersten Linie auf die zweyte an die Seite des spitzen Winkels.

§. 65. Zus. 3. Hat ein Triangel einen rechten oder einen stumpfen Winkel, so sind die beiden übrigen spitz. Hierauf gründet sich §. 21.

§. 66. Zus. 4. In einem gleichschenklichten Triangel sind die Winkel an der Grundlinie, und in einem gleichseitigen alle drey Winkel spitz.

§. 67. Zus. 5. (Fig. 22.) Auf eine gerade Linie AB kann nur ein Perpendikel FC durch einerley Punkt gehen.

Denn wäre außer FC noch ein andrer FD, oder CG: so wäre im ersten Falle FCD+FDC=2R gegen §. 63, im zweyten ECG=ECF, gegen 3. Grundsatz.

§. 68. Zus. 6. (Fig. 23.) Von jedem gleichschenklichten △ECF gilt Folgendes:

1. Die Linie CG von der Spitze nach der Mitte der Grundlinie ist auf ihr senkrecht, und halbirt den Triangel und den Winkel an der Spitze, §. 48.

2. Die Linie CG, von welcher der Winkel an der Spitze halbirt wird, halbirt den Triangel und die Grundlinie, und ist senkrecht auf ihr, §. 41.

3. Der Perpendikel CG von der Spitze auf die Grundlinie, trifft ihre Mitte G. Denn fiel die Mitte in einem andern Punkt H, so wäre CH auch senkrecht nach 1, gegen §. 67.

4. Di-

4. Die Linie GC, die auf der Grundlinie in ihrer Mitte G senkrecht ist, geht durch die Spitze C. Denn eine andrer Perpendikel GK wäre gegen §. 67.

§. 69. Anm. Aus der Zeichnung erhellet, daß man in §. 68 anstatt der Spitze des Triangels den Mittelpunkt, und anstatt der Grundlinie die Sehne eines Kreises setzen könne.

§. 70. Lehrs. (Fig. 26.) In jedem Triangel ABC steht der größern Seite auch der größere Winkel, und dem größern Winkel auch die größere Seite gegenüber.

Bew. I. Ist AC > AB, so sey AD = AB, folglich ABD = ADB, §. 44. > ACB, §. 62, folglich noch vielmehr ABC > ACB.

II. Ist ABC > ACB: so ist weder AC = AB, weil sonst ABC = ACB wäre, §. 44. noch AC < AB, weil sonst ABC < ACB wäre, Bew. I. Folglich muß AC > AB seyn.

§. 71. Zus. 1. (Fig. 27.) Unter allen geraden Linien von einem Punkte A auf eine gerade Linie BC ist der Perpendikel AD die kürzeste, und heißt daher der **Abstand** oder die **Entfernung** des Punktes von der Linie. Denn für jede andre Linie AE, ist AED < ADE, §. 64, folglich AD < AE, §. 70.

§. 72. Zus. 2. (Fig. 27.) Von A gehen nur zwey gerade Linien nach BC an entgegengesetzten Seiten des Perpendikels AD, die einander gleich sind, und gleiche Winkel mit BC und AD machen.

Denn hat man AE, macht DF = DE, und ziehet AF, so ist AE = AF, E = F, und FAD = EAD, §. 41. Für jeden nähern Punkt G ist AGD > AED; für jeden weitern H, ist AED > AHD, §. 62. Nun sind diese Winkel spiz, §. 4, also ihre Nebenwinkel stumpf. Daher ist AG < AE, und AH > AE.

§. 73.

§. 73. Lehrſ. (Fig. 28.) Jede zwey Seiten eines Triangels ABC ſind zuſammen größer als die dritte.

Bew. Man verlängere BA, mache AD=AC, und ziehe CD, ſo iſt ACD=ADC §. 44, folglich BCD>ADC, folglich BD, d. i. BA+AC>BC, §. 70.

Eben ſo beweiſt man dies von jeden zwey andern Seiten.

§. 74. Zuſ. 1. (Fig. 26.) Der Unterſchied zweyer Seiten eines △ABC iſt kleiner als die dritte.

Denn es ſey AC>AB, alſo AD=AB, folglich ADB ſpiß, folglich BDC ſtumpf, folglich DC<BC, d. i. AC−AB<BC.

§. 75. Zuſ. 2. (Fig. 29.) Gehen von einem Punkte D innerhalb eines △ABC gerade Linien DB, DC, nach den Endpunkten der Grundlinie BC, ſo ſind ſie zuſammen kleiner, als die beiden Schenkel des Triangels, AB, AC, ſchließen aber einen größern Winkel ein.

Denn wird BD nach E verlängert, ſo iſt BDC>E>A, §. 62.

Auch iſt BA+AE>BD+DE, und DE+EC>DC §. 73. Folglich iſt BA+AE+DE+EC>BD+DE+DC, folglich BA+AE+EC>BD+DC, (8. Grundſ.)

§. 76. Zuſ. 3. (Fig 29.) Zwiſchen zwey Punkten B und C iſt die gerade Linie BC der kürzeſte Weg, und BAC >BDC.

§. 77. Aufg. (Fig. 30.) Aus drey geraden Linien A, B, C, deren zwey zuſammen größer §. 73. als die dritte ſind, einen Triangel zu verzeichnen.

Auflöſ. Man ziehe DE, und mache DF=A, FG=B, GH=C. Aus F beſchreibe man mit FD, und aus G mit GH Kreiſe, und ziehe von deren Durchſchnitte K nach G und F die Linien KG, KF, ſo iſt KGF der verlangte Triangel.

Bew. Da B+C>A, d. i. FG+GH>FL, so ist H außerhalb, G innerhalb des Kreises um F. Folglich giebt es einen Durchschnitt wie K §. 27, da dann FK = FD=A, FG=B, GK=GH=C ist.

§. 78. Zus. (Fig. 30.) Soll ein Winkel M an einen Punkt G gelegt werden, so lege man durch die Schenkel beliebig die Linie NO, und verzeichne nach §. 77 den △GFK; daß GF=MO, FK=ON, GK=MN sey, da dann FGK =OMN ist, §. 48.

§. 79 Lehrs. (Fig. 31.) Sind zwey Seiten in einem Triangel ABC so groß als in einem andern DEF, aber die davon eingeschlossenen Winkel ungleich, so steht dem größern Winkel auch eine größere Seite gegenüber.

Bew. Es sey BA=ED, AC=DF, BAC>EDF. Von den beiden Seiten DE, DF, nehme man die, welche nicht größer als die andre ist. Sie sey DE. Man mache EDH=BAC, §. 78, DH=DF=AC, und ziehe EH, HF.

Da BA=ED, AC=DH, BAC=EDH, so ist BC= EH, §. 48. Da DH=DF, so ist DHF=DFH, §. 44. Nun ist F unter EH, weil DE nicht >DF. Folglich ist EHF<DFH, folglich noch vielmehr EHF<EFH, folglich EF<EH, §. 70. d. i. <BC.

§. 80. Zus. 1. Sind in den beiden Triangeln §. 31, worin zwey Seiten von gleicher Größe sind, die dritten Seiten BC, EH, ungleich, so steht der größern BC auch ein größerer Winkel BAC gegenüber.

Denn wäre BAC= oder <EDE, so wäre BC= oder <EF, §. 41. 79, da doch BC>EF seyn soll. Folglich muß BAC>EDF seyn.

§. 81. Zus. 2. (Fig. 32.) Hat man drey Winkel A, B, C, deren jede zwey zusammen größer als der dritte, und

man

man mache alle Schenkel von gleicher Größe, so sind von den Linien, womit man die Endpunkte der Schenkel verbindet, DE, FG, HK, allemal zwey zusammen größer als die dritte.

Dies ist an sich klar, wenn gedachte Winkel gleich sind. Sind sie ungleich, so mache man KCL=B, §. 78, CL=CK, und ziehe LH, LK, da dann KL=FG, §. 41. Nun ist C+B=HCL>A. Folglich ist HL>DE, §. 79. Nun ist HK+KL, d. i. HK+FG>HL, §. 73. Folglich ist noch vielmehr HK+FG>DE.

§. 82. Lehrs. (Fig. 93.) Zwey Triangel ABC, DEF, sind congruent, wenn zwey Winkel und eine gleichliegende Seite in dem einen Triangel so groß als in dem andern sind.

Beww. Es sey ABC=DEF, ACB=DFE, und

1. BC=EF, die anliegenden Seiten, woran die gedachten Winkel liegen, so sind AB, DE gleich. Denn wären sie ungleich, etwa AB>DE, so sey BG=DE, und GC gezogen. Nun ist auch BC=EF, und B=E.

Folglich wäre GCB=DFE, §. 41. =ACB, gegen 3. Grundf.

Da also AB=DE, BC=EF, B=E, so ist △ABC=△DEF, A=D, AC=DF, §. 41.

2. AB=DE die entgegengesetzten Seiten, die einem Paare gleicher Winkel gegenüber liegen, so sind BC, EF gleich. Denn wären sie ungleich, etwa BC>EF, so sey BH=EF, und AH gezogen, da dann die Schlüsse wie zuvor, und AHB=DFE=ACB wäre, gegen §. 62. u. s. w.

3. Von den Parallellinien.

§. 83. Erkl. (Fig. 34.) Zusammenlaufend oder convergent heißen gerade Linien BD, CE, die genugsam verlängert in A zusammentreffen; nach der entgegengesetzten Richtung AB, AC, betrachtet, heißen sie auseinanderfahrend, oder divergent.

§. 84. Erkl. (Fig. 35.) Gleichlaufend oder parallel heißen gerade Linien AB, CD, in einer Ebene, die ohne Ende verlängert nirgends zusammentreffen.

§. 85. Erkl. Ein Parallelogramm heißt eine vierseitige Figur, wenn jedes Paar gegenüberstehender Seiten parallel ist.

§. 86. Lehrs. (Fig. 35.) Zwey gerade Linien AB, CD, sind parallel, wenn, nachdem sie von einer dritten EF geschnitten worden, entweder die beiden innern an einerley Seite liegenden Winkel BGH, DHG, zusammen zwey rechten Winkeln gleich sind, oder der äußere Winkel EGB dem innern an einerley Seite entgegengesetzten GHD gleich ist, oder die Wechselswinkel (d. i. die innern zu beiden Seiten einander entgegengesetzten) AGH, GHD, einander gleich sind.

Bew. I. Ist BGH+DGH=2R=AGH+CHG, §. 54, so können AB, CD an keiner Seite zusammenlaufen, wegen §. 63.

II. Ist EGB=GHD=AGH, §. 58, so können AB, CD an keiner Seite zusammenlaufen, wegen §. 62.

Oder: Ist DHG=EGB, so ist DHG+BGH=EGB+BGH=2R, §. 54, wie in I.

III. Ist GHD=AGH=EGB, §. 58, also wie in II, so gelten dieselben Schlüsse.

Oder: Ist DHG=AGH, so ist DHG+BGH=AGH+BGH=2R, §. 54, wie in I.

Anm.

Anm. Die vorhergehenden des Satzes sind zusammengehörig, d. i. aus jeder folgen die beiden übrigen.

§. 87. Zus. 1. Soll man durch einen Punkt G eine Parallele mit CD legen, so ziehe man beliebig GH, und mache AGH = GHD, §. 78, da dann AB mit CD parallel ist, §. 86.

§. 88. Zus. 2. Nimmt man in der immerfort verlängerten HD beliebige Punkte D, H, L u. s. w. und ziehe die Linien GD, GK, GL u. s. w. die also gewiß mit CD an dieser Seite zusammentreffen, und verlängert die CD schneiden, so kann man sich auch vorstellen, es werde die Linie Gb um G als um einen Mittelpunkt gedrehet, daß sie aus der Lage GB, wo sie mit CD parallel ist, in alle die Lagen zwischen GB und GH komme, worin sie in eben den Richtungen, genugsam verlängert, die CD schneiden muß. Von allen diesen Durchschnittspunkten läßt sich der erste gar nicht angeben. Denn gesetzt es würde irgend eine Weite HL, und der dazu gehörige Winkel BGL angegeben, so kann man stets einen Punct M weiter über L hinaus annehmen, wodurch man eine größere Weite HM, und einen kleinern Winkel BGM erhält, §. 72. Demnach kann unter allen Lagen, die Gb beym Umdrehen von GB bis GH erhält, keine seyn, die nicht unter den Lagen, dergleichen GM eine ist, begriffen wäre.

An der entgegengesetzten Seite von H nach C zu, verhält es sich eben so, §. 72. Auch wird bey allen diesen Schlüssen, so wie in §. 86. 72, keine bestimmte Größe der Linie GH vorausgesetzt.

§. 89. Anm. 1. Da der Linie Gb erster Durchschnittspunkt mit CD, d. i. die Weite dieses Punkts von H, sich gar nicht angeben läßt, §. 88, so läßt sich solche Weite mit keiner bestimmten Linie, wie GH, vergleichen, d. i. wenn m. GH solche Weite ausdrücken soll, keine Zahl, sie sey auch noch so groß, für m angeben. Man sagt alsdann, m sey unendlich groß, welches man durch (∞) bezeichnet.

§. 90. Anm. 2. So wie HGM wächst, so nimmt BGM ab, und wird immer kleiner und kleiner, bis die Lage GM sich von der Lage GB immer weniger und weniger unterschieden, bis endlich, wenn M sich alle Gränzen hinausgerückt wäre, beide Lagen gar nicht zu unterscheiden sind. Einen solchen Durchschnittspunkt M nennt man unendlich entfernt, und sagt, die Parallelen AB, CD, schnitten einander in einer unendlichen Entfernung von H oder G. Dies heißt: in jeder bestimmten Entfernung HM giebt es eine Linie GM, die mit GD nicht parallel ist, oder deren Lage von GB um einen Winkel BGM, der sich aber so klein man will machen läßt, unterschieden ist.

§. 91. Anm. 3. Unterscheidet man die Weiten auf CD zu beiden Seiten von H durch das Positive und Negative, und drehet die Linie EF um G als um einen Mittelpunkt erst nach C, dann nach D zu, ringsum, so ist Folgendes klar:

1) Die Weiten in CD wachsen zu beiden Seiten der H von 0 bis ∞, oder nehmen von ∞ bis 0 ab, und hier geschieht der Uebergang in H aus dem Positiven in das Negative durch das Verschwinden, oder einen Durchgang durch Null.

2) Ist EF in die Lage AB gekommen, so wird sie beym weitern Umdrehen aus dem Positiven in das Negative durch das Wachsthum ohne Ende, oder einen Durchgang durch das Unendliche übergehen. Dies heißt: wenn die Weiten in CD von H an auf der einen Seite von 0 bis ∞ zugenommen haben, da EF in die parallele Lage mit CD gekommen ist, so nehmen sie von da an auf der entgegengesetzten Seite von ∞ bis 0 ab.

§. 92. Lehrs. (Fig. 36.) Zwey gerade Linien AB, CD, die von einer dritten EF geschnitten worden, ohne daß die §. 86. gesetzten Bedingungen stattfinden, laufen genugsam verlängert an der Seite zusammen, wo die beiden innern Winkel BGH, DHG zusammen kleiner als zwey rechte Winkel sind.

Bew. Es sey HGa = GHD, folglich ab der CD parallel gemacht, §. 87. so ist nach den Bedingungen des Satzes BGH < bGH, folglich GB in einer Lage, wo sie genugsam verlängert die CD an dieser Seite schneidet, §. 88.

Anm.

Anm. Aus der Bedingung BGH + DHG < 2R, folgt AGH + CHG > 2R, daher, wo letzteres ist, die Linien AB, CD auf der entgegengesetzten Seite zusammenlaufen müssen. Aehnliche Schlüsse gelten auch für die übrigen Bedingungen des Satzes.

§. 93. Zus. 1. Eine Linie AB, die eine von zwey Parallellinien ab, CD, schneidet, muß auch die andre schneiden.

§. 94. Zus. 2. Durch einen Punkt C kann mit einer Linie CD nur eine ab parallel seyn.

§. 95. Lehrs. (Fig. 35.) Werden zwey Parallellinien AB, CD, von einer dritten EF geschnitten, so finden die §. 86. gesetzten Bedingungen statt.

Bew. Gesetzt die Winkel wären nicht von der gemeldeten Beschaffenheit, so müßten AB, CD auf der einen oder der andern Seite zusammenlaufen, §. 92, und wären also nicht parallel, §. 84. gegen das Angenommene.

§. 96. Zus. 1. (Fig. 37.) Sind zwey Linien AB, CD mit einer dritten EF parallel, so sind sie selbst parallel.

Denn es schneide sie die Linie GHK, so ist, weil AB mit EF parallel, AGK=GKF, und, weil CD mit EF parallel, GHD=GKF, §. 95. Folglich ist AGK=GHD (4. Grundſ.) folglich AB mit CD parallel, §. 36.

§. 97. Zus. 2. (Fig. 38.) Zwey Perpendikel AB, CD auf eine Linie BD, oder auf zwey Parallellinien AC, BD, wenn AB auf BD, und CD auf AC senkrecht ist, sind parallel, §. 86, weil im ersten Falle ABD=BDC=R, und im zweyten ABD+BAC=2R, §. 95, folglich BAC =R=ACD ist.

(Fig. 39.) Aber zwey Perpendikel AB, CD auf zwey convergenten Linien AE, EC, wenn AB auf AE, und CD auf CE senkrecht ist, sind convergent.

Denn AEC ist entweder ein rechter Winkel, oder nicht. Ist das erste, so wird AB mit EC parallel, folglich AB von CD geschnitten, §. 93. Ist das zweyte, so verlän-

gere man AE auf der Seite des ſpitzen Winkels (hier CEF) wo ſie mit der verlängerten DC wegen des rechten Winkels bey C unter dem ſpitzen Winkel F zuſammentrifft, §. 92, da dann, weil bey A rechte Winkel ſind, AB, GD an dieſer Seite zuſammenlaufen, §. 92.

§. 98. Lehrſ. (Fig. 40.) Die innern Winkel eines jeden Triangels ABC ſind zuſammen zwey rechten Winkeln gleich.

Bew. Man verlängere eine Seite BC nach D, und ziehe CE mit BA parallel, §. 87, ſo iſt BAC=ACE, und ABC=ECD §. 95, folglich BAC+ABC+ACB=ACB +ACE+ECD=2R, §. 57.

§. 99. Zuſ. 1. Aus dem Beweiſe erhellet, daß der äuſſere Winkel ACD an der verlängerten Seite des △ABC den beiden innern entgegengeſetzten A, B, zuſammen gleich ſey.

§. 100. Zuſ. 2. Sind zwey Winkel eines △ gegeben, ſo iſt auch der dritte gegeben.

§. 101. Zuſ. 3. Iſt ein Winkel eines gleichſchenklichen △ gegeben, ſo ſind ſie alle gegeben.

§. 102. Zuſ. 4. In einem gleichſeitigen △ beträgt jeder Winkel $\frac{2}{3}$ eines rechten.

§. 103. Zuſ. 5. In einem rechtwinklichen △ betragen die beiden ſpitzen Winkel zuſammen einen rechten.

§. 104. Zuſ. 6. In jeder vierſeitigen Figur betragen alle Winkel zuſammen vier rechte.

Denn die Figur wird von der Diagonale §. 19. in zwey Triangel getheilt.

§. 105. Zuſ. 7. (Fig. 41.) In jeder geradlinigen Figur ABCDE betragen alle Winkel zuſammen doppelt ſo viel rechte Winkel weniger vier rechten, als die Figur Seiten hat.

Denn

Denn zieht man von einem beliebigen Punkte F innerhalb der Figur gerade Linien nach allen Winkelspitzen, so erhält man soviele Triangel, folglich doppelt soviele rechte Winkel, als die Figur Seiten hat, wovon aber die Winkel um F, also vier rechte §. 60, abgehen.

Anm. Heißt die Zahl der Seiten n, so ist die Summe der Winkel $2nR-4R=(2n-4)R$. Ist das Polygon regulär, so ist jeder Winkel $=\frac{(2n-4)}{n}R$. §. 23.

§. 106. Zus. 8. (Fig. 41.) Verlängert man die Seiten der Figur, so betragen die äußern Winkel zusammen vier rechte Winkel.

Denn jeder äußere Winkel beträgt mit seinem innern Nebenwinkel zwey rechte Winkel. Folglich betragen alle äußere Winkel, mit allen innern, doppelt so viel rechte, als die Figur Seiten hat. Eben so viel aber betragen die innern Winkel, wenn dazu vier rechte kommen, §. 105. Folglich müssen die äußern zusammen vier rechte Winkel betragen.

§. 107. Lehrs. (Fig. 42.) In jedem Parallelogramm ABCD sind die gegenüberstehenden Seiten und Winkel gleich, auch wird dasselbe von der Diagonale BD halbirt.

Bew. Da AB mit CD und AD mit BC parallel, §. 85, so ist ABD=BDC, und ADB=CBD, §. 95, (also ABC=ADC, 5. Grundsf.) Nun ist auch BC=BC, folglich $\triangle ABD=\triangle CBD$, AB=CD, AD=BC, A=C §. 82.

§. 108. Zus. 1. Ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel hat lauter rechte Winkel, mit einem schiefen lauter schiefe.

§. 109. Zus. 2. Sind die gegenüberstehenden Seiten der Figur ABCD einander gleich, so sind sie parallel.

Denn aus der Bedingung folgt ABD=BDC, und ADB=CBD, §. 48. Folglich sind die Seiten parallel, §. 86.

§. 110. Zus. 3. Sind AB, CD, parallel und gleich, so sind auch AD, BC parallel und gleich.

Denn aus der Bedingung folgt AD=BC, und ADB =CBD, §. 41. Folglich sind AD und BC auch parallel, §. 86.

§. 111. Zus. 4. (Fig. 43.) Sind AB, CD, parallel, aber ungleich, und man zieht damit, durch die Mitte von AD, die EF parallel, so ist 2EF=AB+CD.

Denn zieht man auch GH mit BC parallel, so ist A=D, G=H, §. 95, und AE=ED, folglich AG=DH, §. 82. Folglich ist AB+CD=BG+CH, folglich 2EF=BG+ CH, §, 107.=AB+CD.

§. 112. Zus. 5. (Fig. 42.) Aus einem Winkel C, und den einschließenden Seiten BC, CD, das Parallelogramm zu verzeichnen (zu vollenden) ziehe man BD, und mache △ABD=△BCD, §. 77.

§. 113. Zus. 6. Ist C ein schiefer Winkel, so entsteht der **Rhombus**, oder das **Rhomboid**, je nachdem BC, CD gleich oder ungleich sind. Ist C ein rechter Winkel, so entsteht das **Quadrat**, oder **Rectangel**, je nachdem BC, CD, gleich oder ungleich sind. Hieraus erhellet die Möglichkeit dieser §. 22. beschriebenen Figuren, die allein Parallelogramme sind. Das Quadrat ist eine reguläre Figur, §. 23.

§. 114. Zus. 7. Hieraus erhellet zugleich, wie aus einer Seite das Quadrat beschrieben werde, daher dann gleiche Seiten gleiche Quadrate, und gleiche Quadrate gleiche Seiten geben müssen.

§. 115.

§. 115. Zuſ. 8. (Fig. 42.) Ein Parallelogramm ABCD wird von jeder Linie FG, die man durch die Mitte E der Diagonale BD beliebig legt, halbirt.

Denn da EBF=EDG §. 95, E=E §. 58, und BE=ED, ſo iſt △EBF=△EGD, §. 82. Nun iſt △ABD=△GBD, §. 107. folglich AFED=BCGE, (7. Grundſ.) folglich BCGF=ADGF, (5. Grundſ.)

§. 116. Zuſ. 9. (Fig. 44.) Zieht man in einem Parallelogramme ABCD durch einen beliebigen Punkt K der Diagonale BD, mit den Seiten BC, BA, Parallelen EF, GH, ſo entſtehen vier Parallelogramme, von denen die beiden AK, CK, durch welche die Diagonale nicht geht, (die Ergänzungen, complementa, der beiden andern) gleich ſind.

Denn da △ABD=△CDB, △BEK=△BHK, △KGD=△KFD, ſo iſt AK=CK, (7. Grundſ.)

§. 117. Zuſ. 10. (Fig. 44.) Iſt AC ein Quadrat, ſo ſind auch FG, EH Quadrate, und deren Seiten die Seiten der Rectangel AK, CK.

Denn da AD=AB §. 113, ſo iſt ADB=ABD §. 44. =GKD, §. 95, folglich DG=GK, §. 46. folglich FG ein Quadrat, deſſen Seite GK oder FK.

Eben ſo iſt CBD=CDB §. 44. =BKH §. 95. folglich BH=HK §. 46, folglich EH ein Quadrat, deſſen Seite EK oder HK.

Anm. Wäre AC ein Rhombus, ſo wird auf eben die Art bewieſen, daß auch FG ſowohl als EH ein Rhombus ſey.

§. 118. Zuſ. 11. (Fig. 44.) Hieraus erhellet, wenn eine Linie CD beliebig in F geſchnitten iſt, daß das Quadrat dieſer Linie aus den Quadraten der beiden Abſchnitte CF, FD, und aus den doppelten Rectangeln aus beiden Abſchnitten beſtehe.

2. Von der Gleichheit des Flächenraums.

§. 119. Erkl. Die Höhe einer Figur ist ein Perpendikel auf ihre Grundlinie von der gegenüberstehenden Seite oder Spitze.

§. 120. Zus. Ist eine Figur zwischen zwey Parallellinien, so ist ein Perpendikel von jedem beliebigen Punkte der einen Parallele auf die andre ihrer Höhe gleich, §. 107.

§. 121. Lehrs. Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich.

Bew. I. Die Parallelogramme BC, AD (Fig. 45.) stehen auf einer gemeinschaftlichen Grundlinie.

Ist nun F in der verlängerten CE, so muß AF die BE zwischen den Parallelen in G schneiden. Nun ist AC=BE, AF=BD, §. 107, und (weil CE=AB=FD) auch CF=ED (5. Grundſ.) Folglich ist △CAF=△EBD, §. 48, folglich CAGE=GFDB (7. Grundſ.) folglich BC=AD, (5. Grundſ.)

Wäre F in E, oder zwischen C und E, so wird der Satz auf ähnliche Art bewiesen.

II. Die Parallelogramme AC, EG (Fig. 46.) stehen nicht auf einerley Grundlinie.

Man ziehe BE, CH, so entsteht ein drittes Parallelogramm BH. Dies ist = AC, wegen BC, und = EG, wegen EH nach I. Folglich ist auch AC=EG. (4. Grundſ.)

§. 122. Zus. 1. Triangel von gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich.

Denn (Fig. 47.) geben die Triangel ABC, DBC, die Parallelogramme CE, BF, und (Fig. 48.) die Triangel ABC, DBC, die Parallelogramme CG, EH, §. 112.

Nun

Nun sind diese gleich, §. 121, und jene ihre Hälften, §. 107, folglich auch gleich, (11. Grundſ.)

§. 123. Zuſ. 2. Triangel von gleichem Inhalt und gleichen Grundlinien haben gleiche Höhen; d. i. sind zwischen einerley Parallelen.

Denn es seyen (Fig. 49.) die gemeinschaftliche Grundlinie BF, oder (Fig. 50.) die gleichen Grundlinien BC, GF, in der Linie BF, die Spitzen dergleichen Triangel aber in der Linie AD. Wäre nun AD nicht mit BF parallel, so sey es AE, und man ziehe EF, da dann (Fig. 49.) △ABF = △EBF §. 121. = △DBF gegen 3. Grundſ. und (Fig. 50.) △ABC = △EGF §. 121. = △DGF gegen 3. Grundſ. Demnach muß AD mit BF parallel seyn.

§. 124. Zuſ. 3. Ein Parallelogramm ist doppelt so groß, als ein Triangel, der mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

§. 125. Aufg. (Fig. 51.) Jeden Triangel ABC in ein Parallelogramm zu verwandeln, (d. i. jenem gleich zu machen), welches einen gegebenen Winkel D habe.

Auflöſ. Man halbire BC in E, und ziehe AE, so ist △ABC = 2△AEC. Nun mache man CEF = D, §. 78, und ziehe AG mit BC, CG mit EF parallel, §. 87, so ist EG = 2△AEC §. 124. = △ABC.

§. 126. Aufg. (Fig. 52.) Jeden △ABC in ein Parallelogramm zu verwandeln, welches einen gegebenen Winkel D und eine gegebene Seite E habe.

Auſl. Man mache CG = △ABC §. 125, verlängere FC bis CN = E, ziehe durch N eine Parallele mit CH, bis sie die verlängerte GH in K trifft, verlängere KC bis sie die verlängerte GF in L trifft; und vollende die Figur, so ist CM = CG §. 116. = △ABC. Auch ist OM = CN = E, und COM = HCN = GFC = D.

§. 127.

§. 127. Zuſ. 1. (Fig. 53.) Jede geradlinige Figur ABCD läßt ſich in ein Parallelogramm, wozu ein Winkel und eine Seite gegeben iſt, verwandeln.

Denn man theile die Figur durch Diagonalen in Triangel, und verfahre mit jedem nach §. 126. Die dadurch erhaltenen Parallelogramme, wie FH, GM, laſſen ſich mit ihren gleichen Seiten HG zuſammenſchieben, daß die ungleichen KH, HM, wegen der gleichen Winkel H, K, in gerader Linie KM liegen, §. 56.

§. 128. Zuſ. 2. Jede geradlinige Figur läßt ſich in ein Rectangel verwandeln, wozu eine Seite gegeben iſt.

§. 129. Zuſ. 3. (Fig. 53.) Wäre eine Figur in KL, eine andre in KG verwandelt, ſo zeigte HL den Flächen-Unterſchied beider Figuren.

§. 130. Lehrſ. (Fig. 54.) In jedem rechtwinklichen Triangel BAC iſt das Quadrat der Hypotenuſe BC den Quadraten der beiden Catheten BA, AC, zuſammen gleich.

Anm. Dieſer Satz heißt von ſeinem Erfinder Pythagoras der Pythagoriſche Lehrſatz.

Bew. Da bey A rechte Winkel ſind, ſo ſind BAH, GAC, gerade Linien, §. 56. Durch A lege man mit CE die AL parallel, §. 87, und ziehe AE, BK, ſo iſt CL = 2△ACE, und CH = 2△BCK, §. 124. Nun ſind bey C rechte Winkel, zu welchen der Winkel ACB kömmt, daß ACE = BCK, (5. Grundſ.) Auch iſt AC = CK, und CE = CB. Folglich iſt △ACE = △BCK, §. 41. folglich iſt auch CL = CH. (9. Grundſ.)

Zieht man nun AD, CF, ſo wird eben ſo bewieſen, daß LB = BG. Folglich iſt CL + LB d. i. CD = CH + BG, (5. Grundſ.) oder $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

§. 131.

§. 131. Zuſ. 1. (Fig. 55.) Iſt $BA^q + AC^q = BC^q$, ſo iſt BAC = R.

Denn macht man CAD = R, und AD = BA, folglich $AD^q = BA_q$ §. 114, und zieht CD, ſo iſt $AD^q + AC_q = CD^q$, folglich $CD^q = BC_q$ (4. Grundſ.) folglich CD = BC, §. 114. Nun war auch BA = AD, AC = AC. Folglich iſt BAC = DAC §. 48, = R.

§. 132. Zuſ. 2. (Fig. 55.) Um eine Linie zu finden, deren Quadrat ſo groß ſey, als die Summe zweyer Quadrate, ſetze man deren Seiten CA, AD, rechtwinklich an einander, und ziehe CD.

§. 133. Zuſ. 3. (Fig. 56.) Um eine Linie zu finden, deren Quadrat der Differenz zweyer Quadrate gleich ſey, beſchreibe man mit der Seite des größern AB einen Kreis, mache AD der Seite des kleinern gleich, und DE ſenkrecht auf BD, da dann AE = AB, und $DE^q = AB^q - AD^q$.

5. Vom Kreiſe.

§. 134. Erkl. Gleiche Kreiſe heißen, die gleiche Halbmeſſer haben.

§. 135. Erkl. (Fig. 57.) Ein Abſchnitt, segmentum, des Kreiſes iſt jedes Stück der Kreisfläche zwiſchen einer Sehne DE (der Grundlinie) und dem Kreisbogen DBE oder DAE.

Ein halber Kreis heißt, was zwiſchen dem Durchmeſſer und Umkreiſe enthalten iſt.

Jede Sehne theilt die Kreisfläche in zwey entgegengeſetzte Abſchnitte, wovon der mit dem Mittelpunkte der größere heißt.

§. 136. Erkl. (Fig. 57.) Ein Ausſchnitt, ſector, des Kreiſes iſt jedes Stück der Kreisfläche zwiſchen

zwey

zweyen Halbmessern CD, CE, und dem Kreisbogen DBE.

Der Winkel DCE, oder der Centriwinkel, den diese Halbmesser im Mittelpunkte des Kreises machen, heißt der Winkel des Ausschnittes, und steht auf den Bogen DBE.

§. 137. Erkl. (Fig. 57.) Jeder Winkel DGE, der seine Spitze im Bogen des Abschnittes hat, und dessen Schenkel durch der Sehne Endpunkte laufen, oder der Peripheriewinkel, heißt der Winkel im Abschnitte, den der Abschnitt enthält, und der auf den übrigen Bogen DBE steht.

§. 138. Erkl. Abschnitte heißen ähnlich, wenn sie gleiche Winkel enthalten.

§. 139. Erkl. Eine Berührungslinie oder Tangente des Kreises heißt jede gerade Linie, die seinen Umfang so trifft, daß sie verlängert ihn nicht schneidet.

§. 140. Erkl. Berührende Kreise sind, deren Umringe an einander treffen, ohne sich zu schneiden.

Berührt ein Kreis den andern von innen, so liegt er ganz innerhalb des andern; berührt er ihn von außen, so liegt er ganz außerhalb.

§. 141. Erkl. Concentrische Kreise sind, die um einerley Mittelpunkt mit verschiednen Halbmessern beschrieben werden.

Ihre Umringe können keinen Punkt mit einander gemein haben, weil jeder Punkt im Umfange des größern Kreises vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte weiter abliegt.

§. 142. Lehrs. (Fig. 57.) Eine gerade Linie CF halbirt eines Kreises Sehne DE, wenn sie vom Mit-

tel-

telpunkte C ſenkrecht auf ihr iſt; und iſt auf der Sehne ſenkrecht, wenn ſie vom Mittelpunkte C, nach ihrer Mitte F gehet; und gehet durch den Mittelpunkt C, wenn ſie auf der Sehne in ihrer Mitte ſenkrecht iſt.

Bew. Ziehet man CD, CE: ſo iſt DCE ein gleichſchenklichter Triangel; daher der Beweis wie §. 68.

§. 143. Zuſ. 1. (Fig. 57.) Um den Mittelpunkt jedes Kreiſes zu finden, ziehe man eine beliebige Sehne DE, halbire ſie in F, und mache FA auf ſie ſenkrecht; da dann AB halbirt des Kreiſes Mittelpunkt C giebt, §. 142.

§. 144. Zuſ. 2. (Fig. 57.) Eine gerade Linie DE liegt ganz innerhalb des Kreiſes, und ſchneidet den Umkreis nur in den beyden Punkten D, E.

Denn nimmt man des Kreiſes Mittelpunkt C, §. 143, und ziehet CD, CE: ſo iſt jeder Punkt zwiſchen D und E, näher bey C als D und E; und jeder andere außerhalb D und E weiter davon, §. 72.

§. 145. Zuſ. 3. (Fig. 57.) Schneiden ſich zwey Sehnen LM, GE: ſo kann ihr Durchſchnitt H nicht in der Mitte von beyden zugleich ſeyn.

Denn hat man den Mittelpunkt C §. 142, und ziehet CH: ſo wäre, wenn H die Mitte beyder Sehnen iſt, CHL = R = CHG §. 142, welches unmöglich iſt. (3. Grundſ.)

§. 146. Aufg. (Fig. 58.) Durch drey gegebene Punkte A, B, C, die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beſchreiben.

Auflöſ. Man ziehe die Linien AB, BC, halbire ſie in D, E, mache DF, EG, ſenkrecht, die ſich in K ſchneiden: ſo gehet ein Kreis aus K mit KA, durch A, B, C.

Bew. Daß hier ein Durchschnittspunkt K sey, erhellet aus §. 97, und daß K der Mittelpunkt des Kreises sey, aus §. 142. Zieht man nun AK, KB, KC, so ist AD=DB, DK=DK, und bey D rechte Winkel, folglich KA=KB, §. 41. Eben so beweist man KB=KC. Folglich geht der Kreis aus K mit KA durch A, B, C.

§. 581. Anm. Wären A, B, C, in einer geraden Linie, so wären die Perpendikel DF, EG, gleichlaufend, §. 97. d. i. es gäbe keinen Durchschnitt, folglich keinen Mittelpunkt, §. 142. Auch geht kein Kreis durch drey Punkte einer geraden Linie, §. 144.

§. 148. Zus. Drey Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, bestimmen einen Kreis, und geben zugleich seinen Mittelpunkt und Halbmesser, also seine Lage und Größe.

§. 149. Lehrs. (Fig. 59. 60.) Schneiden oder berühren sich zwey Kreise, so haben sie keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt.

Bew. I. (Fig. 59.) Wäre E beider Mittelpunkt, und man zieht EL, und beliebig EFG, so wäre EL=EG, und EL=EF, §. 25, folglich EF=EG, (4. Grundſ.) gegen (3. Grundſ.)

II. (Fig. 60.) Wäre B beider Mittelpunkt, und man zieht BA, und beliebig BDE, so wäre BA=BE, und BA =BD, §. 25. folglich BD=BE, (4. Grundſ.) gegen (3. Grundſ.)

§. 150. Zus. 1. Zwey Kreise können sich in nicht mehr als zweyen Punkten schneiden.

Denn schnitten sie sich auch nur in 3 Punkten, so hätten sie einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt §. 148. gegen §. 149.

§. 151.

§. 151. Zuſ. 2. Zwey Kreiſe, die ſich ſchneiden, haben eine gemeinſchaftliche Sehne zwiſchen ihren Durchſchnittspunkten §. 144, da dann ein Perpendikel auf dieſe Sehne in ihrer Mitte durch beyder Mittelpunkt gehen muß §. 142. Vergl. Fig. 12 und 59.

§. 152. Lehrſ. (Fig. 61. 62.) Wenn von einem Punkte A innerhalb oder außerhalb eines Kreiſes, der von des Kreiſes Mittelpunkte C verſchieden iſt, gerade Linien nach dem Umkreiſe gehen: ſo ſind dieſe auf jeder Seite der Linie durch A und C, ſämmtlich ungleich, und nur je zwey zu beyden Seiten gleich.

Bew. I. (Fig. 62.) Der Punkt A ſey innerhalb des Kreiſes. Man verlängere AC nach B und G, und ziehe beliebig AD, AE, AF, und hierauf CD, CE, CF.

Da DC+CA>AD §. 73, aber DC=CB: ſo iſt CB+CA, d. i. AB>AD.

Da DC=EC, CA=CA, und DCA>ECA: ſo iſt AD>AE §. 79. Eben ſo iſt auch AE>AF.

Da CA+AF>CF §. 73, d. i. >CA+AG: ſo iſt AF>AG.

Demnach iſt AB die größte, AG die kleinſte unter dieſen Linien, indem die übrigen von B nach G ab, oder von G nach B zunehmen.

Macht man nun GCH=GCF §. 78, und ziehet AH, CH; ſo iſt AH=AF §. 41, aber jede andre Linie wie AL<, oder wie AK>AF.

II. (Fig. 61.) Der Punkt A ſey außerhalb des Kreiſes. Man verlängere ALC nach B, und ziehe beliebig AKD, AHE, AGF, und hierauf CD, CE, CF; CG, CH, CK.

Da AC+CD>AD §. 73. aber CD=CB: so ist AC+CB d. i AB>AD. Da ferner AC=AC, CD =CE, und ACD>ACE: so ist AD>AE §. 79, Eben so ist AE>AF. Demnach ist unter den Linien nach dem innern Umkreise AB die gröſte, indem die übrigen von B nach F zu abnehmen.

Da AK+CK>AL+CL §. 73, aber CK=CL: so ist AK>AL. Da ferner AH+CH>AK+CK §. 75, aber CH=CK: so ist AH>AK. Eben so ist AG>AH. Demnach ist unter den Linien nach dem äuſsern Umkreise, AL die kleinste, indem die übrigen von L nach G zunehmen.

Macht man nun BCM=BCD, und ziehet CNM: so wird, wie in I. bewiesen, daß zu beyden Seiten der AB oder AL nur je zwey gleiche Linien von A nach dem Umkreise gehen können.

§. 153. Lehrs. (Fig. 58.) Gehen von einem Punkte K an den Umfang eines Kreises ABC mehr als zwey gleiche gerade Linien KA, KB, KC: so ist solcher der Mittelpunkt des Kreises.

Bew. Ziehet man die Sehnen AB, BC, halbirt sie in D, E, und ziehet KD, KE: so sind bey D und E rechte Winkel §. 48. Folglich ist in K des Kreises Mittelpunkt §. 142.

§. 154. Aufg. (Fig. 63. 64. 65.) Einen Kreis, dessen Abschnitt ABC gegeben ist, zu beschreiben.

Auflös. Man halbire die Sehne AC in D, mache DB auf sie senkrecht, und ziehe AB; da dann DAB entweder eben so groß, oder kleiner, oder gröſser als DBA ist.

1) (Fig. 63.) Es sey DAB=DBA: so ist DA =DB §. 46. =DC, folglich D des Kreises Mittelpunkt, §. 153.

2)

2) (Fig. 64.) Es ſey DAB<DBA, und man mache DAE=DBA §. 78: ſo iſt EA=EB §. 46. Nun iſt AD=DC, DE=DE, und bey D rechte Winkel. Folglich iſt EC=EA §. 41. =EB, folglich E des Kreiſes Mittelpunkt. §. 153.

3) (Fig. 65.) Es ſey DAB>DBA, und man mache BAE=DBA; ſo iſt EA=EB §. 46. =EC, wie zuvor; folglich E des Kreiſes Mittelpunkt, §. 153.

§. 155. Lehrſ. Wenn ſich zwey Kreiſe berühren: ſo liegen beyder Mittelpunkte mit dem Berührungspunkte in einer geraden Linie.

Bew. I. (Fig. 66.) Der Kreis um B werde von dem andern inwendig in A berührt, und man ziehe ABH. Wäre nun der Mittelpunkt des andern Kreiſes außerhalb dieſer Linie, etwa in C, und man ziehet CA, und BCDE: ſo iſt BC+CA>AB §. 73. Aber CA=CD, und AB =BC+CE. Folglich wäre BC+CD>BC+CE, folglich CD>CE, welches unmöglich iſt.

II. (Fig. 67.) Die Kreiſe berühren ſich von außen in A. Wäre nun dieſer Punkt außerhalb der Linie DE, welche beyder Kreiſe Mittelpunkte D, E, verbände, und man ziehet AD, AE: ſo iſt DA=DF, und EA=EG, folglich DA+EA=DF+EG, folglich DA+EA<DE, welches unmöglich iſt, §. 73.

§. 156. Lehrſ. Kreiſe berühren einander nur in einem Punkte.

Bew. I. (Fig. 66.) Der Kreis um F berühre den Kreis um B in A: ſo gehet die Linie BF durch A, §. 155. Nimmt man nun jeden andern Punkt G, und zieht GF, GB: ſo iſt BF+FG>BG §. 73. Aber BG=BF+FA. Folglich iſt BF+FG>BF+FA, folglich FG>FA, da doch FG=FA ſeyn müßte.

II. (Fig. 68.) Die Kreiſe um B und C berühren ſich auswendig in A. Folglich geht BC durch A, §. 155. Wäre nun noch ein Berührungspunkt D, und man zieht DC, DB, ſo iſt CD=CA, DB=BA, folglich CD+DB=CA+BA=BC, da doch CD+DB>BC, §. 73.

§. 157. Zuſ. (Fig. 66.) Im Bew. I. §. 156. ward gezeigt, daß FG>FA, d. i. daß außer dem Berührungspunkte A jeder andre Punkt G außerhalb des Kreiſes um F ſey. Folglich liege der Kreis um F ganz innerhalb des andern, den er inwendig berührt.

§. 158. Lehrſ. (Fig. 69.) In jedem Kreiſe ſind Sehnen AB, DE, vom Mittelpunkte C gleich entfernt, wenn ſie von gleicher Größe ſind, und von gleicher Größe, wenn ſie gleich entfernt ſind; aber die kleinere iſt entfernter, und die entferntere kleiner.

Bew. Auf die Sehnen fallen von C die Perpendikel CF, CG, als ihre Entfernungen, da dann AF=½AB, und EG=½DE, §. 142, auch CA²=AF²+CF²=CE²=EG²+CG², §. 130.

Iſt nun 1) AB=DE, folglich AF=EG, ſo iſt CF=CG. 2) AF=EG, ſo iſt AF=EG, folglich AB=DE. 3) AB<DE, folglich AF<EG, ſo iſt CF>CG. 4) CF>CG, ſo iſt AF<EG, folglich AB<DE.

§. 159. Zuſ. Der Durchmeſſer des Kreiſes iſt größer als jede Sehne. Auch iſt offenbar CA+CB>AB.

§. 160. Anm. Auch kann man den Punkt A, §. 152. in den Umfang des Kreiſes ſetzen.

§. 161. Lehrſ. (Fig. 70.) Ein Perpendikel BD auf den Halbmeſſer CA durch deſſen Endpunkt A hat alle ſeine übrigen Punkte außerhalb des Kreiſes; aber jede andre Linie durch ſolchen Punkt A, wie EF, ſchneidet den Kreis.

Bew.

Bew. In AD nehme man beliebig G, und ziehe CG, ſo iſt CG>CA §. 70, folglich G außerhalb des Kreiſes.

Da CAF<R, ſo fällt ein Perpendikel von C auf EF nach dieſer Seite zu, wie CH, §. 64, da dann CH<CA, §. 70, folglich H ein Punkt innerhalb des Kreiſes, durch den EF geht, welche alſo den Kreis ſchneidet, §. 31.

§. 162. Zuſ. 1. Ein Perpendikel auf den Halbmeſſer CA in ſeinem Endpunkte A, iſt eine Berührungslinie oder Tangente des Kreiſes, §. 139.

§. 163. Zuſ. 2. Jede Tangente ſteht auf den Halbmeſſer im Berührungspunkte ſenkrecht.

§. 164. Zuſ. 3. Durch jeden Punkt des Umkreiſes geht nur eine Tangente, §. 67.

§. 165. Zuſ. 4. Die Linie vom Mittelpunkte C nach dem Berührungspunkte A iſt ſenkrecht auf der Tangente.

§. 166. Zuſ. 5. Ein Perpendikel auf die Tangente im Berührungspunkte A geht durch den Mittelpunkt C.

§. 167. Zuſ. 6. (Fig. 66.) Berührende Kreiſe haben im Berührungspunkte eine gemeinſchaftliche Tangente LM, §. 155.

§. 168. Anm. (Fig. 66.) Die Umringe beider berührenden Kreiſe liegen ganz diesſeits der Tangente LM §. 139. auch liegt der kleinere ganz innerhalb des größern, §. 156. Daher krümmt ſich der Bogen AD, der mit einem kleinern Halbmeſſer durch A gezogen iſt, mehr als der Bogen AE eines größern Halbmeſſers.

§. 169. Aufg. (Fig. 70. 71.) Durch einen gegebenen Punkt A eine Tangente an den Kreis zu ziehen.

Auflöſ. I. (Fig. 70.) Iſt A im Umkreiſe, ſo ziehe man CA, und auf dieſe den Perpendikel AD, §. 162.

II. (Fig. 71.) Iſt A außerhalb des Kreiſes: ſo ziehe man AC und auf dieſe BD ſenkrecht. Mit CA beſchreibe man einen Kreisbogen AD, und ziehe DC, AE: ſo iſt CA=CD, CE=CB, C=C, folglich AEC=DBC §. 41. =R, folglich AE die verlangte Tangente §. 162.

Man kann auch DB nach F verlängern, und eine zweyte Tangente AG ziehen.

§. 170. Lehrſ. (Fig. 72. 73. 74.) Der Centriwinkel BCD iſt doppelt ſo groß, als der Peripheriewinkel BAD, der mit ihm auf einerley Bogen BD ſtehet.

Bew. Des Kreiſes Mittelpunkt C fällt entweder auf einen der Schenkel des Peripheriewinkels (Fig. 72.) oder zwiſchen beyde Schenkel (Fig. 73.) oder außerhalb (Fig. 74.)

I. (Fig. 72.) Da CA=CB: ſo iſt CAB=CBA §. 44. Folglich iſt BCD=CAB+CBA §. 99. =2CAB.

II. (Fig. 73.) Man ziehe ACE: ſo iſt nach I. BCE =2BAC, und CED=2CAD. Folglich iſt BCD=2BAD. (5. Grundſ.)

III. (Fig. 74.) Man ziehe ACE: ſo iſt nach I. DCE =2DAE, und BCE=2BAE. Folglich iſt BCD=2BAD. (7. Grundſ.)

§. 171. Zuſ. 1. (Fig. 75. 76.) Alle Winkel in einem Kreisabſchnitte, oder alle Peripheriewinkel BAD, BED, auf einerley Bogen BD, ſind gleich. Denn

1. (Fig. 75.) der Abſchnitt iſt größer als der Halbkreis. Von des Kreiſes Mittelpunkte C, ziehe man CB, CD: ſo iſt BCD=2BAD=2BED §. 170, folglich BAD=BED.

2. (Fig. 76.) Der Abſchnitt iſt kleiner als der Halbkreis. Ziehet man AE: ſo ſind die Scheitelwinkel bey F

gleich,

gleich, und ABE=ADE nach 1. Folglich ist BAD =BED §. 98.

§. 172. Zus. 2. (Fig. 77.) Die gegenüberliegenden Winkel einer vierseitigen Figur im Kreise ABCD (d. i. welche von Sehnen des Kreises eingeschlossen wird,) sind zusammen zwey rechten Winkeln gleich.

Denn ziehet man AC, BD: so ist ABD=ACD, und CBD=CAD §. 174, folglich ABC=ACD+CAD (5. Grundsatz) folglich ABC+ADC=ACD+CAD +ADC. (5. Grundsatz)=2R. §. 98.

Anmerk. Für die beyden andern Winkel BAD, BCD. wird der Satz eben so bewiesen oder aus §. 104. hergeleitet.

§. 173. Zus. 3. (Fig. 77.) Sind in einer vierseitigen Figur ADCE, zwey gegenüberliegende Winkel ADC, AEC, zusammen zwey rechten Winkeln gleich: so muß der Kreis, der durch jede drey Spitzen A, D, C, gehet, auch durch die vierte E gehen.

Denn gienge der Kreis durch einen andern Punkt F über oder unter E, und man ziehet AB, BC: so ist ADC +ABC=2R §. 172. =ADC+AEC, folglich ABC =AEC (7. Grundsatz) gegen §. 75.

§. 174. Zus. 4. (Fig. 77.) Wird von einer vierseitigen Figur im Kreise ABCD, eine beliebige Seite AD verlängert: so ist der äussere Winkel CDF dem Winkel ABC im entgegengesetzten Abschnitte gleich.

Denn jeder dieser beyden Winkel beträgt mit ADC zusammen zwey rechte Winkel.

§. 175. Zus. 5. (Fig. 75, 77.) Nimmt man von zwey Kreisen ähnliche Abschnitte BAD, ABC: so sind die übrigen Abschnitte BFD, ADC, auch ähnlich.

Denn die Winkel in den ersten Abschnitten sind gleich, §. 138, und betragen mit den Winkeln in den übrigen Abschnitten zusammen zwey rechte. §. 172.

§. 176. Lehrs. (Fig. 78.) Aehnliche Kreisabschnitte AEB, CFD, über gleichen Grundlinien AB, CD sind congruent.

Bew. Man lege CFD über AEB, und zwar C auf A, und CD längs AB, so fällt D auf B, weil AB=CD ist. Nun fällt auch der Bogen EFD auf AEB, oder nicht. Nähme man das letztere an, so könnten die Bogen sich nicht schneiden, weil sie sich alsdann in 3 Puncten schnitten, gegen §. 150, folglich müßte der eine, etwa AEB, ganz über den andern CFD hinaus liegen, da dann, wenn man CFG, GD, DF zieht, CFD>AGB wäre, §. 62, gegen §. 138. Demnach muß das erste stattfinden, d. i. die Abschnitte sind congruent.

§. 177. Lehrs. (Fig. 79.) In gleichen Kreisen (folglich auch in einem Kreise) stehen gleiche Centriwinkel auf gleichen Bogen, und auf gleichen Bogen gleiche Centriwinkel.

Bew. I. Ist ACB=EDF, und man zieht AB, EF; AGB, EHF, und AKB, ELF, so ist AB=EF §. 134. 41, und AGB=EHF, §. 170, folglich auch AKB=ELF, §. 172, folglich die Abschnitte sowohl über als unter AB, EF, congruent, §. 176, also die Bogen AKB, ELF gleich, § 35.

II. Sind die Bogen AKB, ELF gleich, und es wäre von den Winkeln der eine ACB>EDF, so sey ACM=EDF. Folglich wäre nach I. AKM=ELF=AKB, welches unmöglich ist.

§. 178. Zus. 1. Aus dem I. Beweise §. 177. erhellet, daß der Satz auch von Peripheriewinkeln gelte, und daß

Kreise,

Kreiſe, die gleiche Halbmeſſer haben, congruent ſind. Vergl. §. 39.

§. 179. Zuſ. 2. In gleichen Kreiſen (folglich auch in einem Kreiſe) haben gleiche Sehnen gleiche Bogen, und gleiche Bogen gleiche Sehnen. Denn

1) Iſt AB = EF, ſo iſt ACB = EDF, §. 134. 48 Folglich ſind die Bogen AKB, ELF gleich, §. 177.

2) Sind die Bogen AKB, ELF gleich, ſo iſt ACB = EDF, §. 177, folglich AB = FE, §. 134. 41.

§. 180. Zuſ. 3. (Fig. 80.) Einen Kreisbogen ABC zu halbiren, ziehe man AC, halbire ſie in D, und mache DB ſenkrecht.

Denn zieht man AB, BC, ſo iſt AD = DC, DB = DB, und bey D rechte Winkel, folglich AB = BC, §. 41, folglich AEB = BFC, §. 179.

§. 181. Lehrſ. (Fig. 81.) Der Winkel im halben Kreiſe iſt ein rechter Winkel, im großern Abſchnitte aber ſpitz, und im kleinern ſtumpf.

Bew. Es ſey ACB der Durchmeſſer, und es ſeyen im Umkreiſe beliebige Punkte D, E, ſo iſt nach §. 135. ADB der Winkel im halben Kreiſe, DAB aber im größern, und DEB im kleinern Abſchnitte. Man verlängere AD nach F, und ziehe CD.

Da die Halbmeſſer CA, CD, CB gleich ſind, ſo iſt ADC = DAC, und BDC = DBC, §. 46, folglich ADB = DAC + DBC (5. Grundſ.) = FDB §. 99 = R §. 15.

Da ADB = R, ſo iſt DAB ſpitz, §. 103, folglich DEB ſtumpf, §. 172.

§. 182. Zuſ. 1. Da ADB = R = AGB, ſo ſind die beiden halben Kreiſe congruent, §. 138. 176, d. i. der Durch-

Durchmesser halbirt die Kreisfläche sowohl, als den Umkreis. Vergl. §. 39.

§. 183. Zus. 2. Ein Abschnitt des Kreises ist entweder ein halber Kreis, oder größer oder kleiner; je nachdem er entweder einen rechten oder einen spitzen, oder einen stumpfen Winkel enthält. Oder: je nachdem des Kreises Mittelpunkt entweder in seiner Grundlinie ist, oder innerhalb des Abschnitts, oder außerhalb.

§. 184. Zus. 3. (Fig. 82.) Wird über der Hypotenuse AB eines rechtwinklichten △ADB ein halber Kreis beschrieben: so gehet derselbe durch die Spitze D des rechten Winkels.

Denn gienge er durch E über oder unter D, und man zieht AE, EB: so wäre AEB=R §. 181. =D gegen §. 75.

§. 185. Zus. 4. (Fig. 83.) An einen Kreis um C gehen von einem Punkt A außerhalb (§. 169.) zwey Tangenten, die einander gleich sind.

Denn halbirt man AC in B, beschreibt aus B mit BA einen Kreis, der den gegebenen in D, E, schneidet, und ziehet AD, AE; CD, CE: so ist ADC=R=AEC §. 181. folglich AD, AE, Tangenten §. 162.

Da dann $AD^q = AC^q - CD^q$, und $AE^q = AC^q - CE^q$ §. 130. aber CD=CE, folglich AD=AE.

§. 186. Zus 5. (Fig. 84.) Wird vom Berührungspunkte D einer Tangente AB, eine beliebige Sehne DE gezogen: so ist ihr Winkel mit der Tangente, EDB, dem Winkel im entgegengesetzten Abschnitte, DFE, gleich.

Denn macht man DF senkrecht, und ziehet FE: so ist DEF=R §. 166. 181, folglich DFE+FDE=R §. 103. =EDB+FDE, folglich DFE=EDB.

Demnach

Demnach ist auch ADE = EGD §. 172.

§. 187. Zus. 6. (Fig. 84.) Von einem Kreise schneidet man ein Segment ab, welches einen gegebenen Winkel K enthält; wenn man eine beliebige Tangente AB ziehet, und BDE = K macht.

§. 188. Aufg. (Fig. 85. 86.) Ueber jeder gegebenen Linie AB einen Kreisabschnitt, der einen gegebenen Winkel D enthalte, zu beschreiben.

Auflös. D mag entweder spitz seyn Fig. 85. oder stumpf Fig. 86. so mache man BAE = D, EAF = B, halbire AB in G, und errichte GC senkrecht: so ist AC = CB §. 41, folglich gehet ein Kreis aus C, durch A und B, dessen Tangente AE §. 162. Folglich ist BHA = BAE §. 186. = D.

Wäre D ein rechter Winkel: so halbire man AB in G, und beschreibe mit GA = GB einen halben Kreis, der das verlangte giebt. §. 181.

6. Von geradlinichten Figuren am Kreise.

§. 189. Erkl. Die Figur ist in den Kreis, und der Kreis um die Figur beschrieben, wenn alle ihre Winkelspitzen in des Kreises Umringe sind. Z. E. §. 172.

§. 190. Erkl. Die Figur ist um den Kreis, und der Kreis in die Figur beschrieben, wenn alle ihre Seiten Tangenten des Kreises sind.

§. 191. Erkl. Eine gerade Linie ist in einen Kreis eingetragen, wenn ihre beyden Enden in des Kreises Umringe sind.

§. 192. Aufg. (Fig. 84.) Eine gerade Linie H, die nicht größer als der Durchmesser ist, in einen Kreis einzutragen.

Auf-

Auflöſ. Man ziehe den Durchmeſſer FD. Iſt nun H=FD: ſo iſt das verlangte geſchehen. Iſt H<FD: ſo beſchreibe man aus F mit FM=H einen Kreis ME, und ziehe FE: ſo iſt FE=FM=H.

§. 193. Zuſ. 1. (Fig. 84.) Die Differenz zweyer Quadrate zu finden (§. 133.) beſchreibe man über des gröſſern Seite FD einen halben Kreis §. 188, trage darein des kleinern Seite FE §. 192, und ziehe ED: da dann FED=R §. 181, und $FD^q - FE^q = ED^q$ §. 130.

§. 194. Zuſ. 2. (Fig. 87.) Ließe ſich die Linie AB etlichemal an einander in den Kreis genau eintragen, daß man zuletzt wieder in den erſten Punkt A gelangte: ſo wäre der Umkreis in eben ſo viele gleiche Theile getheilet §. 179. Und umgekehrt: ließe ſich der Umkreis genau in etliche gleiche Theile theilen: ſo wäre die Linie AB, welche zwey nächſte Theilpunkte verbindet, ſo vielmal in den Kreis eingetragen §. 179. In beyden Fällen wären die Centriwinkel gleich §. 177, auch die Winkel, welche die Sehnen machen, die Polygonwinkel, gleich §. 171, folglich wäre dadurch eine reguläre Figur §. 23. von eben ſo vielen Seiten in den Kreis beſchrieben, §. 189. Aber geometriſch läßt ſich der Umkreis nicht in jede beliebige Anzahl Theile theilen.

§. 195. Zuſ. 3. (Fig. 87.) Iſt eine reguläre Figur ACE in den Kreis beſchrieben: ſo erhält man durch Halbirung der Bögen §. 180. wie bey B, eine andre reguläre Figur im Kreiſe von doppelt ſo vielen Seiten.

§. 196. Aufg. (Fig. 88. 89.) Um und in jeden Triangel ABC einen Kreis zu beſchreiben.

Auflöſ. I. (Fig. 88.) Man beſchreibe durch des Triangels Winkelſpitzen einen Kreis §. 149; da dann der geſuchte Mittelpunkt entweder über oder auf oder unter AC

fällt,

fällt, je nachdem ABC ein ſpitzer, oder rechter, oder ſtumpfer Winkel iſt, §. 181.

II. (Fig. 89.) Man halbire die Winkel A, C, durch AD, CD, die in D zuſammentreffen, §. 92, und fälle aus D auf die Seiten die Perpendikel DE, DF, DG, ſo geht aus D mit DE ein Kreis durch E, F, G, deſſen Tangenten die Seiten ſind.

Denn da der Winkel bey A halbirt iſt, und bey E und G rechte Winkel ſind, auch AD=AD, ſo iſt DE=DG, §. 82. Eben ſo beweiſt man, daß DG=DF, daher auch DE=DF iſt.

§. 197. Aufg. (Fig. 89. 88.) Um und in jeden Kreis einen Triangel, der mit einem gegebenen △GHK einerley Winkel habe, zu beſchreiben.

Aufl. I. (Fig. 98.) Man verlängere GH zu beiden Seiten, ziehe einen beliebigen Halbmeſſer DG, mache GDE=KGL, GDF=KHM, und lege durch E, F, G, Tangenten AB, BC, CA.

Denn da bey E, G, rechte Winkel, ſo iſt EAG+GDE =2R, §. 104, =KGH+KGL, §. 34, folglich EAG= KGH. Eben ſo beweiſt man, daß FCG=KHG iſt. Folglich iſt auch EBF=GKH, §. 100.

II. (Fig. 88.) An einen beliebigen Punkt B des Umkreiſes lege man die Tangente NR, mache NBA=KGH, RBC=KHG, und ziehe AC: ſo iſt ACB=KGH, und BAC=KHG, §. 186, folglich auch ABC=GKH, §. 100.

§. 198. Zuſ. Wäre (Fig. 88.) KGH ein gleichſeitiger Triangel, ſo wären die drey Winkel an dem Berührungspunkte gleich, §. 102, und △ABC wäre gleichſeitig. Iſt nun mittelſt dieſer Operation (Fig. 87.) in den Kreis, deſſen Mittelpunkt G, ein gleichſeitiger △ACE beſchrieben, ſo erhält man durch Halbirung der Bogen eine regu-

läre

lare sechsseitige Figur, ein Hexagon §. 195, dessen Seite AB, weil △GAB auch gleichseitig §. 101, dem Halbmesser GA gleich ist.

§. 199. Aufg. (Fig. 90.) Ein Quadrat in und um den Kreis, und einen Kreis um und in das Quadrat zu beschreiben.

Auflös. I. In dem Kreise mache man zwey Durchmesser AB, DE, senkrecht auf einander, ziehe die Sehnen AD, DB, BE, EA; und durch die Endpunkte die Tangenten FG, GH, HK, KF: so ist das Quadrat ADBE in, und das Quadrat FGHK um den Kreis beschrieben.

Bew. 1. Da AB, DE, Durchmesser sind: so hat die Figur ADBE lauter rechte Winkel. §. 181. Auch hat sie gleiche Seiten, weil bey C rechte Winkel, folglich die Bogen §. 177. folglich die Sehnen §. 179. gleich sind.

2. Die Tangenten müssen sich schneiden §. 97. Nun sind sie auf den senkrechten Durchmessern senkrecht §. 163. Folglich sind FK, GH mit AB; und GF, HK, mit DE parallel und gleich, und machen rechte Winkel. §. 107.

Auflös. II. In dem Quadrate ADBE ziehe man die Diagonalen AB, DE: so gehet ein Kreis aus ihrem Durchschnitte C mit dem Halbmesser CA durch alle Winkelspitzen. In dem Quadrate FGHK halbire man die Seiten FG, GH, und ziehe durch deren Mitte A, D, die AB, DE, mit des Quadrats Seiten parallel: so gehet ein Kreis aus ihrem Durchschnitte C mit dem Halbmesser CA durch alle Berührungspunkte.

Bew. 1. Da die Seiten des Quadrats gleich sind, und ED=ED: so ist BED=AED §. 48. $=\frac{1}{2}$R. Nun ist BE=EA, und EC=EC. Folglich BC=CA. §. 41. Eben so beweist man auch CA=CD=CE.

2. Da die gleichen Seiten des Quadrats halbirt sind: so ist das Parallelogramm CG rechtwinklicht und gleichseitig

ſeitig, §. 107, d. i. CA = CD, und bey A und D rechte Winkel. Eben ſo beweiſt man, daß CD = GB = CE, und bey B und E rechte Winkel ſind.

§. 200. Zuſ. Da BF = 2△ABE, und BG = 2△ABD §. 124, ſo iſt BF + BG = 2(△ABE + △ABD) d. i. das äußere Quadrat FGHK iſt doppelt ſo groß als das innere ADBE.

Durch die ſenkrechten Durchmeſſer AB, DE, wird der Kreis in vier gleiche Theile, die man Quadranten nennt, getheilt.

§. 201. Aufg. (Fig. 87.) Um jedes reguläre Polygon ABCDEF einen Kreis zu beſchreiben.

Auflöſ. Man halbire zwey nächſte Polygonwinkel A, B, §. 61, ſo ſtoßen AG, BG in G zuſammen, §. 92, daß AG = BG, §. 46. Da nun auch AB = BC, und GAB = GBC, §. 23, ſo iſt CG = BG, und GCB = GBA, §. 41. Eben ſo wird bewieſen, CG = DG = EG = FG. Folglich geht ein Kreis aus G mit GA durch alle Winkelſpitzen.

§. 202. Zuſ. (Fig. 92.) Hat man ein reguläres Polygon ABCDE, ſo läßt ſich auf jeder geraden Linie GH ein reguläres Polygon von eben ſo vielen Seiten beſchreiben, wenn man die halben Polygonwinkel BAF an G und H trägt, wodurch man F die Spitze des gleichſchenklichen Triangels und den Mittelpunkt des Kreiſes erhält, der um das Polygon geht, §. 201, in welchen man alſo GH herumtragen kann.

Für das Hexagon beſchreibe man über AB Fig. 87. einen gleichſeitigen Triangel, §. 198.

§. 203. Aufg. (Fig. 92.) In jedes reguläre Polygon ABCDE einen Kreis zu beſchreiben.

Auflöſ. Man halbire zwey nächſte Polygonwinkel A, B, durch AF, BF, und ziehe von F Linien nach C, D,

E, so wird wie §. 201. die Gleichheit der Linien und die Halbirung der Polygonwinkel bewiesen.

Nun fälle man aus F auf die Polygonseiten Perpendikel FG u. s. w. so sind bey G, H, rechte Winkel, auch ist B halbirt, und FB=FB, folglich FH=FG, §. 82. Eben so beweist man die Gleichheit der übrigen Perpendikel. Demnach geht ein Kreis aus F durch die Berührungspunkte G, H, K, L, M.

§. 204. Aufg. (Fig. 92.) Um einen Kreis, dessen Mittelpunkt F, jedes reguläre Polygon zu beschreiben, wenn man den Umkreis in soviel gleiche Theile theilen kann, als das Polygon Seiten haben soll.

Auflös. Es sey die Theilung des Umkreises geschehen, §. 201. Durch die Theilpunkte G, H, K, L, M, lege man Tangenten §. 169, die sich schneiden müssen, §. 97. Aus F ziehe man Linien nach den Durchschnittspunkten A, B, C, D, E, so ist $FB^2=FG^2+BG^2=FH^2+BH^2$, §. 130. Aber FG=FH, §. 25. Folglich ist BG=BH, folglich auch GFB=BFH, und GBF=HBF, §. 41. oder §. 48. d. i. FB halbirt die Winkel GFH und GBH. Ein gleiches wird eben so von den übrigen Linien FC, FD u. s. w. bewiesen.

Da die Bogen GH, HK, gleich sind, so sind auch die Winkel GFH, HFK, gleich, §. 177, folglich auch ihre Hälften BFH, CFH. Nun sind bey H rechte Winkel, und FH=FH, folglich ist nach §. 82.

1) BH=HC. Eben so wird bewiesen BG=GA u. s. w. d. i. die Linien FG, FA u. s. w. halbiren die Tangenten. Nun war BG=BH, folglich ist AB=BC u. s. w.

2) FBH=FCH. Eben so wird bewiesen FAG=FBG u. s. w. Nun waren dies die Hälften der Polygonwinkel, folglich sind diese gleich.

3)

2) FB=FC. Und eben ſo FC=FD u. ſ. w.

§. 205. Zuſ. Da FA, FB u. ſ. w. gleich ſind, §. 204. ſo geht ein Kreis aus F mit FA um das Polygon, und man hat $FB_q - FG_q = BG_q$, wo BG die Hälfte der Polygonſeite, §. 204.

§. 206. Lehrſ. (Fig. 92. 91.) Jedes reguläre Polygon iſt einem Triangel gleich, deſſen Grundlinie dem Umfange des Polygons, und deſſen Höhe dem Abſtande der Polygonſeiten vom Mittelpunkte des in oder um das Polygon beſchriebenen Kreiſes gleich iſt.

Bew. I. Für das äußere Polygon ABCDE ſind FA, FB u. ſ. w. gleich, §. 204, und theilen alſo daſſelbe in ſo viele congruente Triangel, als Seiten ſind, §. 48, deren Höhen die Halbmeſſer FG, FH u. ſ. w. alſo gleich ſind, §. 25. Wäre nun PR der FG gleich, und ſenkrecht auf der Linie PQ, die ſo viele Theile von der Größe AB enthielte, als Polygonſeiten, ſo wäre jeder der daher entſtehenden Triangel = △AFB, §. 122, und der ganze △RPQ dem ganzen Polygon ABCDE gleich.

II. Das innere Polygon GHKLM enthält den △ FGH ſo vielmal, als Seiten ſind, §. 48. Der Perpendikel FN, oder die Höhe des Triangels, iſt der Abſtand gleicher Sehnen vom Mittelpunkte, alſo überall gleich, §. 158. Wäre demnach PR dieſer Höhe, und PQ dem Umfange des Polygons gleich, ſo wäre wie zuvor △RPQ = GHKLM.

§. 207. Zuſ. 1. (Fig. 92.) Da FN ſenkrecht auf GH, ſo iſt GN die Hälfte von der Seite des innern Polygons §. 142, und hier $FG_q - FN_q = GN_q$.

§. 208. Zuſ. 2. (Fig. 92.) Da GH<GB+BH §. 73, d. i. <AB, §. 204, ſo iſt bey einerley Seitenzahl und einerley Kreiſe, des innern Polygons Umring kleiner als des

äußern. Nun ist auch FN<FG, §. 207, folglich ist die Fläche des innern Polygons kleiner als des äußern, §. 206.

§. 209. Zus. 3. (Fig. 92.) Da alle Sehnen, wie GH, innerhalb, und alle Tangenten, wie AB, außerhalb des Kreises sind, so ist die Kreisfläche größer als das innere Polygon, und kleiner als das äußere.

Daß aber auch des Kreises Umring größer als des innern Polygons Umring, und kleiner als des äußern sey, erhellet aus folgenden Betrachtungen:

Der auf die Sehne GH aus F gefällte Perpendikel FB trifft den Bogen GH da, wo er am weitesten von der Sehne entfernt ist, indem diese Entfernung zu beiden Seiten des Perpendikels nach G und H zu, immer stetig fort abnimmt, welches auch von der gebrochenen Linie GBH gilt, und durch Linien mit BN parallel klar vor Augen gestellt werden kann. Daher sagt man: der Bogen GH und die gebrochene Linie GBH sind gegen die Sehne GH beständig hohl.

Geht man also von G nach H durch den Bogen GH, oder durch die gebrochene Linie GBH, so geht man durch Punkte, die von den Punkten der Sehne entfernt sind, daß also die gerade Linie GH der kürzeste Weg von G nach H ist, vergl. §. 76.

Da aber sämmtliche Punkte der gebrochenen Linie GBH von den Punkten der geraden Linie zwischen G und H weiter entfernt sind, als sämmtliche Punkte des Bogens GH, so entfernt man sich von der Sehne weiter, wenn man durch die gebrochene Linie GBH, als wenn man durch den Bogen GH geht, d. i. GBH>Bogen GH. vergl. §. 75.

7. Von der Proportion und Aehnlichkeit.

§. 210. Erkl. Größen von einerley Art heißen, von

von denen die eine etlichemal genommen größer als die andre werden kann.

§. 211. Erkl. (Fig. 93.) Von zwey Größen heißt die eine A ein Vielfaches, multiplum, der kleinern h und diese ein aliquoter Theil, submultiplum, von jener; wenn die kleinere etlichemal genommen der größern gleich wird, oder in der größern etlichemal genau enthalten ist (vergl. Ar. §. 10.)

Auch sagt man alsdann, A werde von h gemessen, oder h sey ein Maaß, mensura, von A (vergl. Ar. §. 61.) Doch kann auch jede andre Größe B, wenn sie gleich nicht selbst, sondern nur durch einen ihrer aliquoten Theile h die A mißt, ein Maaß von A genannt werden.

§. 212. Zus. 1. Ist eine Größe A, etwa durch beliebige Halbirungen, in gleiche Theile getheilt: so ist jeder solcher Theile ein Maaß der Größe A. Z. E. hier ist A in 4 Theile getheilt, und $\frac{1}{4}A=h$, ein Maaß von A.

§. 213. Zus. 2. Das Maaß muß mit der auszumessenden Größe allemal von einerley Art §. 210. seyn.

§. 214. Zus 3. Ist h, das Maaß einer Größe A, in einer zweyten B etlichemal ohne Rest, in einer dritten C aber etlichemal mit einem Reste $r<h$ enthalten: so ist h gewiß auch ein Maaß von B; sollte es aber auch ein Maaß von C seyn: so müßte irgend ein aliquoter Theil von h in dem Reste r, folglich auch in der ganzen C, genau enthalten seyn. Fände dies aber niemals statt, so klein man auch die Theile von h, machte: so könnte h kein Maaß von C seyn.

§. 215. Erkl. Ist eine Größe ein Maaß von

mehrern andern, ſo heißt ſie deren **gemeines Maaß**, menſura communis, (vergl. Ar. §. 69.)

§. 216. Erkl. (Fig. 93.) **Commenſurable Größen** ſind, die irgend ein gemeines Maaß haben; **incommenſurable** aber, für die gar kein gemeines Maaß ſtattfindet. Z. E. aus §. 214. ſind A, B, commenſurabel, A, C, aber incommenſurabel, wenn weder h noch irgend ein andrer aliquoter Theile von A die C mißt.

§. 217. Zuſ. 1. Die Verhältniß commenſurabler Größen A, B, kann durch Zahlen genau ausgedrückt werden, und iſt alſo **rational** (vergl. Ar. §. 351.)

Denn es ſey h ihr gemeines Maaß, und $A = m.h$, $B = n.h$, daß m, n, ganze Zahlen bedeuten, ſo iſt $A:B = m.h:n.h = m:n$ (Ar. §. 352.) daß alſo der **Verhältniß-name** (Ar. §. 315.) $\frac{n}{m}$ iſt, den man bequem auch durch $\frac{B}{A}$ anzudeuten pflegt.

§. 218. Zuſ. 2. Für incommenſurable Größen nehme man $\frac{1}{m}A = q$, ſo daß m nach und nach jede ganze Zahl z. E. die auf einander folgenden Potenzen der Zahl 2 bedeute, ſo wird ſtets $C > nq$, und $< (n+1)q$, d. i. $C = nq + r$, oder $C - r = nq$ ſeyn, ſo daß allemal $r < q$ iſt, wobey n verſchiedene Zahlen bedeuten muß, die deſto größer werden, je kleiner q iſt, und ſich alſo nach m richten.

§. 219. Zuſ. 3. Die Verhältniß incommenſurabler Größen läßt ſich durch Zahlen nie genau angeben, und iſt alſo **irrational**, (vergl. Ar. §. 351.)

Denn aus §. 218. iſt A:C weder der Verhältniß

m:n noch m:n+1 gleich, indem nur A:C−r=m:n ist, wo r der irrationale Theil heißen kann. Indeß ist der Verhältnißname $\frac{C}{A}$ doch gewiß zwischen den Gränzen $\frac{n}{m}$ und $\frac{n+1}{m}$, die um $\frac{1}{m}$ unterschieden sind, enthalten, ob er gleich selbst nie angegeben werden kann.

§. 220. Lehrs. (Fig. 94.) Nimmt man von einer Größe AB die Hälfte oder drüber, von dem Reste wieder die Hälfte oder drüber, und dies immer so fort, so kömmt man irgend einmal auf einen Rest, der kleiner ist als jede gegebene Größe C derselben Art, quovis dato minus.

Bew. Man mache von C ein vielfaches DE, das zunächst größer als AB ist, §. 210. Von AB (<DE) nehme man die Hälfte oder drüber AK, von DE aber nur das Einfache DF, so ist gewiß KB<FE. Von KB (<FE) nehme man wieder die Hälfte oder drüber KL, von FE aber nur das Einfache FG, so ist wieder LB<GE. Setzt man dieses so fort, bis von DE das letzte einfache HE, und von AB der letzte Rest MB geblieben ist, so hat man wie zuvor MB<HE gefunden. Nun ist HE=C, folglich ist MB<C.

Anm. Dies ist des Euklides 1. Satz im 10. Buche, der hier deshalb gegeben ist, damit es nicht nöthig sey, auf Art. §. 273, wo derselbe allgemein erwiesen worden, zu verweisen.

§. 221. Zus. 1. (Fig. 93.) Es sey aus §. 218. eine Irrationalgröße $\frac{C}{A}$ für alle Bedeutungen der ganzen Zahl m, stets zwischen den Gränzen $\frac{n}{m}$ und $\frac{n+1}{m}$ enthalten, daß r, der irrationale Theil der Verhältniß A:C, allemal <q. sey, so ist offenbar, daß r desto kleiner

werde, je kleiner man $q = \frac{1}{m}A$ macht. Nun kann q, durch wiederholte Halbirungen der Größe A, kleiner als jede gegebene Größe ihrer Art werden §. 220. Folglich kann noch vielmehr r kleiner als alles Gegebene werden; daß also die irrationale Verhältniß A : C einer rationalen Verhältniß m : n so nahe gebracht werden kann, als man nur immer will, oder daß der Verhältnißname $\frac{C}{A}$, der von $\frac{n}{m}$ noch nicht um $\frac{1}{m}$ unterschieden ist, davon so wenig als man will verschieden sey, wenn man nur m so groß man will annehmen kann.

§. 222. Zus. 2. Wenn m ohne Ende wächst: so nimmt q ohne Ende ab. Diese Veränderungen gehen ohne Ende fort, daß es also bey keinem von beyden ein Letztes giebt. Wollte man sich aber ein Letztes einbilden: so müßte man m größer als jede Zahl, die sich angeben läßt, oder unendlich groß, und q kleiner, als jede Größe, die sich angeben läßt, oder unendlich klein, annehmen. Alsdenn nennt man $\frac{1}{q}$ ein Element von A, und siehet es an, als würde davon C völlig genau gemessen, weil der Fehler noch nicht ein ganzes Element betragen kann.

Auf eben die Art sieht man unter allen rationalen Verhältnissen, denen sich die irrationale Verhältniß A : C ohne Ende nähert, die m.n als die letzte an, und setzt ihr die A : C gleich. Denn wollte man annehmen, daß diese Verhältnisse, und die Nahmen $\frac{C}{A}, \frac{n}{m}$, ungleich wären: so müßte man einen Unterschied angeben, etwa daß der irrationale Theil ϱ, und der Unterschied $\frac{1}{\mu}$ übrig bliebe, die nun nicht kleiner gemacht werden könnten, welches dem §. 221. widerspricht.

§. 223.

§. 223. Lehrs. (Fig. 93.) Zwey Verhältnisse sind gleich, wenn ihre Verhältnißnahmen entweder gleich, oder doch stets zwischen gleichen Gränzen eingeschlossen sind.

Bew. I. Wenn A und B, D und E, commensurabel sind: so giebt es für jedes Paar ein gemeines Maaß h, k. Nun sey A=mh und B=nh. Läßt sich nun erweisen, daß auch D=mk und E=nK, folglich für jedes Paar der Verhältnißnahme $\frac{n}{m}$ d. i. A:B=m:n, und D:E=m:n sey: so ist ganz unstreitig A:B=D:E.

II. Wenn A und C, D und F, incommensurabel sind. Es sey für $h=\frac{1}{m}A$, stets $C>\frac{n}{m}h$ und $<\frac{n+1}{m}h$. Läßt sich nun erweisen, daß für $K=\frac{1}{m}D$, allemal zugleich mit C, auch $F>\frac{n}{m}k$ und $<\frac{n+1}{m}k$ sey, daß also der Verhältnißnahme beyder Paare stets zwischen einerley Gränzen $\frac{n}{m}$ und $\frac{n+1}{m}$ enthalten sey, was man auch für eine ganze Zahl jedesmal für m setze: so finden die Schlüsse, die für A:C §. 221. gemacht worden, eben so auch für D:F statt, daß also die irrationalen Verhältnisse, A:C und D:F, einerley rationalen Verhältniß m:n ohne Ende näher gebracht werden, welches unmöglich geschehen könnte, wenn sie ungleich wären. Denn setzte man $\frac{C}{A}=\frac{m}{n}+x$, und $\frac{F}{D}=\frac{m}{n}+y$, daß x>y wäre, und ihr Unterschied x−y eine gegebene Größe sey: so kann nach §. 221. x sowohl als y,

wovon jedes $< \frac{1}{m}$ ist, so klein als man will, folglich auch $x-y$ kleiner als jedes gegebene werden, welches dem vorigen widerspricht. Demnach können die Verhältnisse A:C, D:F, unmöglich ungleich, und es muß daher A:C=D:F seyn.

(Nach dem abgekürzten Ausdrucke dieser Schlüsse §. 222. werden A:C und D:F zuletzt derselben rationalen Verhältniß m:n gleich.)

§. 224. Anm. Durch obigen Vortrag sind die Grundlehren von den Proportionen, welche in der Arithmetik allgemein erwiesen worden, für ausgedehnte Größen aus einander gesetzt, damit man desto sicherer bey den folgenden Untersuchungen blos auf die Arithmetik Bezug nehmen könne, ohne erst die Theorie der Proportionen für ausgedehnte Größen noch besonders abzuhandeln. Nur sind hier noch einige Folgerungen aus der Lehre von den Proportionen, die in der Arithmetik nicht ausdrücklich angezeigt worden, unter dem Namen der Grundsätze, zur Abkürzung einiger Beweise beyzufügen.

§. 225. Grundſ. Gleiche Größen A, B, sind mit einerley Größe C in gleicher Verhältniß, d. i. wenn A =B, so ist A:C=B:C, und C:A=C:B.

§. 226. Grundſ. Größen A, B, die mit einerley Größe C in gleicher Verhältniß stehen, sind gleich, d. i. wenn A:C=B:C, oder C:A=C:B, so ist A=B.

§. 227. Grundſ. Ungleiche Größen A, B, sind mit einerley Größe C in ungleicher Verhältniß, nämlich, wenn A>B, so ist A:C>B:C, und C:B<C:A (vergl. Ar. §. 344.)

§. 228. Grundſ. Größen A, B, die mit einerley Größe in ungleicher Verhältniß stehen, sind ungleich, nämlich wenn A:C>B:C, oder C:B>C:A, so ist A>B, (vergl. Ar. §. 344.)

§. 229. Grundſ. Wenn A:B=C:D, und A=>

<B

<B, so ist auch C=><D. Oder wenn A=><C, so ist auch B=><D.

§. 230. Erkl. Eine gerade Linie heißt nach stetiger Proportion geschnitten, wenn die ganze Linie zum größern Abschnitte sich, wie dieser Abschnitt zum kleinern, verhält.

§. 231. Erkl. Die begränzten Schenkel zweyer Winkel heißen in verkehrter Ordnung proportionirt, wenn die Schenkel eines jeden die mittlern oder äußern Glieder solcher Proportion geben.

§. 232. Erkl. Zwey geradlinige Figuren heißen ähnlich, wenn in beiden einerley Winkel in einerley Ordnung nach einander folgen, und die Seiten, welche einerley Winkel in beiden Figuren einschließen, ebenfalls in einerley Ordnung proportionirt sind.

§. 233. Zus. 1. Alle congruente Figuren sind ähnlich. Da sie nun auch gleich sind, so heißen sie gleiche und ähnliche Figuren, zum Unterschiede von denen, die blos gleich sind.

§. 234. Zus. 2. Sind zwey Figuren einer dritten ähnlich, so sind sie selbst ähnlich; denn ihre Winkel sind einerley (4. Grunds.) und ihre Seiten proportionirt. (Arithm. §. 346.)

§. 235. Lehrs. (Fig. 95.) Triangel ABC, DEF, von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien AB, DE.

Bew. I. Sind AB, DE, commensurabel, so haben sie irgend ein gemeines Maaß AG=DH, daß AB=m. AG, und DE=n. AG. Auf jeden dieser Theile steht ein Triangel, wie ACG oder DHF. Nun sind alle diese Triangel gleich, §. 122. Folglich ist △ABC=m.

$\triangle AGC$, und $\triangle DEF = n . \triangle AGC$. Folglich ist $\triangle ABC : \triangle DEF = AB : DE$. §. 223.

II. Sind AB, DE, incommensurabel: so ist für jeden aliquoten Theil von AB, wie $AG = DH$, allemal $AB = m . AG$, aber $DE = n . AG + r$, daß $r < AG$, folglich $\frac{DE}{AB}$ stets zwischen den Gränzen $\frac{n}{m}$ und $\frac{n+1}{m}$. Nun ist nach dem vorigen Beweise $\triangle ABC = m . \triangle AGC$, aber $\triangle DEF = n \triangle AGC + R$, daß $R < \triangle AGC$. Folglich ist $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ mit $\frac{DE}{AB}$ zugleich stets zwischen eben den Gränzen $\frac{n}{m}$ und $\frac{n+1}{m}$ folglich $\triangle ABC : \triangle DEF = AB : DE$ §. 213.

§. 236. Zus. 1. Von den Parallelogrammen BK, EL, läßt sich der Satz eben so beweisen, wenn man durch G und H, mit BC, EF Parallelen zieht.

Anm. Hat man den Satz für eines von beyden bewiesen: so folgt er auch für das andre §. 124. und Ar. §. 352.

§. 237. Zus. 2. (Fig. 96.) Triangel ABC, DEF, von gleichen Grundlinien AB, DE, verhalten sich wie ihre Höhen, CG, FH.

Denn macht man GK, HL, der AB oder DE gleich, und ziehet CK, FL: so ist $CG : FH = \triangle GKC : \triangle HLF$ §. 235. $= \triangle ABC : \triangle DEF$ §. 122.

§. 238. Zus. 3. Dieser Satz gilt auch von Parallelogrammen, vergl. §. 236.

§. 239. Lehrs. (Fig. 97.) Sind zwey Parallelogramme AB, BC, gleich, und ein Winkel B in beyden einerley: so sind die solchen Winkel einschliessenden Seiten in verkehrter Ordnung proportionirt.

(§. 231.)

(§. 231.) Wiederum: Ist ein Winkel B in den beiden Parallelogrammen einerley, und die ihn einschließenden Seiten in verkehrter Ordnung proportionirt (§. 231.) so sind solche Parallelogramme gleich.

Bew. Man lege die Parallelogramme mit dem Winkel B an einander, daß die Schenkel in zwey gerade Linien fallen, §. 59, und vollende FE, §. 112.

I. Es sey AB=BC. Folglich ist AB:FE=BC:FE §. 225. Nun ist AB:FE=BD:BE, und BC:FE=BG:BF, §. 236, folglich BD:BE=BG:BF, (Ar. §. 346.)

II. Es sey BD:BE=BG:BF. Nun ist BD:BE=AB:FE, und BG:BF=BC:FE, §. 236. Folglich ist AB:FE=BC:FE, (Ar. §. 346.) folglich AB=BC, §. 226.

§. 240. Zus. 1. (Fig. 98.) Ein gleiches wird auf eben die Art von zwey Triangeln ABC, ADE, bewiesen.

§. 241. Zus. 2. (Fig. 99.) Sind vier gerade Linien a, b, c, d, proportionirt, so ist das Rectangel aus den äussersten Gliedern a, d, dem Rectangel aus dem mittlern b, c gleich; und umgekehrt.

Denn macht man AB=a, CD=b, und AE=d, CF=c senkrecht, und vollendet die Rectangel BE, DF, §. 112, so erhellet beides aus §. 239.

§. 242. Zus. 3. (Fig. 99.) Sind drey gerade Linien a, b, d, stetig proportionirt, so ist das Rectangel aus den äußersten Gliedern a, d, dem Quadrate des mittelsten b gleich; und umgekehrt.

Denn es sey c=b, daß also a:b=c:d, so erhellet beides aus §. 241.

§. 243. Lehrs. (Fig. 100.) Wenn in einem Tri-

Triangel ABC eine Linie DE mit einer Seite BC parallel iſt, ſo ſchneidet ſie die beiden übrigen Seiten proportionirt. Wiederum: ſchneidet die Linie zwey Seiten proportionirt, ſo iſt ſie mit der dritten parallel.

Bew. Man ziehe BE, DC.

I. Es ſey DE mit BC parallel, ſo iſt △BDE=△CED §. 121, folglich △BDE:△ADE=△CED:△ADE, §. 225. Nun iſt △BDE:△ADE=BD:DA, und △CED:△ADE=CE:EA, §. 235. Folglich iſt BD:DA=CE:EA, (Ar. §. 346.)

II. Es ſey BD:DA=CE:EA. Nun iſt BD:DA =△BDE:△ADE, und CE:EA=△CED:△ADE, §. 255. Folglich iſt △BDE=△ADE §. 226, folglich DE mit BC parallel, §. 123.

§. 244. Zuſ. 1. Aus vorſtehender Proportion folgen verſchiedene andre:

BD:CE=DA:EA, (Ar. §. 364.)

BA:DA=CA:EA (Ar. §. 373.) oder BA:CA=DA:EA=BD:CE.

§. 245. Zuſ. 2. Zieht man DF mit AC parallel, ſo hat man aus §. 244. BC:BA=FC:DA=DE:DA (weil DE=FC §. 107.) oder BC:DE=BA:DA=CA:EA.

§. 246. Lehrſ. (Fig. 101.) Wenn eine gerade Linie AD den Winkel eines Triangels BAC halbirt, ſo ſchneidet ſie die gegenüberliegende Seite BC den beiden übrigen proportionirt. Wiederum: wenn die Linie AD die Seite BC den übrigen proportionirt ſchneidet, ſo halbirt ſie den gegenüberliegenden Winkel BAC.

Bew. Man ziehe CE mit DA parallel, und verlängere BA bis E.

I. Es

I. Es ſey BAD=DAC. Nun iſt BAD=AEC, und DAC=ACE, §. 95, folglich iſt AEC=ACE, folglich AE=AC, §. 46. Aber BD:DC=BA:AE, §. 243. =BA:AC.

II. Es ſey BD:DC=BA:AC. Nun iſt BD:DC =BA:AE, §. 243, folglich iſt AE=AC, folglich AEC =ACE, §. 44. Aber AEC=BAD, und ACE=DAC, §. 95. Folglich iſt BAD=DAC.

§. 247. Aufg. (Fig. 102.) Eine gerade Linie AC iſt beliebig getheilt; man ſoll eine andre AB nach eben den Verhältniſſen theilen.

Auflöſ. Man lege AB an AC unter beliebigen Winkel BAC, ziehe BC und damit durch die Theilpunkte in AC, die EG, DF parallel, ſo iſt AF:FG:GB=AD:DE:EC.

Bew. AF:FG=AD:DE, §. 243, folglich AG: FG=AE:DE, Ar. §. 373, oder AG:AE=FG:DE, Ar. §. 364, =GB:EC, §. 243.

So ſchließt man weiter, wenn mehrere Theile in AC ſind.

§. 248. Zuſ. Soll AB in gleiche Theile getheilt werden, ſo trage man ein beliebiges Stück AD ſo vielmal als verlangt wird, auf die unbegränzte AC, und verfahre wie §. 247.

§. 249. Aufg. (Fig. 103.) Zu drey Linien A, B, C, die vierte Proportionallinie zu finden.

Auflöſ. Es ſey ein beliebiger Winkel EDF, und DG =A, GE=B, DH=C gemacht. Man ziehe GH, und mit ihr die EF parallel, ſo iſt HF die geſuchte.

Bew. DG:GE=DH:HF, §. 243. d. i. A:B=C: HF.

§. 250. Zuſ. 1. Soll man zu zwey Linien A, B, die

dritte

dritte Proportionallinie finden, ſo mache man C=B, und verfahre wie zuvor, da dann A:B=C:HF, folglich A:B =B:HF.

§. 251. Zuſ. 2. Hat man zu zwey Linien a, b, die dritte c gefunden, ſo iſt a:c=2(a:b) Ar. §. 421. Sucht man nun zu b, c, die dritte d, ſo iſt a:d=3(a:b) Ar. §. 421. u. ſ. w.

§. 252. Lehrſ. (Fig. 104.) Parallelogramme AB, BC, mit einerley Winkeln, ſind in zuſammengeſetzter, und jede Quadrate in verdoppelter Verhältniß ihrer Seiten.

Bew. I. Es ſey der Winkel B in beiden Parallelogrammen einerley, und BD mit BE, BF mit BG in gerader Linie, §. 59. Man vollende FE §. 112, nehme eine beliebige Linie K, und mache BD:BE=K:L, und BF:BG =L:M, §. 249.

Nun iſt AB:FE=BD:BE §. 236. =K:L, und FE:BC=BF:BG §. 236. =L:M. Folglich iſt AB:BC =K:M, Ar. §. 380. Nun iſt K:M=(K:L)+(L:M) Ar. §. 412, folglich iſt auch AB:BC=(K:L)+(L:M) =(BD:BE)+(BF:BG).

II. Wären AB, BC, Quadrate, ſo wäre BD=BF, und BE=BG, folglich AB:BC=(BD:BE)+(BD:BE) =2(BD:BE).

§. 253. Zuſ. 1. In dem Beweiſe war AB:BC =K:M, daß ſich alſo die Verhältniß der Parallelogramme AB, BC, durch die Verhältniß zweyer Linien K, M, die nach der Vorſchrift des Beweiſes gefunden werden, darſtellen läßt.

§. 254. Zuſ. 2. Da die Triangel FBD, EBG, die Hälfte der Parallelogramme §. 107, ſo ſind ſie gleichfalls

in

in zuſammengeſetzter Verhältniß der Seiten, die den Winkel B, der in beiden einerley iſt, einſchließen.

§. 255. Zuſ. 3. Nimmt man DB, BE, für die Grundlinien jeder Parallelogramme, ſo ſind die Perpendikel FN, GH, ihre Höhen, und jede zwey Parallelogramme in zuſammengeſetzter Verhältniß ihrer Grundlinien und Höhen. Denn zwey Rectangel, die ſolche Seiten hätten, wären den Parallelogrammen gleich.

§. 256. Zuſ. 4. Jede zwey Triangel ſind alſo gleichfalls in zuſammengeſetzter Verhältniß ihrer Grundlinien und Höhen.

§. 257. Lehrſ. (Fig. 105.) Triangel ABC, DEF, ſind ähnlich, wenn in beiden einerley Winkel ſind.

Bew. Es ſey ABC=DEF, ACB=DFE, folglich auch BAC=EDF, §. 100, und man bringe FE mit EB in gerader Linie.

Da DFE=ACB, ſo iſt ABC+DFE<2R, §. 63, folglich treffen BA, FD, verlängert in G, §. 92. Nun iſt DEF=BAC, und ACB=DFE. Folglich iſt CD mit BG, und AC mit FG parallel, §. 86, folglich AC =DG, und DE=AG, §. 107. Nun iſt AB:BC=AG: EF, und BC:DG=EF:FD, §. 243. Folglich iſt AB:BC =DE:EF, und BC:AC=EF:FD, folglich auch AB:AC =DE:FD, (Ar. §. 380). Demnach ſind die Triangel ähnlich, §. 232.

§. 258. Zuſ. 1. Obige Proportionen geben auch AB: DE=BC:EF, BC:EF=AC:FD, AB:DE=AC:FD, worin homologe Glieder zu einerley Triangel gehören. Diejenigen Seiten, die homologe Glieder geben, oder die gleichen Winkeln gegenüber liegen, oder an denen zwey gleiche Winkel anliegen, heißen gleichliegende Seiten.

§. 259. Zuſ. 2. Wenn die Winkel in zwey Triangeln einerley ſind, ſo ſind die gleichliegenden Seiten proportionirt.

§. 260. Zuſ. 3. (Fig. 100.) In jedem △ABC ſind, wenn DE mit BC parallel, die anliegenden Winkel gleich, §. 95, folglich die Triangel ABC, ADE, ähnlich, §. 257. woraus die Proportionen §. 244. folgen.

§. 261. Aufg. (Fig. 106) Auf jeder geraden Linie AB eine Figur zu beſchreiben, die einer gegebenen CDEF ähnlich ſey.

Auflöſ. Man ziehe DF, trage an A und B die Winkel C und CDF, ſo iſt △ABG ∽ △CDF, §. 257. An GB trage man die Winkel DFE, FDE, ſo iſt gleichfalls △BGH ∽ △DFE, §. 257. Demnach ſind die Winkel in beiden Figuren einerley, und die gleichliegenden Seiten proportionirt, folglich ABHG ∽ CDEF, §. 232.

So verfährt man weiter, wenn die gegebene Figur aus mehrern Triangeln beſteht.

§. 262. Anm. Es gereicht zur Bequemlichkeit, ähnliche Figuren ABHG, CDEF, allemal in der Ordnung ihrer gleichen Winkel zu benennen, wo A=C B=D H=E G=F iſt. Noch bequemer iſt es, die eine mit groſſen, die andre mit kleinen Buchſtaben zu bezeichnen, ſo daß gleiche Winkel einerley Buchſtaben erhalten, wenn man z. E. anſtatt ABHG ſetzte cdef.

§. 263 Lehrſ. (Fig. 107.) Jeden rechtwinklichen Triangel BAC theilt der Perpendikel AD, von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuſe, in zwey Triangel ADB, ADC, die einander und dem ganzen Triangel ähnlich ſind.

Bew. Da bey D rechte Winkel ſind, auch BAC=R, und 1) B=B, folglich BAD=C, §. 100, ſo iſt △BDA ∽ BAC §. 257. 2) C=C, folglich DAC=B, §. 100, ſo iſt △CDA ∽ △CAB, §. 257.

Da

Da bey D rechte Winkel, und nach dem Erwieſenen BAD = C, CAD = B, ſo iſt △ ADB ∽ △ CDA §. 252. (vergl. §. 234.)

§. 264. Zuſ. Hieraus erhellet: daß der Perpendikel AD die mittlere Proportionallinie zwiſchen den Abſchnitten der Hypotenuſe iſt, BD : DA = DA : DC §. 254, auch daß jede Cathete die mittlere Proportionallinie zwiſchen der Hypotenuſe und dem anliegenden Abſchnitte iſt, BC : BA = BA : BD, und BC : CA = CA : CD §. 259.

§. 265. Aufg. (Fig. 108) Zwiſchen zwey gegebenen Linien die mittlere Proportionallinie zu finden.

Auflöſ. Man trage die gegebenen Linien AB, BC, an einander in gerader Linie, beſchreibe über BC einen halben Kreis, und errichte den Perpendikel BD: ſo giebt dieſer das Verlangte.

Bew. Man ziehe AD, DC: ſo iſt ADC = R §. 181, folglich AB : BD = BD : BC §. 264.

§. 266. Zuſ. Hat man zwiſchen zwey Linien a, e, die mittlere c gefunden: ſo iſt a : c = c : (a : e) Ar. §. 421. Sucht man zwiſchen a, c die mittlere b: ſo iſt a : b = b : (a : e) u. ſ. w.

§. 267. Lehrſ. (Fig. 109.) Zwey Dreyangel ABC, DEF ſind ähnlich, wenn ihre Seiten proportionirt ſind.

Bew. Es ſey AB : BC = DE : EF, und BC : CA = EF : FD, folglich auch AB : CA = DE : FD (Ar. §. 380.) An E und F trage man die Winkel B und C, daß alſo auch G = A: ſo iſt AB : BC = EG : EF, und BC : CA = EF : FG §. 257. Vergleicht man dieſe Proportionen mit obigen beyden erſten: ſo hat man DE : EF = EG : EF, und EF : FD = EF : FG (Ar. §. 346.) folglich DE = EG, und FD = FG §. 226. Nun iſt auch EF = EF, folglich iſt DEF = FEG = ABC,

DFE=EFG=ACB, §. 48, folglich △DEF∽△ABC, §. 257.

§. 268. Zuſ. Haben zwey Triangel proportionirte Seiten, ſo ſind die gleichliegenden Winkel einerley, d i. die Winkel in der Ordnung gleich, wie ſie den proportionirten Seiten gegenüber ſtehen.

§. 269. Lehrſ. (Fig. 110.) Zwey Triangel ABC, DEF, ſind ähnlich, wenn ein Winkel in beiden einerley iſt, und die ſolchen Winkel einſchließenden Seiten proportionirt ſind.

Bew. Es ſey BAC=EDF, und BA:AC=ED:DF. An D und F trage man die Winkel A und C, daß alſo auch DGF=B, ſo iſt BA:AC=GD:DF, §. 257. Nun war BA:AC=ED:DF, folglich iſt GD:DF=ED:DF (Ar. §. 346.) folglich GD=ED, §. 226. Nun iſt auch DF=DF, und FDG=A=EDF. Folglich iſt auch DFE=DFG, §. 41, =C, folglich △DEF∽△ABC, §. 257.

§. 270. Zuſ. Sind die Seiten, die einerley Winkel in zwey Triangeln einſchließen, proportionirt, ſo ſind auch die übrigen gleichliegenden Winkel einerley.

§. 271. Lehrſ. (Fig. 111.) Zwey Triangel ABC, DEF ſind ähnlich, wenn in beiden ein Winkel A, D, einerley, ein zweyter Winkel B, E, von proportionirten Seiten eingeſchloſſen wird, und der dritte C, F, in beiden zugleich entweder ſpitz oder nicht ſpitz iſt.

Bew. Es wird behauptet, daß unter obigen Bedingungen die Winkel ABC, DEF, gleich, folglich die Triangel ähnlich §. 257. ſeyn müſſen. Denn wären dieſe Winkel ungleich, etwa ABC>DEF, ſo ſey ABG=DEF, da dann △ABG∽△DEF, oder AGB=F, und AB:BG=DE:EF iſt, §. 257. Nun iſt angenom-

nommen AB:BC=DE:EF. Folglich wäre AB:BG= AB:BC (Ar. §. 380.) folglich BG=BC §. 226, folglich BGC=BCG §. 44. welches unmöglich ist, sowohl wenn F, folglich auch C, nicht spitz ist §. 63, als auch wenn F, folglich auch C, folglich auch BGC spitz ist. Denn hieraus folgt, daß AGB stumpf sey, der doch nach dem Erwiesenen dem Winkel F, welcher spitz ist, gleich seyn soll.

§. 272. Zus. Setzt man unter den Bedingungen in §. 266. AB=DE, BC=EF; da dann auch AB:BC= DE:EF; so folgt wie zuvor, daß B=E, und hieraus die Congruenz der Triangel §. 41. 82.

§. 273. Lehrs. (Fig. 112.) Sind zwey Triangel ABC, DEF, ähnlich: so verhalten sich ihre Umringe, wie jedes Paar gleichliegender Seiten, und ihre Flächen, wie die Quadrate solcher Seiten.

Bew. I. Da AB:DE=BC:EF=CA:FD; so ist AB+BC+CA: DE+EF+FD = AB:DE u. s. w. (Ar. §. 375.)

II. Man nehme ein beliebiges Paar gleichliegender Seiten BC, EF, und hiezu die dritte Proportionallinie BG §. 250, und ziehe AG.

Da AB:DE = BC:EF, und BC:EF = EF: BG, so ist AB:DE=EF:BG, folglich △ABG= △DEF §. 240, folglich △ABC:△ABG=△ABC: △DEF §. 225. Nun ist △ABC:△ABG=BC: BG §. 235. Folglich ist auch △ABC:△DEF=BC: BG. Aber BC:EF=EF:BG, und daher BC:BG =2 (BC:EF) Ar. §. 421. =BC²:EF² §. 242. Folglich ist △ABC:△DEF=BC²:EF².

§. 274. Zus. In dem Beweise war BC:BG= △ABC:△DEF, woraus erhellet, daß von dreyen Proportionallinien BC, EF, BG, die beyden äußersten

ſich verhalten, wie die auf den beyden erſten beſchriebenen ähnlichen Triangel.

§. 275. Lehrſ. (Fig. 113.) Sind zwey vier- oder vielſeitige Figuren ABCDE, FGHKL, ähnlich: ſo laſſen ſie ſich in gleichviele ähnliche, ihnen proportionirte Triangel theilen; und es verhalten ſich ihre Umringe wie jedes Paar gleichliegender Linien, ihre Flächen aber wie die Quadrate ſolcher Linien.

Bew. I. Man ziehe die gleichliegenden Diagonalen AC, FH; CE, HL. Nun ſind die ähnlichen Figuren gleiche Winkel und proportionirte Seiten §. 232. Demnach iſt ABC = FGH, und AB : BC = FG : GH. Folglich iſt △ABC ∽ △FGH, auch BAC = GFH, und AB : FG = AC : FH §. 269. Nun iſt auch BAE = GFL, und AB : FG = AE : FL. Folglich iſt CAE = HFL (7. Grundſ.) und AC : FH = AE : FL (Anm. §. 346.) folglich △ACE ∽ △FHL, auch AEC = FLH, und AE : FL = EC : LH §. 269. Hieraus folgt wie zuvor △ECD ∽ △LHK, und man kann dieſelben Schlüſſe für jeden folgenden Triangel machen.

II. Da nach dem Erwieſenen die Triangel ähnlich ſind: ſo iſt △ABC : △FGH = 2 (AB : FG); △ACE : △FHL = 2 (AE : FL); △ECD : △LHK = 2 (ED : LK) u. ſ. w. §. 273. Nun iſt AB : FG = AE : FL = ED : LK, alſo auch 2 (AB : FG) = 2 (AE : FL) = 2 (ED : LK). Folglich iſt △ABC : △FGH = △ACE : △FHL = △ECD : △LHK, folglich ABCDE : FGHKL = △ABC : △FGH. (Anm. §. 375.)

III. Da nach dem erſten Beweiſe AB : FG = AC : FH u. ſ. w. und △ABC : △FGH = 2 (AB : FG) ſo iſt nach dem zweyten Beweiſe ABCDE : FGHKL = 2 (AB : FG) = 2 (AC : FH) = AB² : FG² = AC² : FH².

§. 278.

§. 273. Eben so wird der Beweis von jedem Paare gleichliegender Seiten oder Diagonalen geführt.

IV. Da wegen Aehnlichkeit der Figuren AB:FG = BC: GH = CD: HK = DE: KL = EA: LF; so ist AB + BC + CD + DE + EA: FG + GH + HK + KL + LF = AB:FG Ar. §. 375. = AC: FH u. s. w.

§. 276. Zus. 1. Sucht man zu zweyen gleichliegenden Linien AB, FG, die dritte Proportionallinie O §. 250; da dann AB:O = 2 (AB:FG) ist: so erhellet, daß von dreyen Proportionallinien die beyden äußersten sich verhalten, wie die auf den beyden ersten beschriebenen ähnlichen Figuren.

§. 277. Zus. 2. (Fig. 106.) Ist eine Figur CDEF gegeben, der man eine andre in einer gegebenen Verhältniß, z. E. $\frac{1}{2}$, ähnlich machen soll: so suche man zu CD und $\frac{1}{2}$CD, die dritte Proportionallinie §. 250. Ist diese AB: so beschreibe man auf AB die verlangte Figur §. 261.

§. 278. Anm. (Fig. 114.) Sind zwey Figuren ABCDE, abcde, ähnlich: so nehme man innerhalb der ersten, einen beliebigen Punkt F, und in der andern einen gleichliegenden f, den man erhält, wenn man die Winkel D und C, an d und c trägt. Ziehet man nun von solchen Punkten F, f, gerade Linien nach allen Winkelspitzen: so erhält man auch lauter ähnliche Triangel. Denn △FDC ∽ △fdc, CD: cd = DF: df, und CDF = cdf. Nun ist auch CDE = cde, und CD: cd = DE: de. Folglich ist auch FDE = fde, und DF: df = DE: de, folglich △FDE ∽ △fde. So schließt man immer von der Aehnlichkeit des einen Paares auf die Aehnlichkeit des nächstfolgenden.

Demnach sind auch die Umringe der Figuren wie ein Paar gleichliegende Linien FC: fc, und ihre Flächen, wie die Quadrate solcher Linien.

Hiernach läßt sich auch auf dc eine der ABCDE ähnliche Figur beschreiben, wenn man die Triangel wie §. 261. zusammensetzt.

Legt man f auf F, und fd längs FD: so fallen auch die übri-

gen Linien aus f und F auf einander §. 36, und die Seiten bey der Figuren sind parallel §. 86.

Oder: Nimmt man in FD einen beliebigen Punkt d, und ziehet durch d die dc mit DC, und so fort durch c und die übrigen hiedurch bestimmten Punkte, Linien mit den übrigen Seiten parallel: so wird die innere Figur der äußern ähnlich. §. 243.

Bey dergleichen Verzeichnungen läßt sich auch §. 277. anwenden.

§. 279. Lehrs. (Fig. 115.) Wenn vier gerade Linien AB, CD, EF, GH, proportionirt sind: so sind auch die auf denselben beschriebenen ähnlichen Figuren ABK, CDL, EM, GN proportionirt. Wiederum sind die Figuren proportionirt: so sind auch die Linien proportionirt.

Bew. I. Es sey AB : CD = EF : GH, und man suche zu beyden Paaren die dritte Proportionallinie O, P, §. 250. Da AB : CD = CD : O, und EF : GH = GH : P, so ist CD : O = GH : P. (Ar. §. 346) Nun war AB : CD = EF : GH. Folglich ist AB : O = EF : P. (Ar. §. 380.) Nun ist AB : O = ABK : CDL, und EF : P = EM : GN §. 276. Folglich ist ABK : CDL = EM : GN. Ar. §. 346.

II. Es sey ABK : CDL = EM : GN, so ist AB : O = EF : P §. 276. Nun ist AB : O = 2 (AB : CD) und EF : P = 2 (EF : GH). Folglich ist 2 (AB : CD) = 2 (EF : GH) folglich AB : CD = EF : GH.

§. 280. Aufg. (Fig. 116.) Eine Figur zu beschreiben, die einer gegebenen ABC ähnlich, und einer andern D gleich sey.

Auflös. Auf CB beschreibe man BE = △ABC §. 125, und auf CE, unter dem Winkel CBL, CM = D §. 127, so sind BCF, LEM, gerade Linien §. 56. Nun suche man zwischen BC, CF, die mittlere Proportionallinie §. 265. Ist diese GH: so beschreibe man auf CH den △KGH ∽ △ABC. §. 261.

Bew.

Bew. Da BC:GH=GH:CF, ſo iſt △ABC: △KGH=BC:CF §. 274. =BE:CM §. 236. Nun iſt △ABC=BE. Folglich iſt auch △KGH=CM §. 229. =D.

§. 281. Lehrſ. (Fig. 117.) In jedem rechtwinklichten Triangel BAC, iſt die Figur E auf der Hypotenuſe, den ihr ähnlichen Figuren F, G, auf den Catheten zuſammen gleich.

Bew. Da die Figuren ähnlich ſind: ſo iſt $AB^q:AC^q=F:G$ §. 275, folglich $AB^q+AC^q:AC^q=F+G:G$. (Ar. §. 373.) Nun iſt $AB^q+AC^q=BC^q$ §. 130, und $BC^q:AC^q=E:G$ §. 275. Folglich iſt $F+G:G=E:G$ (Ar. §. 346.) folglich $F+G=E$ §. 229.

Von den Proportionen beym Kreiſe.

§. 282. Lehrſ. (Fig. 118.) Gehen durch einen Punkt A innerhalb des Kreiſes zwey Sehnen BC, DE: ſo ſind ihre Abſchnitte in verkehrter Ordnung §. 239. proportionirt.

Bew. Man ziehe BE, CD: ſo ſind die Winkel bey A § 58, und die Peripheriewinkel E, C, gleich §. 171, folglich BA:AE=AD:AC §. 257.

§. 283. Zuſ. (Fig. 119.) Schneidet eine Sehne BC den Durchmeſſer DE in A ſenkrecht: ſo iſt, wie §. 282, DA:BA=AC:AE, oder weil AC=BA §. 142, DA:BA=BA:AE, d. i. der Perpendikel AB die mittlere Proportionallinie zwiſchen den Abſchnitten des Durchmeſſers; welches §. 264. aus andern Gründen bewieſen iſt.

§. 284. Lehrſ. (Fig. 120.) Gehen aus einem Punkte A außerhalb des Kreiſes zwey gerade Linien AC, AE, die beyde den Kreis ſchneiden: ſo ſind die

ganzen Linien ihren draußen befindlichen Abschnitten umgekehrt proportionirt.

Bew. Man ziehe BE, CD: so ist A=A, und C =E §. 171, folglich auch △ADC∽△ABE, und AE:AC=AB:AD §. 257.

§. 285. Lehrs. (Fig. 121.) Gehen aus einem Punkte A außerhalb des Kreises zwey gerade Linien, deren eine AC den Kreis schneidet, die andre AD ihn berührt: so ist letztre die mittlere Proportionallinie zwischen der ersten und ihrem draußen befindlichen Abschnitte. Wiederum: wenn AD diese mittlere Proportionallinie ist: so berührt sie den Kreis.

Bew. I. Man ziehe BD, DC: so ist A=A, und ADB=BCD §. 171, folglich △ABD∽△ADC, und AC:AD=AD:AB. §. 257.

II. Es sey AD die mittlere zwischen AC, AB. Ziehet man von A eine Tangente AE §. 169: so ist nach dem ersten Beweise AE auch die mittlere zwischen AC, AB. Folglich ist AE=AD. Ist nun F des Kreises Mittelpunkt: so ist auch FE=FD, AF=AF. Folglich ist ADF=AEF §. 48. =R. §. 161.

§. 286. Aufg. (Fig. 122.) Jede gerade Linie AB nach steiger Proportion zu schneiden. §. 230.

Auflös. Auf AB errichte man den Perpendikel BC, mache ihn ½AB, ziehe AC, und mache CE=CB, AF =AE: so ist in F der verlangte Schnitt.

Bew. Aus C beschreibe man mit CB=CE einen Kreis, und verlängere AC bis D: so ist AD:AB=AB: AE, §. 285, folglich AB:AE=AD—AB:AB—AE: (Ar. §. 373). Nun ist AE=AF, AD—AB=AD —DE=AE=AF und AB—AE=AB—AF=FB. Folglich ist AB:AF=AF:FB.

Daß

Daß aber auch AF = AE der größere Abſchnitt ſey, wird ſo bewieſen: ABC = R, folglich AC > AB, aber CE = ½ AB, folglich AE > ½ AB.

§. 287. Aufg. (Fig. 123.) Einen gleichſchenklichten Triangel zu beſchreiben, daß jeder Winkel an der Grundlinie doppelt ſo groß, als der Winkel an der Spitze ſey.

Auflöſ. Es ſey eine beliebige Linie AB in F nach ſtetiger Proportion geſchnitten §. 286. Aus A beſchreibe man mit AB einen Kreis, trage darein BD = AF §. 192, und ziehe DA: ſo iſt ABD der verlangte Triangel.

Bew. Da AB : AF = AF : FB, aber BD = AF: ſo iſt AB : BD = BD : FB, folglich BD eine Tangente §. 285, folglich, wenn man DF ziehet, BDF = FAD §. 186, folglich BDA = FAD + FDA (5. Grundſ.) Nun iſt AB = AD. Folglich iſt ABD = BDA §. 44. = FAD + FDA = BFD §. 62, folglich BD = FD §. 46. = FA, folglich ABD = 2FAD.

§. 288. Aufg. (Fig. 124.) In einen gegebenen Kreis eine reguläre fünfſeitige Figur, ein Pentagon, zu beſchreiben.

Auflöſ. Man beſchreibe in den Kreis den △ ACD, der mit dem △ ABD der 123. Fig. einerley Winkel habe, §. 197, halbire die Winkel an C und D, durch CE, DB, und ziehe die Linien DE, EA, AB, BC: ſo iſt das Verlangte geſchehen.

Bew. Die hierdurch entſtandenen fünf Winkel ſind gleich, §. 287, folglich auch ihre Bogen §. 177, folglich auch die Sehnen §. 179. Auch ſtehen die Polygonwinkel auf gleichen Bogen, und ſind alſo gleich §. 177. Demnach iſt die Figur regulär.

§. 289.

§. 289. Zuſ. Denkt man ſich den Umkreis in 15 gleiche Theile getheilt: ſo enthält der Bogen AB 3 ſolcher Theile. Iſt nun AG die Seite eines regulären Triangels: ſo enthält der Bogen ABG, 5 obiger Theile, folglich BG, 2 derſelben. Halbirt man alſo BG in H: ſo kann man eine reguläre 15ſeitige Figur in den Kreis beſchreiben.

§. 290. Lehrſ. (Fig. 125.) In jedem Kreiſe ſind die Centriwinkel ACB, ACD, den Bogen AB, AD, worauf ſie ſtehen, proportionirt.

Bew. I. Die Bogen AB, AD, ſind commenſurabel, und ihr gemeines Maaß ſey AE, daß AB=m. AE, und AD=n. AE ſey, wobey m, n, ganze Zahlen bedeuten, was für welche es auch ſind, §. 216. Auf jedem dieſer Bogen, wie AE, ſteht ein Winkel ACE, und dieſe Winkel ſind gleich §. 177. Demnach iſt ACB=m. ACE, und ACD=n. ACE; folglich ACB:ACD=AB:AD. §. 223.

II. Die Bogen AB, AD, ſind incommenſurabel; ſo iſt für jeden aliquoten Theil von AB, wie AE, allemahl AB=m. AE, aber AD=n. AE+k, daß k<AE, folglich $\frac{AD}{AB}$ ſtets zwiſchen den Gränzen $\frac{n}{m}$ und $\frac{n+1}{m}$ enthalten. Nun iſt nach dem erſten Beweiſe ACB=m. ACE, aber ACD=n. ACE+K. Folglich iſt $\frac{ACD}{ACB}$ mit $\frac{AD}{AB}$ ſtets zwiſchen eben den Gränzen $\frac{n}{m}$ und $\frac{n+1}{m}$ enthalten, folglich ACB:ACD=AB:AD. §. 223.

§. 291. Zuſ. 1. Eben dies gilt auch von Peripheriewinkeln und Kreisausſchnitten.

§. 292. Zuſ. 2. Es ſey CF ſenkrecht auf AC, folglich

lich ACF ein rechter Winkel, und AF ein Quadrant, oder der vierte Theil der Peripherie P, ſo iſt ACF:4R=AF:P, und ACB:R=AB:AF, oder ACB:4R=AB:P.

§. 293. Zuſ. 3. Beſchreibt man mit einem kleinern Halbmeſſer Ca einen concentriſchen Kreis, deſſen Peripherie p heiße, ſo gelten davon eben die Schlüſſe, und es iſt acb:4R=ab:p. Nun iſt acb=ACB, folglich iſt AB:ab=AB:P. Demnach ſind die Bogen AB, ab, die mit verſchiedenen Halbmeſſern CA, Ca aus der Spitze eines Winkels ACB zwiſchen ſeinen Schenkeln beſchrieben ſind, in einerley Verhältniß mit ihren Umkreiſen, oder ſie ſind ähnlich, das heißt, ähnliche Theile ihrer Umkreiſe.

§. 294. Zuſ. 4. Hierauf beruhet die Art, für einen Winkel, wie ACB, einen Kreisbogen, wie AB oder ab, als Maaß zu gebrauchen, obgleich dieſe Größen nicht von einerley Art ſind, §. 213. Denn einen Winkel meſſen heißt eigentlich ſeine Verhältniß gegen einen rechten Winkel angeben, welche aber der Verhältniß des Bogens AB gegen den Quadranten AF gleich iſt, folglich auch eben ſo gut durch dieſe Verhältniß angegeben werden kann. Nimmt man hiebey an, daß AE von AF, und ACE von ACF ein unendlich kleiner Theil, ein Element ſey, ſo läßt ſich damit jeder Winkel genau meſſen. Vergl. §. 222.

§. 295. Zuſ. 5. Auch erhellet hieraus die Art, wenn in oder um einen Kreis eine Figur, ſie ſey regulär oder irregulär, beſchrieben iſt, wie ſich eine ihr ähnliche in oder um einen andern Kreis beſchreiben laſſe.

§. 296. Zuſ. 6. Alle reguläre Figuren von gleicher Seitenzahl ſind ähnlich.

Denn werden Kreiſe um dieſelben beſchrieben, ſo ſind die Winkel in beiden einerley, §. 293. Nun ſind auch

die

die Seiten proportionirt §. 225. Folglich sind die Figuren ähnlich. §. 232.

§. 297. Lehrs. (Fig. 126. 127.) Sind ähnliche Figuren ABCDE, abcde, in oder um Kreise beschrieben: so verhalten sich ihre Umringe, wie die Durchmesser oder Halbmesser der Kreise, und ihre Flächen wie die Quadrate der Durchmesser oder Halbmesser.

Bew. I. (Fig. 126.) Die Figuren sind in Kreise beschrieben. Man wähle zwey gleichliegende und angränzende Seiten AB, BC, und ab, bc; ziehe AC, ac, und durch die Mittelpunkte F, f, die AG, ag, und nun auch BG, bg.

Da wegen Aehnlichkeit der Figuren ABC=abc, und AB:ab=BC:bc §. 232: so ist BCA=bca §. 269. Nun ist BCA=BGA, und bca=bga §. 171. Folglich ist auch BGA=bga (4. Grundſ.) Nun sind ABG, abg, rechte Winkel §. 181. Folglich ist AB:ab=AG:ag §. 257. Dies mit §. 279. verglichen, giebt den Beweis des Satzes.

II. (Fig. 127.) Die Figuren sind um Kreise beschrieben. Man wähle zwey gleichliegende und angränzende Seiten AB, BC, und ab, bc, ziehe GK, gk, und durch die Mittelpunkte F, f, die GH, gh, und nun auch KH, kh.

Da B=b §. 232; BG=BK, und bg=bk §. 185, also BG:bg=BK:bk §. 225: so ist BKG=bkg, und BG:bg=GK:gk §. 269. Nun ist BKG=GHK, und bkg=ghk §. 186. Folglich ist GHK=ghk. Nun ist auch GKH=gkh §. 181. Folglich ist GK:gk=GH:gh §. 257. Nun ist erwiesen BG:bg=GK:gk. Folglich ist BG:bg=GH:gh (Ar. §. 346.) Nun wird auf eben die Art bewiesen GA:ga=GH:gh. Folglich ist AB:ab=GH:gh. (Ar. §. 273.) Dies mit §. 279. verglichen, giebt den Beweis des Satzes.

§. 298.

§. 298. Zuſ. 1. (Fig. 128.) Der Satz gilt auch für reguläre Figuren von gleicher Seitenzahl, und kann auch von ihnen beſonders durch Triangel, wie FGB, FNG, erwieſen werden.

§. 299. Zuſ. 2. (Fig. 128.) Aus dieſen Triangeln zeigt man auch, wenn eine reguläre Figur in den Kreis, und eine ihr ähnliche um den Kreis beſchrieben iſt, daß ſich die Umringe beider Figuren wie die Perpendikel FG, FN, vom Mittelpunkte des Kreiſes auf die Seiten der Figuren, und ihre Flächen wie die Quadrate dieſer Perpendikel verhalten. Denn es iſt △FGN ∽ △FBG, wo GN, GB, die halben Polygonſeiten ſind.

§. 300. Lehrſ. In jeden Kreis läßt ſich ein reguläres Polygon beſchreiben, deſſen Fläche größer iſt als jede gegebene Fläche, die kleiner als der Kreis iſt, und deſſen Umring größer iſt, als jede gegebene Linie, die kleiner als der Umkreis iſt.

Bew. I. Die gegebene Fläche heiße S und ihr Unterſchied vom Kreiſe t.

Das innere Quadrat (Fig. 90) iſt die Hälfte des äußern §. 200. Nun iſt das äußere größer als der Kreis, §. 209, folglich wird durch das innere Quadrat von der Kreisfläche mehr als die Hälfte weggenommen, wobey der Reſt aus den vier gleichen Segmenten beſteht. Eben dies gilt noch mehr von jedem regulären Polygon im Kreiſe, (Fig. 128.) weil dieſes allemal größer als das Quadrat im Kreiſe iſt, wobey der Reſt aus ſo vielen gleichen Segmenten, als das Polygon Seiten hat, beſteht.

Nun ſey (Fig. 129.) eines dieſer Segmente ABFA; daß AB die Seite eines regulären Polygons im Kreiſe, ſo wird, wenn man den Bogen AFB in F halbirt, und AF, FB, zieht, ein reguläres Polygon von doppelt ſo vielen Seiten in den Kreis beſchrieben. Nun ſetze man auf

AB

AB die Perpendikel AE, BD, und ziehe durch F die DE mit AB parallel, welche eine Tangente des Kreises ist, §. 180, so ist $\triangle AFB = \frac{1}{2}AD$, §. 124. Nun ist AD > Segment ABFA, folglich wird durch den $\triangle AFB$ von dem Segment ABFA mehr als die Hälfte weggenommen. Eben dies gilt auch von allen übrigen Segmenten, die mit diesem den obgedachten Rest ausmachen. Folglich wird durch jede Verdoppelung der Seitenzahl von dem jedesmaligen Reste mehr als die Hälfte weggenommen, daß man also irgend einmal auf einen Rest kömmt, der < t ist, §. 220, folglich auf ein reguläres Polygon im Kreise, dessen Unterschied vom Kreise < t, und welches daher > S ist.

II. (Fig. 131.) Der Umkreis sey = AB, und eine Linie AE < AB. In dem Halbmesser CF nehme man G so, daß AE : AB = CF : CG, oder $\frac{AE}{AB} = \frac{CF}{CG}$ sey, ziehe durch G die Tangente GH, daß DH = DG sey, folglich die Linie CH den Umkreis in K schneide, und man einen bestimmten Bogen FDK erhalte. Nun nehme man einen aliquoten Theil des Umkreises $\frac{AB}{n} < FDK$, trage seine Hälfte aus D zu beiden Seiten bis M, N, und ziehe die Linien MN, CR, CQ, so giebt MN ein inneres Polygon p = n . MN, und RQ ein äußeres P = n . RQ, und es ist p : P = CM : CR, oder $\frac{p}{P} = \frac{CM}{CR}$. Nun ist CM = CF, aber CR < CG. Folglich ist $\frac{CM}{CR} > \frac{CF}{CG}$, d. i. $\frac{p}{P} > \frac{AE}{AB}$. Nun ist P > AB. Folglich ist noch vielmehr $\frac{p}{P} > \frac{AE}{P}$, folglich p > AE.

§. 301.

§. 304. Lehrs. Um jeden Kreis läßt sich ein reguläres Polygon beschreiben, dessen Fläche kleiner ist als jede gegebene Fläche, die größer als der Kreis ist, und dessen Umring kleiner ist, als jede gegebene Linie, die größer als der Umkreis ist.

Bew. I. Die gegebene Fläche heiße T und ihr Unterschied vom Kreise v.

Nach eben den Schlüssen zu Anfange des Beweises in §. 300. wird (Fig. 90.) vom äußern Quadrate durch den Kreis mehr als die Hälfte weggenommen, wobey der Rest aus den vier gleichen gemischtlinigen Triangeln bestehe, deren jeder von zwey halben Tangenten wie AG, GD, und dem Kreisbogen DA eingeschlossen ist. Eben dies gilt noch mehr von jedem regulären Polygon um den Kreis, (Fig. 148) weil dieses allemal kleiner als das Quadrat um den Kreis ist, wobey der Rest aus so vielen gleichen gemischtlinigen Triangeln, als das Polygon Seiten hat, bestehe.

Nun sey (Fig. 150.) einer dieser Triangel AGBFA, und AG, GB, die halben Seiten eines regulären Polygons um den Kreis, so wird, wenn man den Bogen AFB in F halbirt, und die Tangente DE durch F zieht, ein reguläres Polygon von doppelt so vielen Seite um den Kreis beschrieben, wo FE=FD=DB=AE. Nun ziehe man AF, FB, so ist, weil bey F rechte Winkel, GE>FE, also auch >AE, und eben so GD>DB. Folglich ist △FGE>△FAE, und △FGD>FDB, §. 122, folglich △GED größer als die beiden geradelinigen Triangel FAE, FDB, folglich noch größer als die gemischtlinigen Triangel FAE, FDB. Demnach wird durch den △GED von dem gemischtlinigen Triangel AGBFA mehr als die Hälfte weggenommen. Eben dies gilt auch von den übrigen Triangeln dieser Art, die mit diesem den obgedachten Rest ausmachen. Folglich wird durch jede Verdoppelung der Seitenzahl von dem jedesmaligen Reste mehr als die Hälfte weggenommen.

men, daß man alſo irgend einmal auf einen Reſt kommt, der $< v$ iſt, §. 220, folglich auf ein reguläres Polygon um den Kreis, deſſen Unterſchied vom Kreiſe $< v$, und welches daher $< T$ iſt.

II. (Fig. 131.) Der Umkreis ſey $= AB$, und eine Linie $AS > AB$. In dem Halbmeſſer CF nehme man G ſo, daß $CG : CF = AS : AB$, oder $\frac{CG}{CF} = \frac{AS}{AB}$ ſey, ziehe durch G die Tangente GH, und conſtruire alles Uebrige, wie §. 300. Bew. II, daß wiederum das äußere Polygon P, das innere p ſey, folglich $P : p = CR : CM$, oder $\frac{P}{p} = \frac{CR}{CM}$. Nun iſt wiederum $CM = CF$, aber $CR < CG$. Folglich iſt $\frac{CR}{CM} < \frac{CG}{CF}$, d. i. $\frac{P}{p} < \frac{AS}{AB}$. Nun iſt $AB > p$. Folglich iſt noch vielmehr $\frac{P}{AB} < \frac{AS}{AB}$, folglich $P < AS$.

§. 302. Lehrſ. (Fig. 131.) Jeder Kreis iſt einem Triangel ABC gleich, deſſen Grundlinie AB dem Umfange, und deſſen Höhe AC dem Halbmeſſer des Kreiſes gleich iſt.

Bew. Der $\triangle ABC$ kann weder größer noch kleiner als der Kreis ſeyn. Denn

1) Wäre er kleiner, ſo ließe ſich in den Kreis ein reguläres Polygon $> \triangle ABC$ beſchreiben, §. 300. Dieſes Polygon aber iſt nach §. 206. offenbar $< \triangle ABC$, welches dem Obigen widerſpricht.

2) Wäre er größer, ſo ließe ſich um den Kreis ein reguläres Polygon $< \triangle ABC$ beſchreiben, §. 301. Dieſes Polygon aber iſt nach §. 206. offenbar $< \triangle ABC$, welches dem Obigen widerſpricht.

§. 303.

§. 303. Lehrſ. (Fig. 131.) Die Flächen zweyer Kreiſe verhalten ſich wie die Quadrate ihrer Durchmeſſer oder Halbmeſſer.

Bew. Es wird behauptet, daß $AC^2 : ac^2 =$ Kreis C: Kreis c ſey, weil das vierte Glied dieſer Proportion weder größer noch kleiner als Kreis c ſeyn kann. Denn

1. Setze man S < Kreis c, und $AC^2 : ac^2 =$ Kreis C: S, ſo läßt ſich in den kleinern Kreis ein reguläres Polygon p > S beſchreiben, §. 300. Wäre nun in dem größern Kreiſe ein dieſem ähnliches Polygon P beſchrieben, ſo iſt $AC^2 : ac^2 = P : p$, §. 298. Nun iſt angenommen $AC^2 : ac^2 =$ Kreis C: S, folglich wäre P: p = Kreis C: S (Ar. §. 346.) Nun iſt p > S, folglich wäre auch P > Kreis C, §. 209, welches unmöglich iſt, §. 209.

2. Setze man T > Kreis c, und $AC^2 : ac^2 =$ Kreis C: T, ſo läßt ſich um den kleinern Kreis ein reguläres Polygon p < T beſchreiben, §. 301. Wäre nun um den größern Kreis ein dieſem ähnliches Polygon P beſchrieben, ſo iſt $AC^2 : ac^2 = P : p$, §. 298. Nun iſt angenommen $AC^2 : ac^2 =$ Kreis C: T, folglich wäre P: p = Kreis C: T. Nun iſt p < T, folglich wäre auch P < Kreis C, welches unmöglich iſt, §. 209.

Andrer Bew. Da Kreis C = △ABC, und Kreis c = △abc iſt, §. 302, ſo iſt Kreis C: Kreis c = △ABC: △abc = $AC^2 : ac^2$.

§. 304. Zuſ. Aus Kreis C: Kreis c = $AC^2 : ac^2$ §. 303. folgt Kreis C: AC^2 = Kreis c: ac^2 (Ar. §. 364.), daß alſo jede Kreisfläche eine unveränderliche Verhältniß zu dem Quadrate ihres Halbmeſſers oder Durchmeſſers hat.

§. 305. Lehrſ. (Fig. 133.) Die Umringe zweyer Kreiſe verhalten ſich wie ihre Durchmeſſer oder Halbmeſſer.

Bew. Des Kreiſes C Durchmeſſer ſey AD, und Umring = AB; des Kreiſes c Durchmeſſer ad, und Umring = ab, ſo wird behauptet, daß AD : ad = AB : ab ſey, weil das vierte Glied dieſer Proportion weder größer noch kleiner als ab ſeyn kann. Denn

1. nehme man ae < ab, und ſetze AD : ad = AB : ae. Man beſchreibe in den Kreis c ein reguläres Polygon, deſſen Umfang p > ae §. 300, und in den Kreis C ein dieſem ähnliches, deſſen Umfang P ſey, ſo iſt P : p = AD : ad §. 297. Nun iſt angenommen AD : ad = AB : ae, folglich wäre P : p = AB : ae. Nun iſt p > ae, folglich wäre auch P > AB, welches unmöglich iſt, §. 209.

2. nehme man ar < ab, und ſetze AD : ad = AB : ar. Man beſchreibe um den Kreis c ein Polygon, deſſen Umfang q < ar, §. 301, und in den Kreis C ein dieſem ähnliches, deſſen Umfang Q ſey, ſo iſt Q : q = AD : ad. Nun iſt angenommen AD : ad = AB : ar, folglich wäre Q : q = AB : ar. Nun iſt q < ar, folglich wäre auch Q < AB, welches unmöglich iſt. §. 209.

§. 306. Zuſ. Aus AB : ab = AC : ac §. 305. folgt AB : AC = ab : ac (Ar. §. 364.) daß alſo der Umring eines jeden Kreiſes eine unveränderliche Verhältniß zu ſeinem Halbmeſſer oder Durchmeſſer hat.

§. 307. Anm. Könnte man dieſe beſtändige Verhältniß des Umkreiſes zum Durchmeſſer finden, ſo könnte man mit Zuziehung des §. 202. die Größe der Kreisfläche (die Quadratur des Kreiſes) beſtimmen. Wenn man nun die Seitenzahl eines Polygons in und um den Kreis wiederholentlich verdoppelt, ſo iſt erwieſen, nicht nur, daß der Umring des innern immer größer und des äußern immer kleiner werde, folglich beyder Umring dem Umkreiſe immer näher komme, ſondern auch daß dieſe Näherung ſo weit, als man will, getrieben werden könne. Denn hat man ein Polygon, deſſen Umfang T oder V vom Umkreiſe P um irgend eine gegebene Größe t oder v noch unterſchieden, daß z. E. T + t = P, oder V − v = P iſt, ſo läßt ſich in den Kreis ein Polygon beſchreiben, deſſen Umfang > T §. 300, folglich von P weni-

ger

ger als um t unterschieden ist. Desgleichen läßt sich um den Kreis ein Polygon beschreiben, dessen Umfang $< V$ § 301, folglich von P weniger als um V unterschieden ist; daß folglich der Unterschied von P kleiner, als jede gegebene Größe t oder v werden kann.

Indeß ist es vortheilhaft, diesen Satz auch von mehrern Seiten zu betrachten, besonders wie ihn Hr. Hofr. Kästner mathem. Anfangsgründe 1sten Theils 1ste Abtheil. Geom. 42. Satz entwickelt, und mit sehr lehrreichen Bemerkungen verbunden hat. Dieser Vortrag, den ich der Fassungskraft der Anfänger etwas näher zu bringen gesucht habe, soll daher die bisherige Lehre beschließen.

§. 398. **Lehrs.** (Fig. 132.) Es sey ein beliebiger Bogen ACB, und seine Sehne AB, durch den Perpendikel aus dem Mittelpunkte E halbirt, daß AC die Sehne des halben Bogens ist; so wird folgendes behauptet:

1) Der Unterschied des halben Bogens von seiner Sehne ist kleiner, als der halbe Unterschied des ganzen Bogens von seiner Sehne ist.

2) Der Unterschied des halben Bogens von seiner Sehne, ist ein kleinerer Theil vom halben Bogen, als der Unterschied des ganzen Bogens von seiner Sehne, vom ganzen Bogen ist.

3) Des halben Bogens Sehne, ist ein größerer Theil vom halben Bogen, als des ganzen Bogens Sehne, vom ganzen Bogen ist.

Bew. Der ganze Bogen heiße α, und seine Sehne c; der halbe Bogen $\frac{1}{2}\alpha$, und seine Sehne g; so wird behauptet:

1) $\frac{1}{2}\alpha - g < \frac{\alpha - c}{2}$. Denn es sey $\alpha - c = u$, folglich $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}u$. Nun sind bey F rechte Winkel, und daher $g > \frac{1}{2}c$. Folglich ist $\frac{1}{2}\alpha - g < \frac{1}{2}u$, d. i. $< \frac{\alpha - c}{2}$.

2) $\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a-g} > \frac{a}{a-c}$. Denn es iſt $\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a-g} = \frac{a}{a-2g}$. Nun iſt $2g > c$, §. 73, folglich iſt $\frac{a}{a-2g} > \frac{a}{a-c}$, d. i. $\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a-g} > \frac{a}{a-c}$.

3) $\frac{\frac{1}{2}a}{g} < \frac{a}{c}$. Denn $\frac{\frac{1}{2}a}{g} = \frac{a}{2g}$. Nun war $2g > c$, folglich iſt $\frac{a}{2g} < \frac{a}{c}$, d. i. $\frac{\frac{1}{2}x}{g} < \frac{a}{c}$. Jeder dieſer beiden Brüche iſt < 1, weil der Bogen allemal größer als ſeine Sehne; aber der erſte iſt der Einheit oder dem Bruche $\frac{1}{1}$ näher als der zweyte.

§. 309. Zuſ. 1. Es iſt unſtreitig, daß man durch wiederholte Halbirungen den Unterſchied des Bogens von ſeiner Sehne kleiner als jede gegebene Größe p machen könnte. Denn es ſey $a - c = u$. Iſt nun $u < p$, ſo iſt das Verlangte geſchehen. Iſt aber nicht $u < p$, ſo erhält man nach num. 1. durch wiederholte Halbirungen Bogen, die von ihren Sehnen um was kleineres als $\frac{1}{2}u$, $\frac{1}{4}u$, $\frac{1}{8}u$ u. ſ. w. folglich gewiß einmal um was kleineres als p, unterſchieden ſind, §. 220. Der Bogen, den man alſo erhalten, heiße $\frac{1}{m}x$, und ſeine Sehne k, daß alſo noch vielmehr $\frac{1}{m}x - k < p$ iſt.

§. 310. Zuſ. 2. Hiedurch iſt alſo nach num. 3. die Sehne k ein größerer Theil von dem Bogen $\frac{1}{m}x$ geworden, und der Bruch $\frac{\frac{1}{m}x}{k}$ der Einheit näher gebracht; aber ob er ihr ſehr nahe gekommen, erhellet hieraus allein noch nicht.

nicht. Denn ein solcher Bogen $\frac{1}{m}\alpha$, dessen Unterschied von seiner Sehne k sehr klein ist, könnte vielleicht auch selbst sehr klein seyn, und obgedachter Unterschied ein beträchtliches Stück von ihm und seiner Sehne ausmachen; da dann $\frac{\frac{1}{m}\alpha}{k}$ gar nicht nahe für $\frac{1}{1}$ gelten könnte. Denn gesetzt, $\frac{1}{m}\alpha - k$ betrüge ein Millionentheilchen eines Scrupels, deren 10 auf $\frac{1}{m}\alpha$, folglich 9 auf k giengen; so wäre der Bruch $\frac{10}{9}$ noch sehr beträchtlich von der Einheit unterschieden. Aber dieser Fall findet wegen num. 2. nicht statt, wonach gedachter Unterschied nicht nur kleiner, sondern auch gegen seinen Bogen weniger beträchtlich wird, daß nämlich $\frac{1}{m}\alpha - k$ in $\frac{1}{m}\alpha$ sehr viele mal, nicht, wie oben gesetzt wurde, nur 10 mal, enthalten ist.

§. 311. Zus. 3. Aus dem Bisherigen erhellet also:

1) Daß der Quotient $\frac{\frac{1}{m}\alpha}{\frac{1}{m}\alpha - k}$ immer beträchtlicher, folglich der Bruch $\frac{\frac{1}{m}\alpha - k}{\frac{1}{m}\alpha}$ immer kleiner werde; ob er aber auch kleiner als jeder gegebene Bruch werden müsse, ist hiedurch noch nicht ausgemacht. Denn zwischen zwey Brüchen, z. E. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$, lassen sich unzählige Brüche setzen, die immer kleiner und kleiner werden, und doch alle $> \frac{1}{3}$ bleiben.

2) Daß der Quotient $\frac{\frac{1}{m}\alpha}{k}$ der Einheit immer näher komme; ob er aber ihr auch so nahe als man will gebracht werden könne, bleibt noch unentschieden. Denn wenn z. E. in den Quotienten $\frac{3,\ 64+x}{3}$, die Größe x immer

fort, selbst bis Null abnimmt: so nähert sich der Quotient zwar immer mehr der Einheit, aber nicht weiter, als bis an 1, 2.

§. 312. Zus. 4. Will man sich also überzeugen, daß es Bogen gebe, die ihren Sehnen so nahe, als man will, kommen: so muß man folgende Betrachtungen mit zu Hülfe nehmen:

Da DC auf AB senkrecht: so ist DF : AF = AF : FC §. 264, oder $\frac{AF}{DF} = \frac{FC}{AF}$, folglich, wenn der Bogen ACB kleiner als der halbe Umkreis, also AF < DF ist, FC < AF §. 229, wo FC die Höhe des Bogens ACB heißen kann; indem sie die größte Entfernung anzeigt, die ein Punkt des Bogens von seiner Sehne haben kann, §. 209.

Nun rücke die Sehne AB, immer senkrecht auf DC nach C zu, bis sie in C zur Tangente des Kreises wird: so nimmt die Sehne AB, und mit ihr die Höhe FC, immer fort bis auf Null ab, und wird also, so wie der Quotient $\frac{FC}{AF}$, und der ihm gleiche $\frac{AF}{DE}$, so klein, als man will, folglich des Bogens Höhe gegen die halbe Sehne so unbeträchtlich, als die halbe Sehne gegen den Durchmesser: da dann auch $\frac{1}{m}a$ dem Bruche $\frac{1}{k}$ so nahe gebracht, und der Bruch $\frac{\frac{1}{m}a - k}{\frac{1}{m}a}$ so unbeträchtlich gemacht werden kann, als man immer will.

Nämlich da der Bogen ACB beständig gegen seine Sehne AB hohl ist §. 209: so müssen, wenn FC bis zu Null abnimmt, also der Punkt C ganz nahe an den Punkt F kömmt, alle übrige Punkte des Bogens noch näher

näher bey den Punkten der Sehne seyn §. 209, daß also ein solcher Bogen $\frac{1}{m}\alpha$ seine Sehne k ganz nahe deckt, also $\frac{\frac{1}{m}\alpha}{k}$ ganz nahe $= \frac{1}{1}$ ist.

So lange m noch eine gegebene Zahl bleibt, ist $\frac{\frac{1}{m}\alpha}{k}$ noch von $\frac{1}{1}$ unterschieden. Ist aber m größer als jede gegebene Zahl: so ist genau $\frac{\frac{1}{m}\alpha}{k} = \frac{1}{1}$. Alsdann heißt $\frac{1}{m}\alpha$ ein unendlich kleiner Bogen, und k eine unendlich kleine Sehne, da man dann sagt: die unendlich kleine Sehne ist ihren Bogen gleich, oder verliert sich in denselben, und ist vom Mittelpunkte um den Halbmesser entfernt. Es bedeutet nämlich unendlich klein einen Zustand, dem sich die Sehne beständig nähert, ihn aber noch nicht erreicht hat, so lange sie eine bestimmte Größe hat, aber ihm so nahe kommen kann, als man will; weil sie von einer bestimmten Größe durch alle kleinere bis auf nichts abnehmen, folglich kleiner werden kann, als jede gegebene Größe, so klein sie auch immer sey.

Hieraus erhellet also, daß man durch fortgesetzte Halbirungen nicht nur immer kleinere Brüche und Quotienten in §. 311. erhält, sondern auch so kleine als man will.

§. 313. Zus. 5. Denkt man sich die Halbirungen der Bogen ohne Ende fortgesetzt: so wird dadurch der Umkreis in eine unzählige Menge unendlich kleiner Bogen (Elemente) getheilt, und ein reguläres Polygon von unzählig vielen Seiten in den Kreis beschrieben; daß also der unendlich kleine Bogen unzähligemahl genommen den Umkreis, und die unendlich kleine Sehne unzähligemahl genommen den Umring des Polygons giebt. Denkt man sich nun einen Unterschied zwischen Bogen und Sehne: so muß man diesen als ein unendlich kleines Stück des Bo-

gens annehmen; da dann der Umkreis den Umring des Polygons, um diesen Unterschied unzähligemal genommen übertrifft, folglich um etwas, welches gegen den ganzen Umkreis eben so unbeträchtlich ist, als es einmal genommen gegen das einzelne Element des Umkreises war.

§. 314. Zus. 6. Es stelle AC einen unendlich kleinen Bogen vor, in den sich seine Sehne verliert, ein Element des Umkreises, daß also AEC unendlich klein ist, folglich, weil EA=EC, EAC=R—½CEA §. 101. =R geschätzt werden kann. Nun sey AG eine Tangente in A, und daher EAG=R §. 163. Folglich fällt das Element AC in die Tangente AG, und man kann sagen, daß die Tangente einen unendlich kleinen Bogen, ein Element, mit dem Kreise gemein habe; daß sich also das Element AC als der Weg ansehen läßt, den der Punkt, welcher den Umkreis beschreibt, in dem Augenblicke, da er in A ist, nimmt, folglich sein Weg oder seine Richtung in diesen Ort der Tangente ist.

Nun fällt aber auch nach Obigem die unendlich kleine Sehne AC mit ihrem Bogen zusammen. Folglich fallen für einen unendlich kleinen Theil des Umkreises Sehne, Bogen und Tangente in Eins.

9. Von der Ausmessung der Linien und Figuren.

§. 315. Wahlsatz. (Fig. 125.) Der Umfang eines jeden Kreises sey in 360, also der Quadrant AF, in 90 gleiche Theile getheilt, welche Grade heißen; der Grad halte 60 gleiche Theile oder Minuten; die Minute 60 Secunden; die Secunde 60 Tertien u. s. w. Man bezeichne aber Grade, Minuten, Secunden, Tertien ꝛc. durch ° ′ ″ ‴ ꝛc.

§. 316.

§. 316. Zuſ. 1. (Fig. 125.) Da ein Bogen AB, oder ab, als das Maaß eines Winkels ACB angenommen werden kann, §. 294: ſo werden obige Benennungen auch von Winkeln gebraucht; indem man ſich den rechten Winkel ACF in eben ſo viele Theile, als den Quadranten AF, eingetheilt gedenkt. Um daher Winkel auf dem Papiere zu meſſen und aufzutragen, gebraucht man am gemeinſten den ſogenannten Tranſporteur, d. i. einen halben Kreis, der in ſeine 180 Grade, auch noch wohl in halbe und viertel-Grade getheilt iſt.

§. 317. Zuſ. 2. (Fig. 128.) Für jedes reguläre Polygon von n Seiten, iſt der Centriwinkel $= \frac{360^\circ}{n}$

folglich der Polygonwinkel $= 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ §. 98. 201.

§. 318. Zuſ. 3. (Fig. 128.) Sonſt läßt ſich ein Winkel GFB auch ſo beſtimmen, daß man von einem beliebigen Punkte G des einen Schenkels einen Perpendikel GN auf den andern fället, und durch die Verhältniß $\frac{GN}{FG}$ oder $\frac{GN}{FN}$ die Größe des Winkels andeutet. Denn für einerley Winkel GFB bleibt dieſe Verhältniß, an welchem Orte des Schenkels auch der Punkt G angenommen ſey, §. 243, daß alſo durch den Winkel die Verhältniß, und durch die Verhältniß der Winkel gegeben iſt. Dieſes dient, Winkel mit Winkeln zu vergleichen.

§. 319. Wahlſatz. Eine beſtimmte Länge ſey als Maaß gegeben, und heiße ein Fuß, daß zehn Fuß eine Ruthe ausmachen, jeder Fuß aber zehn gleiche Theile, oder Zolle enthalte; jeder Zoll zehn Linien; jede Linie zehn Scrupel. Für dieſe Größen brauche

man

man die Zeichen §. 315, daß hier o I II III IV Ruthen, Fuße, Zoll, Linien, Scrupel bedeuten.

§. 320. Anm. 1. Diese Art der Eintheilung nach der Zahl zehn heißt die Decimaltheilung, oder das Decimalmaaß, auch das geometrische Maaß, welches mit den Decimalzahlen übereinstimmt, und sich durch die gemeinen Ziffern ausdrücken und reduciren läßt. Von den übrigen Eintheilungsarten ist hier blos die Duodecimaltheilung, oder das Werkmaaß, welches nach der Zahl 12 geschiehet, zu bemerken.

§. 321. Anm. 2. Will man von diesen beyden Theilungen, die eine auf die andre bringen, wenn der Decimalfuß dem Duodecimalfuße gleich genommen wird: so setze man 10 Zoll des ersten = 12 Zoll des andern; 100 Linien des ersten = 144 Linien des andern.

§. 322. Anm. 3. Für die verschiedenen Lagen der an verschiedenen Orten eingeführten Fußmaaße, findet man in besonders dazu geschriebenen Büchern Vergleichungen, und einige derselben hier in den Beylagen zur Arithmetik §. 13.

§. 323. Anm. 4. Zu geometrischen Zeichnungen dient der sogenannte verjüngte Maaßstab, auf welchem eine beliebige Länge für eine Ruthe oder Fuß angenommen, und durch sogenannte Transversallinien in ihre Theile getheilt ist. Auf ähnliche Art wurden ehedem auch die Werkzeuge zum Winkelmessen eingetheilt.

§. 324. Aufg. (Fig. 133.) Einen verjüngten Maaßstab zu machen.

Auflös. Es sey AB eine beliebige Länge in gleiche Theile, hier in 5, getheilt. In beyden Endpunkten der Linie errichte man Perpendikel AD, BC, von beliebiger Länge, und theile einen derselben in eben so viele gleiche Theile. Durch diese Theilpunkte ziehet man Parallelen mit AB. Von D ziehe man eine schiefe Linie DK, nach dem ersten Theilpunkt K in AB, und mit dieser Parallelen durch die übrigen Theilpunkte: so ist Cc = AK, und deren Theile sind die Parallelen im △BCc, weil BC : Cc = BE : Ec = BF : Ff = BG : Gg = BH : Hh. §. 243. Nun ist BE von BC der fünfte Theil, folglich ist auch Ee von Cc der fünfte Theil; und eben so Ff = $\frac{2}{5}$, Gg = $\frac{3}{5}$, Hh = $\frac{4}{5}$.

§. 325.

§. 325. Anm. Man muß ſich hiebey noch vorſtellen, daß AB ſo vielmal auf den Maaßſtab getragen ſey, als es angeht, und daß die mit AB parallelen Linien eben ſo weit verlängert, auch in jeder Weite wie AB, Parallelen mit BC gezogen ſind.

Für das Decimal- oder Duodecimalmaaß braucht man nur AB und BC in 10 oder 12 Theile zu theilen.

Aus der Conſtruction des verjüngten Maaßſtabes erſieht man zugleich die Art ſeines Gebrauchs zum Meſſen und Auftragen gegebener Längen.

Anſtatt der Transverſallinien dient beſſer der nach ſeinem Erfinder Nunnez oder Werner benannte Nonius oder Vernier, eine gerade Linie oder einen Kreisbogen in kleinere Theile zu theilen.

§. 326. Aufg. (Fig. 134.) Einen Nonius oder Vernier zu machen.

Auflöſ. Von dem eingetheilten Rande eines Inſtruments ſey AB ein Stück, von ungleichen Theilen, entweder einer geraden Linie oder eines Kreisbogens, deren jeder $= a$. Nun ſey ein andres Stück, der Nonius oder Vernier, CD $=$ AB, in $n-1$ Theile, deren jeder $= x$, getheilt, ſo iſt $na = (n-1)x$, folglich $n-1 : n = a : x$ (Ar. §. 365.) folglich $n-1 : 1 = a : x-a$ (Ar. §. 374.) folglich $x-a = \frac{1}{n-1}.a$ (Ar. §. 382). Z. E. in der Figur iſt AB in 8, und CD in 7 Theile getheilt, alſo $n=8$ und $\frac{1}{n-1}=\frac{1}{7}$, d. i. jeder Theil x in CD um $\frac{1}{7}$ größer, als jeder Theil a in AB. Oder: Wäre $a=1$ Grad, $n=21$, ſo wäre $x-a=\frac{1}{20}$ Grad $=3$ Min. Wäre $a=1$ Zoll, $n=13$, ſo wäre $x-a = \frac{1}{12}$ Zoll $=1$ Linie.

Hieraus erſieht man leicht, wenn ſich der Nonius oder Vernier CD längs oder über dem Rande AB verſchieben läßt, ſo daß ſein Ende über einen Theilſtrich des Randes etwas herüberragt, ein Theilſtrich deſſelben aber mit irgend einem Theilſtriche des Randes zuſammenfällt, wie dadurch die Größe des herüberragenden Stücks beſtimmt werden könne.

§. 327.

§. 327. Anm. Wir nehmen an, daß sich alle Größen durch ein gemeinschaftliches Maaß, welches man beliebig verkleinern kann, wenigstens ohne merklichen Fehler, messen lassen, §. 122.

§. 328. Lehrs. (Fig 135) Sind eines Rectangels ABCD Seiten AB, AD, mit einerley Maaße AE =AF gemessen, und durch Zahlen b, a, ausgedrückt, so ist das Quadrat von AE so vielmal in dem Rectangel AC enthalten, so vielmal die Einheit in dem Producte solcher Zahlen steckt.

Bew. Das Quadrat EF läßt sich so vielmal neben einander auf AB setzen, als seine Seite AE in AB enthalten ist, und so vielmal auf AD, als AE in AD steckt. Folglich zeigt die Zahl b, wieviele Quadrate EF in der Reihe BF sind, und die Zahl a, wieviel solcher Reihen über einander stehen, folglich das Product ba die Menge aller Quadrate in dem Rectangel AC.

Andrer Bew. Es sey ein andres Rectangel GL, wo GH=β, HL=α sey. Man verlängere GH, bis GK= AB=b wird, und vollende das Rectangel HM, so ist AC:GM=a:α, und GM:GL=b:β, §. 236, folglich AC:GL=ab:αβ Ar. §. 380. =(a:α)+(b:β), Ar. §. 412.

Setzt man nun AE=AF=1, so ist AC:EF=ab:1.

§. 329. Zus. 1. Nimmt man das Quadrat EF für das Maaß an, mit welchem Flächen gemessen werden sollen, so wird der Flächeninhalt des Rectangels AC durch das Product ab ausgedrückt, wo b die Grundlinie AB, und a die Höhe AD aber in Zahlen ausgedrückt, bedeutet. Denn das Product aus zwey Linien selbst giebt keine Fläche, sondern eine Linie, vergl. §. 249. und Ar. §. 348. Jedoch verhalten sich zwey solche Producte, AB, CD; GH, HL, wie die Rectangel AC, GL.

§. 330. Zuſ. 2. Für das Quadrat AN iſt a = b, folglich ſein Flächeninhalt = a^2.

§. 331. Zuſ. 3. In der Ausübung müſſen die Seiten des Rectangels AG mit den gewöhnlichen Maaßen §. 319. gemeſſen werden, da dann das Product ab, wenn beide Zahlen auf einerley Benennung gebracht ſind, anzeigt, wie viele Quadrate ſolchen Maaßes in dem Rectangel ſtecken. Es heißt aber ein Quadratfuß, der einen Fuß lang und einen Fuß breit iſt. Eben ſo verhält es ſich mit den übrigen größern oder kleinern Maaßen.

§. 332. Zuſ. 4. (Fig. 136.) Wäre ABCD ein Quadratfuß, deſſen Seiten AB, CB, in 10 Zolle getheilt wären, und es giengen durch die Theilpunkte Parallelen mit dieſen Seiten, ſo wäre der Quadratfuß in Quadratzolle eingetheilt. Auf eben die Art enthält eine Quadratruthe 100 Quadratfuß, und ein Quadratzoll 100 Quadratlinien.

Bey der Duodecimaleintheilung wird AB in 12 Theile getheilt, wonach ABCD aus 144 kleinern Quadraten beſteht; daß alſo hier die Quadratruthe 144 Quadratfuße, enthält, der Quadratfuß 144 Quadratzolle u. ſ. w.

§. 333. Anm. 1. Auf die Reduction beider Theilungsarten wird §. 320 auf ähnliche Art angewendet, daß man, wenn die Fuße als gleich angenommen werden, ſetzet 10^2 Zoll des erſten = 12^2 Zoll des zweyten, und 100^2 Linien des erſten = 144^2 Linien des zweyten.

§. 334. Anm. 2. Die verſchiedenen Längenmaaße der Oerter § 321. geben auch einen Unterſchied in ihren Quadratmaaßen. Man nimmt alſo zu ihrer Vergleichung dieſelben Verhältnißzahlen, nur daß man ſie zu dieſem Gebrauche ins Quadrat erhebt. Bey dieſen und ähnlichen Rechnungen laſſen ſich die Logarithmen vortheilhaft gebrauchen.

§. 335. Aufg. Eine jede geradlinige Figur auszurechnen, d. i. ihren Flächeninhalt zu finden.

Auflö-

Auflös. 1. (Fig. 137.) Jedes Parallelogramm ABCD. Man messe die Grundlinie AB=b, und Höhe DE=a, so ist ab sein Inhalt, §. 121. 328.

2. (Fig. 137.) Jeder Triangel ABD. Man messe die Grundlinie AB=b, und Höhe DE=a, so ist $\frac{ab}{2}$, oder $\frac{1}{2}$b, oder $a.\frac{b}{2}$, sein Inhalt, §. 124.

3. (Fig. 138.) Ein Trapez ABCD mit einem Paar paralleler Seiten AB, DC. Man messe AB=b, DC=β, und die Höhe DE=a, so ist $\frac{b+\beta}{2}.a$, oder auch, wenn durch der Seiten BC Mitte F die FG=d geht, da sein Inhalt:

Denn zieht man die Diagonale DB, so ist $\triangle ADB = \frac{ba}{2}$, und $\triangle CDB = \frac{\beta a}{2}$, folglich $ABCD = \frac{ba}{2} + \frac{\beta a}{2} = \frac{b+\beta}{2}a$, (5. Grundf.) $= da$, §. 111.

4. (Fig. 113. 114.) Jede irreguläre Figur ABCDE. Man theile sie in Triangel, rechne einen jeden besonders aus, und bringe alles in eine Summe.

5. (Fig. 92.) Jede reguläre Figur von n Seiten. Man beschreibe in die Figur einen Kreis, dessen Mittelpunkt F, fälle auf die Polygonseite AB den Perpendikel FG, so ist der Inhalt der Figur n. AB. $\frac{FG}{2}$, §. 206.

Da aber die Polygonseite AB=a, des Kreises Halbmesser FA=r, und der Perpendikel FG eine bestimmte

Ver-

Verhältniß gegen einander haben, indem der Perpendikel die Polygonſeite halbirt, ſo wird $FG = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}a^2)}$, folglich obiger Inhalt der Figur $= \frac{n.a}{2}.\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}a^2)}$.

§. 336. Zuſ. 1. Es ſey eines Parallelogramms Inhalt $P = ab$ §. 335, 1. gegeben, ſo iſt $\frac{P}{b} = a$, und $\frac{P}{a} = b$.

§. 337. Zuſ. 2. Iſt eines Triangels Inhalt $T = \frac{ab}{2}$ §. 335, 2. gegeben, ſo iſt $\frac{2T}{b} = a$, und $\frac{2T}{a} = b$.

§. 338. Zuſ. 3. Setzt man den Inhalt eines Parallelogramms $ab = x^2$, ſo iſt $a : x = x : b$, und $x = \pm\sqrt{ab}$, welches man auch durch eine Verzeichnung, geometriſche Conſtruction, auch wenn $\sqrt{ab}$ irrational iſt, ſtets genau findet, §. 265, wo man auch $-x$ erhält, wenn man den Kreis vollendet, und das dort gefundene x nach der entgegengeſetzten Seite verlängert.

Von eben der Art iſt in einem rechtwinklichen Triangel, wenn man die Catheten a, b, und die Hypotenuſe c nennt, $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Denn iſt dieſe Wurzel irrational, wenn z. E. $a = b$, folglich $c = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$ iſt, ſo kann dieſe Größe zwar durch eine Linie, aber durch keine Zahl, genau ausgedrückt werden.

§. 339. Anm. 1. Da ſich alle Figuren in Quadrate verwandeln laſſen, ſo heißt die Ausrechnung ihres Inhalts ihre Quadratur, welcher Ausdruck beſonders vom Kreiſe und andern krummlinigen Flächen gebraucht wird.

§ 340. Anm. 2. Dadurch, daß die Geometrie das Ganze auf einmal darſtellt, oder ſeine Gränzen beſtimmt, leiſtet ſie hier etwas, wozu die Arithmetik unvermögend iſt, weil ſie die Theile des Ganzen nur nach und nach ſucht, die ſie alſo, wenn deren Menge unendlich iſt, nie alle finden kann. Setzt man in

§. 337. a=1, und b nach und nach 2, 3, 5 u. s. w. so lassen sich alle Irrationalzahlen durch Linien genau darstellen.

§. 341. Anm. 3. (Fig. 46.) Der Ausdruck ab giebt den Inhalt eines jeden Parallelogramms von eben der Grundlinie b, und Höhe a. Der Umfang aber eines jeden ist desto größer, je schiefer dasselbe, d. i. je kleiner der Winkel EBC ist, daß also das Rectangel AC den kleinsten Umfang unter allen Parallelogrammen von gleichem Inhalte hat, weil 2(AB+BC) < 2(EB+BC).

Macht man BK=BA, so ist das schiefe Parallelogramm CK mit dem Rectangel AC von einerley Umfange, isoperimetrum, aber der Inhalt von jenem kleiner als von diesem, und jener desto kleiner, je schiefer es ist.

Es sey AB+BC=S, und AB−BC=D, so ist AB=½(S+D) und BC=½(S−D) Ar. §. 171, folglich des Rectangels AC Inhalt=¼(S²−D²) Ar. §. 177. bey einerley S desto größer, je kleiner D, und am größten, wenn D=0, d. i. das Rectangel ein Quadrat ist.

Eben diese Betrachtungen können auch auf Triangel angewendet, und auf Polygone erweitert werden.

§. 342. Aufg. (Fig. 132.) Der Halbmesser eines Kreises EA, und die Seite eines darein beschriebenen regulären Polygons AB, ist gegeben; man soll die Seite AC eines Polygons von doppelt so vielen Seiten finden.

Auflös. Ist EC auf AB in F senkrecht, so ist AF=½AB, und EF=√(AE²−AF²), also auch FC=AE−EF gegeben, da dann AC²=AF²+FC² das Gesuchte giebt.

Es sey AE=r, AB=a, AC=b, so ist FC²=(r − EF)² = r² − 2r. EF + EF², und AF²=¼a², folglich b²=AF²+FC²=¼a²+r²−2r. EF+EF². Nun ist EF²=r²−¼a². Folglich ist b²=2r²−2r. EF=2r²−2r.√(r²−¼a²), folglich

lich $b = \sqrt{2r^2 - 2r \cdot \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}a^2)}}$, oder wenn man $r = 1$ ſetzt, $b = \sqrt{2 - 2\sqrt{(1 - \frac{1}{4}a^2)}}$.

§. 343. Zuſ. 1. Iſt a für ein nſeitiges Polygon, ſo iſt b für ein 2 nſeitiges. Demnach findet man c für ein 4 nſeitiges, wenn man in dem Ausdrucke für b dieſes berechnete b anſtatt a ſetzt. So findet man nun auch d für ein 8 nſeitiges Polygon, wenn man in dem Ausdrucke für b das berechnete c anſtatt a ſetzt, u. ſ. w. ohne Ende.

Z. E. Iſt AB = a, die Seite eines Hexagons, folglich $a = r = 1$, ſo iſt $2\sqrt{(1 - \frac{1}{4})} = 2\sqrt{\frac{3}{4}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, folglich für die 12ſeitige Figur $b = \sqrt{(2 - \sqrt{3})}$. Nun iſt $\sqrt{3} = 1{,}732050807568\ldots$ Folglich iſt $b = \sqrt{(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{0{,}267949192431\ldots} = 0{,}517638\ldots$

Hieraus ergiebt ſich für die 24ſeitige Figur, $c = \sqrt{2 - \sqrt{(1 - \frac{1}{4}b^2)}}$, und hieraus für die 48ſeitige Figur $d = \sqrt{2 - 2\sqrt{(1 - \frac{1}{4}c^2)}}$, und auf eben die Art für die 96, 192, 384, 768 u. ſ. w. ſeitige Figur. Die Seite der letztern, welche die Sehne eines Bogens von 28½ Minuten iſt, findet man = 0,0081812.

§. 344. Zuſ. 2. Durch dieſe immer fortgeſetzte Verdoppelung der Seitenzahl kann man die Sehne ihrem Bogen, folglich den Umring des Polygons der Peripherie des Kreiſes, immer näher, und ſo nahe als man will, bringen, §. 312, folglich die Verhältniſſe des Halbmeſſers zum Umkreiſe ſo nahe als man will beſtimmen, wenn man die gefundene Sehne mit der Zahl der Polygonſeiten multiplicirt.

Z. E. Hat man §. 343. für eine 768ſeitige Figur eine Seite = 0,0081812 gefunden, ſo iſt der Halbmeſſer zum

Umringe des Polygons, also auch zum Umkreise = 1:6,2831... oder der Halbmesser zum halben, folglich der Durchmesser zum ganzen Umkreise = 1:3,1415....

§. 345. Anm. 1. Archimedes, und nach ihm Andere, haben den Umring eines innern und eines äußern Polygons berechnet, und hiedurch zwey Zahlen gefunden, zwischen denen die Peripherie des Kreises gewiß enthalten ist. Archimedes fand auf diesem Wege, für den Durchmesser 1, die beiden Verhältnisse 1:3⅐ (oder 7:22) und 1:3⅒ (oder 71:223). Erstere giebt den Umkreis etwas zu groß, letztere aber etwas zu klein; man hat aber immer die erste unter dem Namen der Archimedischen Verhältniß gebraucht. Viel näher haben Andere nach ihm diese Verhältniß gefunden, und namentlich Ludolph von Ceulen aus Hildesheim 1:3,141592 653589 793238 462643 383279 50288. Diese Zahl, welche bis auf 35 Decimalstellen geht, heißt daher die Ludolphische, und soll im Folgenden immer durch π bezeichnet werden, so daß man in der Ausübung von dieser Zahl soviel Decimalstellen nehmen kann, als man für nöthig erachtet. Durch neuere Kunstgriffe hat man diese Rechnung auf einem viel leichtern Wege wieder vorgenommen, und nicht nur dieselbe Ludolphische Zahl gefunden, sondern sie auch ansehnlich erweitert. Sie wurde nämlich von Sharp auf 74, von Machin auf 100, von Lagny auf 127 Decimalstellen gebracht. Alle diese Zahlen, nebst der Geschichte ihrer Erfindung, findet man in Hrn Hofr. Kästners geometrischen Abhandlungen II. Samml. 40 Abschn. Nach Ebendesselben mathem. Anfangsgründen 1. Theile 1. Abth. 5te Auflage S. 331. ist die Zahl des Lagny noch bis auf 29 Decimalstellen weiter, also bis auf 156, berechnet worden; und soll beym Lagny die 113te Decimalstelle nicht 7 sondern 8 heißen.

§. 346. Anm. 2. Diese Zahlen dienen auch zur Prüfung aller vorgebilchen Cirkelquadraturen. So findet man z. E. die Verhältniß des Metius 113:355 = 1:3,1415929... welche erst bey der 7ten Decimalstelle abweicht.

§. 347.

§. 347. Zus. 3. Hieraus erhält man

$\frac{1}{2}\pi = 1{,}570796\ 326794\ 896619\ 231322$
$\frac{1}{4}\pi = 0{,}785398\ 163397\ 448309\ 615661$
$\frac{1}{6}\pi = 0{,}523598\ 775598\ 298873\ 077107$
$\frac{1}{12}\pi = 0{,}261799\ 387799\ 149436\ 538554$
$\frac{1}{\pi} = 0{,}318309\ 886183\ 790671\ 537768$
$\frac{1}{4\pi} = 0{,}079577\ 471545\ 947667\ 884442$

§. 348. Zus. 4. Für den Durchmesser $= 1$, ist π die Länge von 360 Grad in Decimaltheilen des Durchmessers. Es ist aber gewöhnlich, den Halbmesser $= 1$ zu setzen; alsdann ist π die Länge von 180 Grad in Decimaltheilen des Halbmessers; und giebt mit 180 dividirt die Länge eines Grades, diese aber mit 60 dividirt die Länge einer Minute u. s. w. So hat man für den Halbmesser $= 1$.

1 Grad $= 0{,}017\ 453\ 292\ 519$
1 Min. $= 0{,}000\ 290\ 888\ 208$
1 Sec. $= 0{,}000\ 004\ 848\ 136$

§. 349. Aufg. Der Durchmesser eines Kreises, d oder 2r, ist gegeben; man soll seinen Umfang P, und seinen Inhalt K finden.

Aufl. 1. Da $1 : \pi = d : P$ §. 306; so ist $P = d\pi = 2r\pi$.

2. Hierdurch erhält man nach 302.

$K = P.\frac{d}{4} = d\pi.\frac{d}{4} = \frac{d^2\pi}{4}$, oder

$K = 2r\pi.\frac{2r}{4} = r^2\pi$.

§. 350. Zus. 1. Aus $P = d\pi$, folgt $\frac{P}{\pi} = d$. Zu E.

Setzt man den Umkreis der Erde 5400 Meilen, so ist ihr Durchmesser $d = \frac{5400}{3,14159} = 1718,87$ oder nach §. 374. $d = 5400 . 0,318309 = 1718,86$.

§. 351. Zus. 2. Aus $K = \frac{d^2\pi}{4}$ folgt $\frac{4K}{\pi} = d^2$, folglich $\sqrt{4K \frac{1}{\pi}} = d$.

§. 352. Zus. 3. (Fig. 132.) Es sey gegeben des Kreises Halbmesser r, und der Winkel AEB = x; man sucht des Bogens ACB Länge a.

Da $r\pi$ der halbe Umkreis, so ist $180° : x = r\pi : a$, folglich $a = r\pi . \frac{x}{180}$, vergl. §. 348.

§. 353. Zus. 4. (Fig. 132.) Da $\frac{1}{2}r^2\pi$ die halbe Kreisfläche, so ist, wenn für den Winkel x die Fläche des Ausschnitts k heißt, $180° : x = \frac{1}{2}r^2\pi : k$, folglich $k = \frac{1}{2}r^2 . \frac{\pi . k}{180°}$, wo $\frac{\pi k}{180°} . r$ die Länge des Bogens ACB ist.

§. 354. Zus. 5. (Fig. 132.) Wüßte man immer die Sehne AB aus dem Winkel x, oder den Winkel aus der Sehne zu finden, so könnte man den $\triangle ABE$, dessen Höhe $EF = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}AB^2)}$ ist, berechnen, und dieß von dem Ausschnitte §. 353. abziehen, da dann der Inhalt des Abschnitts ABC übrig bliebe. Aber dies muß der Trigonometrie vorbehalten bleiben, durch deren Hülfe auch vieles andre sich mit größerm Vortheile berechnen läßt.

§. 355. Zus. 6. Setzt man den Inhalt irgend einer geradlinigen Figur $F = r^2\pi$, so folgt daraus $F . \frac{1}{\pi} = r^2$, folglich $\sqrt{F . \frac{1}{\pi}} = r$.

§. 356.

§. 356. Zuſ. 7. Die Summe zweyer Kreiſe, deren Halbmeſſer r, ϱ iſt $= r^2\pi + \varrho^2\pi = \pi (r^2 + \varrho^2)$. Sind dieſe Kreiſe concentriſch: ſo iſt der Ring zwiſchen beyder Umkreiſen $= r^2\pi - \varrho^2\pi = \pi (r^2 - \varrho^2)$. Durch Hülfe des Pythagoriſchen Lehrſatzes findet man den Halbmeſſer eines Kreiſes, der jener Summe, oder dieſem Ringe gleich iſt.

§. 357. Zuſ. 8. (Fig. 139.) Es ſey △ACB rechtwinklich und gleichſchenklich, und zwiſchen ſeinen Schenkeln der Quadrant ADB, über ſeiner Hypotenuſe aber der halbe Kreis AFB beſchrieben. Nimmt man vom letztern den Abſchnitt ADBA hinweg: ſo bleibt die Figur ADBFA, welche unter dem Namen lunula Hippocratis bekannt, und dem △ACB gleich iſt.

Denn für den Quadranten ſey AC = CB = r: ſo iſt $AB^2 = 2r^2$, folglich der halbe Kreis $= \frac{r^2\pi}{4}$. Nun iſt der Quadrant auch $= \frac{r^2\pi}{4}$. Folglich ſind beyder Flächen gleich; und es muß, wenn man von beyden den Abſchnitt wegnimmt, gleiches übrig bleiben.

§. 358. Anm. Iſt der Umfang eines Quadrats, eines Kreiſes Umfange P gleich, folglich ſeine Seite $= \frac{1}{4}P$: ſo verhält ſich ſeine Fläche zur Kreisfläche, wie $\frac{1}{16}P^2 : \frac{1}{4}Pd$, oder wie $\frac{1}{4}P : d$. Folglich iſt dieſe größer als jene. Vergl. §. 341.

10. Von der Auflöſung geometriſcher Aufgaben.

§. 359. Aufg. (Fig. 140.) Ueber jeder geraden Linie AB, einen rechtwinklichen Triangel zu beſchreiben, daß der rechte Winkel der gegebenen Linie gegen über ſtehe, und der Triangel einem gegebenen Quadrate Q gleich ſey.

1. Geometrische Auflös. Ueber AB beschreibe man einen halben Kreis, so giebt jeder Punkt im Umkreise die Spitze des rechten Winkels, §. 181. Nennt man nun des Triangels Höhe x, die Grundlinie AB=b, und die Seite des Quadrats a, so soll $\frac{bx}{2}=a^2$ seyn. Hieraus folgt $\frac{b}{2}:a=a:x$, wodurch man x findet, §. 250. Zieht man in diesem Abstande x, die CD der AB parallel, so sind alle Triangel auf AB zwischen diesen Parallelen=Q, aber darunter nur die beiden Triangel ACB und ABD rechtwinklich.

Anmerk. Wäre ein größeres Quadrat gegeben, so würde x auch größer, und einmal dem Halbmesser gleich, wodurch die Punkte C und D immer näher zusammenrücken, und zuletzt in E zusammentreffen müßten, daß blos △AEB dem Quadrate gleich, und rechtwinklich wäre. Wäre das gegebene Quadrat so groß, daß x größer als der Halbmesser würde, so wäre die Aufgabe unmöglich.

2. Algebraische Auflös. Nennt man die Seite des Quadrats a, die Hypotenuse b, und die beiden Catheten x, y, so erhält man $\frac{xy}{2}=a^2$, folglich $2xy=4a^2$, und nach dem Pythagorischen Lehrsatze $x^2+y^2=b^2$. Nun giebt (vergl. Alg. §. 23.) die Summe beider Gleichungen $x^2+2xy+y^2=b^2+4a^2$, oder $x+y=\sqrt{(b^2+4a^2)}$, und die Differenz $x^2-2xy+y^2=b^2-4a^2$, oder $x-y=\sqrt{(b^2-4a^2)}$. Demnach ist $x=\frac{\sqrt{(b^2+4a^2)}+\sqrt{(b^2-4a^2)}}{2}$ und $y=\frac{\sqrt{(b^2+4a^2)}-\sqrt{(b^2-4a^2)}}{2}$ Ar. §. 171.

Verzeichnung. Will man das gefundene x und y nicht berechnen, sondern geometrisch durch Verzeichnung fin-

finden, ſo ſuche man $r(b^2+4a^2)$ nach §. 132, und $r(b^2-4a^2)$ nach §. 133, woraus ſich die Linien x und y leicht beſtimmen laſſen. Nun hat man auch b, und kann den verlangten Triangel verzeichnen, §. 77.

§. 360. Anm. Dies iſt ein Beyſpiel der analytiſchen Auflöſung einer Aufgabe, da in dem bisherigen Vortrage der Geometrie die Auflöſungen ſynthetiſch waren; und zwar iſt die erſte Auflöſung nach Art der alten Analyſis, durch bloße Betrachtung der Figur, die zweyte, nach Art der neuern Analyſis, ohne Figur blos durch algebraiſche Gleichungen bewerkſtelligt. Erſtere Art muß man aus den Schriften der Alten näher kennen lernen; von letzterer Art ſollen durch die nächſtfolgenden Aufgaben noch einige Beyſpiele gegeben werden.

§. 361. Zuſ. 1. Wäre die Frage geweſen, entweder blos einen rechtwinklichen Triangel, oder blos einen dem Quadrate gleichen Triangel zu finden, ſo wäre die Aufgabe unbeſtimmt, problema indeterminatum, geweſen, die nicht eine oder etliche Auflöſungen von beſtimmter Anzahl, ſondern unzählig viele zuläßt. Denn alle Triangel auf AB, deren Spitze in dem Umkreiſe, ſind rechtwinklich, und alle Triangel auf AB, deren Spitze in der Parallelen CD, ſind dem Quadrate Q gleich. Eine ſolche Linie wie der Umkreis, oder die CD, welche der vorgelegten Frage ein Genüge leiſtet, heißt ein geometriſcher Ort, locus geometricus.

§. 362. Zuſ. 2. Durch die Verbindung der Bedingungen, daß der Triangel auf AB rechtwinklich und dem Quadrate Q gleich ſeyn ſolle, wird die Aufgabe beſtimmt, problema determinatum, weil ſie blos eine oder höchſtens zwey Auflöſungen verſtattet. Auch gaben die geforderten Bedingungen zwey Gleichungen, ſo viel nämlich unbekannte Größen waren, und führten alſo auf eine beſtimmte Gleichung.

§. 363. Zuſ. 3. Da die gegebenen Größen durch

gerade Linien ausgedrückt werden konnten, so ließen sich auch durch Zeichnung Linien finden, welche die Wurzeln der bestimmten Gleichung darstellten. Dieß heißt die Verzeichnung der Gleichung, constructio geometrica, und geschiehet, so weit wir es hier gebrauchen, vornämlich mittelst der Proportionen und des Pythagorischen Lehrsatzes, wie die folgenden Beyspiele weiter lehren werden.

§. 364. Aufg. (Fig. 141.) Alle drey Seiten eines Triangels ABC sind gegeben, und es fällt ein Perpendikel AD von der Spitze auf die Grundlinie; man soll die Abschnitte BD, DC, finden.

Auflös. Man setze BC=a, CA=b, AB=c, desgleichen CD=x, folglich DB=a−x.

Da $AD^2=AB^2-BD^2=AC^2-DC^2$, d. i. $c^2-x^2=b^2-(a-x)^2=b^2+a^2-2ax+x^2$: so ist $2ax=a^2+b^2-c^2$, folglich $x=\frac{1}{2}a+\frac{b^2-c^2}{2a}=\frac{1}{2}a+\frac{(b+c)(b-c)}{2a}$.

Anmerk. Die Figur ist so, daß AB<AC. Wäre AB>AC d. i. b>c: so würde b−c negativ, folglich $x=\frac{1}{2}a-\frac{(b+c)(b-c)}{2a}$. Wäre AB=AC, d. i. b=c: so würde b−c=0, folglich $x=\frac{1}{2}a$.

Verzeichn. Man suche zu 2a, b+c, und b−c die vierte Proportionallinie f, §. 249: so hat man $x=\frac{1}{2}a+f$.

§. 365. Anm. Die Verzeichnung ergiebt sich hier, so wie in vielen andern Fällen, auch unmittelbar aus der Aufgabe selbst. Denn macht man aus den gegebenen Seiten den Triangel §. 77, und fället von der Spitze den Perpendikel; so hat man die Abschnitte.

In dergleichen Fällen haben die algebraischen Formeln wenigstens den Nutzen, daß sie die Methode zeigen, das Gesuchte zu berechnen. Z. E. a=20°, b=14°, c=9°, folglich $x=10+\frac{23.5}{40}=12,875°$.

§. 366.

§. 366. Aufg. (Fig. 141.) Eines rechtwinklichen Triangels BAC Umfang p, und Höhe a, oder Inhalt, ist gegeben; man soll die Hypotenuse BC finden.

Auflös. I. Setzt man BC = x, so ist CA + AB = p — x. Nun setze man CA — AB = y, so ist CA = p — (x+y) und AB = p — x — y, (Ar. §. 171.)

Nun ist $BC^2 = AC^2 + AB^2$, d. i. $x^2 = \frac{p^2 - 2px - 2py + x^2 + 2xy + y^2}{4} + \frac{p^2 - 2px + 2py + x^2 - 2xy + y^2}{4} = \frac{2p^2 - 4px + 2x^2 + 2y^2}{4} = \frac{p^2 - 2px + x^2 + y^2}{2}$, folglich $2x^2 = p^2 - 2px + x^2 + y^2$, d. i. $x^2 = p^2 - 2px + y^2$.

Nun ist BC:BA = AC:AD, §. 264, d. i. $x : \frac{a - x - y}{2} = \frac{a - x + y}{2} : a$, folglich $ax = \frac{p^2 - 2px + x^2 - y^2}{4}$, oder $4ax = p^2 - 2px + x^2 - y^2$, folglich $y^2 = p^2 - 2px + x^2 - 4ax$.

Setzt man diesen Werth von y^2 in obige Gleichung für x^2, so erhält man $x^2 = 2p^2 - 4px + x^2 - 4ax$, oder $0 = p^2 - 2px - 2ax$, folglich $(2p + 2a)x = p^2$, folglich $x = \frac{p^2}{2p + 2a} = \frac{\frac{1}{2}p \cdot p}{p + a}$.

Verzeichn. Man suche zu p+a, p, und ½p, die vierte Proportionallinie, §. 249, so hat man BC, über die man einen halben Kreis beschreibt, wodurch nebst der gegebenen Höhe der verlangte Triangel verzeichnet werden kann.

II. Man suche BC = x, und BA = y, so ist AC = p — x — y.

Nun

Nun ist $BC^2 = AC^2 + AB^2$, d. i. $x^2 = p^2 - 2px + x^2 - 2py + 2xy + y^2 + y^2$, oder $o = p^2 - 2px - 2py + 2xy + 2y^2$.

Nun ist des Triangels Inhalt $= \frac{1}{2}BA, AC$, d. i. $t = \frac{1}{2}y(p - x - y)$ oder $4t = 2y(p - x - y) = 2py - 2xy - 2y^2$. Addirt man hiezu obige auf Null gebrachte Gleichung, so erhält man $4t = p^2 - 2px$, folglich $2px = p^2 - 4t$, also $x = \frac{p^2 - 4t}{2p} = \frac{1}{2}p - \frac{2t}{p}$.

Verzeichn. Man suche zu p, 1, und 2t die vierte Proportionallinie §. 249, so giebt diese von $\frac{1}{2}p$ weggenommen die Hypotenuse BC; das Uebrige ist wie §. 359, wenn man $Q = t$ macht, §. 338.

§. 367. Aufg. Die Seite eines regulären Polygons ist gegeben; man soll die Seite eines andern finden, das nur halb so viele Seiten hat.

Auflös. Aus a, der Seite eines nseitigen Polygons, findet man b, die Seite eines 2nseitigen nach §. 342, daß $b^2 = 2r^2 - 2r.\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}a^2)}$ ist, folglich $2r.\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}a^2)} = 2r^2 - b^2$. Nun quadrire man auf beiden Seiten, so erhält man $4r^2(r^2 - \frac{1}{4}a^2)$, d. i. $4r^4 - r^2a^2 = 4r^4 - 4r^2b^2 + b^4$, oder $r^2a^2 = 4r^2b^2 - b^4 = b^2(4r^2 - b^2)$ folglich $a = b.\frac{\sqrt{(4r^2 - b^2)}}{r}$.

§. 368. Aufg. (Fig. 142.) Die Verhältniß des Kreishalbmessers CA zur Seite eines gleichseitigen Triangels ABD zu finden.

Auflös. Es sey CF auf AB senkrecht, so ist $AE = \frac{1}{2}AB$, und $AF = AC = CF$, §. 198, folglich $FE = EC = \frac{1}{2}AF$, §. 68. Auch sey $CA = r$, und $AB = x$.

Nun ist $AE^2 = AF^2 - FE^2$, d. i. $\frac{1}{4}x^2 = r^2 - \frac{1}{4}r^2 = \frac{3}{4}r^2$, oder $x^2 = 3r^2$, folglich $x = r.\sqrt{3} = r.\ 1{,}732\,0508$.

§. 369.

§. 369. Zuſ. Setzt man in der Gleichung für a, §. 367. des Hexagons Seite r anſtatt b, ſo iſt des gleichſeitigen Triangels Seite $a = \sqrt{(4r^2 - r^2)} = \sqrt{3r^2} = r\sqrt{3}$, wie §. 368. Man kann aber auch die Seitenzahl verdoppeln, und hat alſo die 8, 6, 12, 24 u. ſ. w. ſeitigen Figuren, und kann ſie in den Kreis beſchreiben.

§. 370. Aufg. Die Verhältniß des Kreishalbmeſſers r zur Seite einer regulären achtſeitigen Figur zu finden.

Auflöſ. Für die Seite des Quadrats hat man $a = r\sqrt{2}$ §. 338. Hieraus iſt, nach §. 367, $b^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{2}r^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}r^2} = r\sqrt{\frac{1}{2}}$ iſt. Demnach iſt $b^2 = 2r^2 - 2r^2\sqrt{\frac{1}{2}} = 2r^2 \cdot (1 - \sqrt{\frac{1}{2}})$.

§. 371. Zuſ. Hieraus hat man alſo die 4, 8, 16 ꝛc. ſeitigen Figuren, und kann ſie in den Kreis beſchreiben.

§. 372. Aufg. (Fig. 143.) Die Verhältniß des Kreishalbmeſſers CA = r zur Seite AB = x einer regulären zehnſeitigen Figur zu finden.

Auflöſ. Hier iſt $ACB = \frac{4R}{10} = \frac{2R}{5}$, folglich $ABC = R - \frac{1}{5}R = \frac{4R}{5}$ §. 317. $= 2ACB$.

Verlängert man nun AB, bis BD = BC, und zieht CD, ſo iſt $ABC = 2BDC$ §. 62, folglich $BDC = BCD = ACB$. Nun iſt auch $A = A$, folglich iſt $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, und $AC : AB = AD : AC$ §. 257, d. i. $r : x = r + x : r$, folglich $rx + x^2 = r^2$, oder $x^2 + rx - r^2 = 0$, folglich $x = -\frac{1}{2}r \pm \sqrt{(r^2 + \frac{1}{4}r^2)}$ Alg. §. 43, folglich (da man nur das obere Zeichen gebraucht, weil das untere etwas Verneintes giebt, welches man hier nicht ſucht) $x = \sqrt{\frac{5}{4}r^2} - \frac{1}{2}r = r \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Ver-

Verzeichn. Man ſetze $EG=r$ auf $EF=\frac{1}{2}r$ ſenkrecht, ſo iſt $FG=r\frac{1}{4}r^2$, §. 130. Nun beſchreibe man mit FG den Bogen GH, ſo iſt $EH=FH-FE=x$.

§. 373. Zuſ. 1. Setzt man in der Gleichung für a, §. 369, des Decagons Seite, oder das hier gefundene x, anſtatt b, ſo findet man für des Pentagons Seite $a^2=x^2.\frac{4r^2-x^2}{r^2}$, oder $r^2a^2=x^2(4r^2-x^2)$

Nun iſt $x=r.\frac{r5-1}{2}$, und $(r5-1)^2=6-2r5$, alſo $x^2=r^2.\frac{6-2r5}{4}=r^2.\frac{3-r5}{2}$, folglich $4r^2-x^2=4r^2-r^2.\frac{3-r5}{2}=r^2.\frac{8-3+r5}{2}=r^2.\frac{5+r5}{2}$, folglich $x^2(4r^2-x^2=r^2.\frac{3-r5}{2}.r^2.\frac{5+r5}{2}=r^4.\frac{10-2r5}{4}=r^4.\frac{5-r5}{2}$

Demnach iſt $r^2a^2=r^4.\frac{5-r5}{2}$, folglich $a^2=r^2.\frac{5-r5}{2}$ folglich $a=r.r\frac{5-r5}{2}$

§. 374. Zuſ. 2. Demnach iſt auch $a^2-r^2=r^2.\frac{5-r5}{2}-r^2=r^2\left(\frac{5-r5}{2}-1\right)=r^2.\frac{3-r5}{2}=x^2$, folglich $a^2=x^2+r^2$. Zieht man daher HG, ſo iſt dieſe die Seite des Pentagons, weil $EG=r$, und $EH=x$ iſt, §. 372.

§. 375. Zuſ. 3. Hieraus hat man alſo die 5, 10, 20ꝛc. ſeitigen Figuren, und kann ſie in den Kreis beſchreiben.

Zwey-

Zweyter Theil.

Die Stereometrie.

1. Von der Lage der Ebenen.

§. 376. Erkl. (Fig. 144.) Eine gerade Linie AB ist auf einer Ebene MN senkrecht, plano recta, wenn sie auf allen geraden Linien in der Ebene, die durch den von ihr getroffenen Ort C gehen, senkrecht ist.

§. 277. Erkl. (Fig. 145.) Zwey Ebenen AC, MN, sind auf einander senkrecht, wenn alle Linien, wie DE, FG, die in der einen Ebene AC auf den Durchschnitt AB senkrecht stehen, auch auf der andern MN senkrecht sind.

§. 378. Erkl. (Fig. 146.) Die Neigung einer geraden Linie AB gegen eine Ebene MN, ist der spitze Winkel ABC, den sie mit der geraden Linie BC macht, die von dem Orte B, wo sie die Ebene trifft, nach dem Orte C geht, wo der von irgend einem ihrer Punkte A auf die Ebene gefällte Perpendikel AC die Ebene trifft.

§. 379. Erkl. (Fig. 147.) Die Neigung zweyer Ebenen AC, MN, gegen einander ist der spitze Winkel EDF, dessen Schenkel, jeder in einer der beiden Ebenen,

nen, durch einen willkührlichen Punkt D des Durchschnitts AB, auf dieſen Durchmeſſer ſenkrecht ſind.

§. 380. Erkl. Zwey gerade Linien haben gegen eine Ebene, ſo wie auch zwey Ebenen gegen eine dritte, ähnliche Neigungen, wenn vorherbeſchriebene Neigungswinkel §. 378. 379. gleich ſind.

§. 381. Erkl. Eine gerade Linie iſt mit einer Ebene, desgleichen eine Ebene mit einer andern, parallel, wenn beide nach allen Seiten ohne Ende verlängert, (erweitert) nirgends zuſammentreffen.

§. 382. Lehrſ. (Fig. 148.) Eine gerade Linie, von welcher ein Stück in einer Ebene MN iſt, liegt ganz in dieſer Ebene.

Bew. Geſetzt, es wäre von einer geraden Linie das eine Stück AB in, das andere BC außer der Ebene. Man verlängere AB in der Ebene nach D, §. 6, und drehe die Ebene um die gerade Linie AD, bis ſie den Punkt C trifft, ſo iſt auch BC in der Ebene, §. 10, in welcher alſo zwey gerade Linien ABD, ABC, den Abſchnitt AB gemein hätten, gegen §. 53.

§. 383. Zuſ. (Fig. 144.) Eine gerade Linie AB ſchneidet eine Ebene MN nur in einem Punkte C, weil die Linie ſonſt ganz in der Ebene läge, §. 382, und ſie alſo nicht ſchneiden könnte.

§. 384. Lehrſ. (Fig. 149.) Zwey gerade Linien AB, CD, die einander ſchneiden, desgleichen drey gerade Linien BD, DE, EB, von denen jedes Paar zuſammentrifft, ſind in einerley Ebene.

Bew. Eine Ebene durch die Linie EB drehe ſich um dieſelbe, bis ſie den Punkt D trifft, da dann auch DE und

DB

DB, §. 10, folglich auch AB und CD, §. 382, in dieſer Ebene ſind.

§. 385. Lehrſ. (Fig. 150.) Wenn zwey Ebenen AB, CD, einander ſchneiden, ſo iſt ihr gemeinſchaftlicher Durchſchnitt FE eine gerade Linie.

Bew. Wäre dies nicht, ſo gehe von F nach E eine gerade Linie FGE in CD, und FHE in AB. Beide haben einerley Endpunkte, und ſchließen alſo offenbar einen Raum ein, können folglich nicht gerade ſeyn, §. 9.

§. 386. Zuſ. Drey Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, beſtimmen die Lage einer Ebene. Oder: durch ſolche 3 Punkte läßt ſich nur eine Ebene legen.

Denn zieht man in der Ebene AB eine gerade Linie EF, und legt durch EF eine andre Ebene CD, ſo iſt dieſe von jener nur ſo lange noch unterſchieden, als ſie mit ihr nur EF gemein hat. Drehet man aber CD um EF, bis ſie einen Punkt H in der Ebene AB trifft, ſo fallen beide Ebenen zuſammen, und haben keine verſchiedenen Lagen, ſondern machen nur eine Ebene aus.

§. 387. Lehrſ. (Fig. 151.) Sind zwey gerade Linien AB, CD in einer Ebene MN, und man nimmt in jeder einen willkührlichen Punkt E und F, ſo iſt eine gerade Linie zwiſchen dieſen beiden Punkten in eben der Ebene MN.

Bew. Wäre gedachte gerade Linie über der Ebene, etwa EFG, und man legt durch ſie eine Ebene, welche die MN in der geraden Linie EF ſchneidet, §. 385, ſo würden beide einen Raum einſchließen, welches unmöglich iſt, §. 9. Folglich kann erſtgedachte gerade Linie nicht außer der Ebene MN ſeyn, ſondern iſt in derſelben.

§. 388. Zuſ. Obiger Satz gilt demnach von jeden zwey Parallellinien, als welche allemal in einer Ebene ſind, §. 84.

§. 389. Lehrſ. (Fig. 152.) Eine gerade Linie AB iſt auf einer Ebene MN ſenkrecht, wenn ſie auf zweyen geraden Linien in der Ebene, CD, EF, die durch den von ihr getroffenen Punkt B gehen, ſenkrecht iſt.

Conſtruction. Man mache BC=BD, und BE=BF. Durch B gehe in der Ebene willkührlich eine dritte Linie GH, welche von CE, DF, in G und H geſchnitten werde. Von einem willkührlichen Punkte A der Linie BA ziehe man gerade Linien herab nach den 6 Punkten C, G, E, D, H, F, in der Ebene MN.

Nun wäre alſo wegen §. 376. zu erweiſen, daß AB auf GH, d. i. auf jeder dritten Linie durch B ſenkrecht ſey, d. i. wegen §. 14, daß ABG=ABH ſey, d. i. wegen §. 48, daß BG=BH, und AG=AH ſey.

Bew. 1) Daß BG=BH. In den Triangeln CBE, DBF, ſind bey B Scheitelwinkel, und die Schenkel gleich gemacht, folglich CE=DF, und ECB=BDF, §. 41.

In den Triangeln GCB, BDH, ſind alſo die genannten Winkel gleich, und bey B Scheitelwinkel, auch iſt BC =BD. Folglich iſt CG=DH, und BG=BH, §. 82.

2) Daß AG=AH. Da AB ſenkrecht auf CD, EF iſt, ſo ſind in den Triangeln ABC, ABD, und in ABE, ABF, bey B rechte Winkel, AB gemein, auch BC=BD, und BE=BF. Folglich iſt AC=AD, und AE=AF, §. 41. Nun iſt oben erwieſen CE=DF, folglich iſt ACE =ADF, §. 48. Nun iſt erwieſen CG=DH, und AC =AD. Folglich iſt AG=AH, §. 41.

Concluſion. Da BG=BH, AG=AH, und AB ge-

gemein, so ist ABG=ABH, §. 48, folglich AB auf jeder dritten Linie GH, d. i. auf allen Linien in der Ebene durch B senkrecht, folglich auch auf der Ebene §. 376.

§. 390. Lehrs. (Fig. 153.) Drey in einen Punkt A zusammenlaufende gerade Linien AB, AC, AD, auf denen eine vierte AE in obgedachtem Punkte A senkrecht ist, liegen in einerley Ebene.

Beweis. Eine Ebene MN sey durch zwey dieser Linien AB, AC, gelegt, §. 384. Gesetzt nun die dritte AD wäre über dieser Ebene. Man lege durch AE, AD eine Ebene §. 384, welche die MN in AF schneide §. 385, so wäre EA auf AF senkrecht, §. 389, folglich EAF=R=EAD, welches unmöglich ist. (3. Grundſ.)

§. 391. Lehrs. (Fig. 154.) Sind zwey gerade Linien AB, CD, auf einer Ebene MN senkrecht, so sind sie parallel. Und ist von zwey Parallelen AB, CD die eine AB auf der Ebene MN senkrecht, so ist es auch die andre CD.

Beweis. I. AB, CD, sind auf MN senkrecht. Man ziehe in der Ebene die Linie BD, und auf sie DE senkrecht, mache DE=AB, und ziehe BE, AD, AE.

Da ABD=R, §. 376=EDB, BD=BD, und AB =DE, so ist AD=BE, §. 41. Nun ist auch AE=AE, und DE=AB, folglich ist ADE=ABE, §. 48=R, §. 376. Nun sind auch CDE, CDB rechte Winkel, §. 376, folglich ist CD mit DA, DB in einer Ebene, §. 390, folglich auch mit AB, §. 384. Nun ist ABD+CDB=2R, §. 376, folglich sind AB, CD parallel, §. 86.

II. AB ist auf MN senkrecht, und mit CD parallel. Da AB, CD, parallel, so sind sie nebst DA, DB, in einer Ebene, §. 388, auch ist ABD+CDB=2R, §. 95. Nun ist ABD=R, §. 376, folglich ist auch CDB=R.

Nach voriger Construction ist ED auf DB, DA, senkrecht, folglich auch auf DC, §. 389, V. 1) CDE = R. Nun ist erwiesen CDB = R, folglich ist CD auf MN senkrecht, §. 389.

§. 392. Lehrs. (Fig. 155.) Sind zwey gerade Linien AB, CD, mit einer dritten EF parallel, wenn gleich diese drey nicht in einerley Ebene liegen, so sind sie selbst parallel.

Bew. In einem willkührlichen Punkte G der Linie EF sey auf sie GH, GK, senkrecht errichtet, jene in der Ebene ABFE, diese in CDFE, so ist EF auf der Ebene HGK senkrecht, §. 389. folglich auch ihre Parallelen AB, CD, §. 391. II. folglich diese parallel, §. 391. I.

§. 393. Lehrs. (Fig. 155.) Zwey Winkel in verschiednen Ebenen, BFD, HGK, sind gleich, wenn die Schenkel FB, GH, und FD, GK, die nach einerley Seite der ihre Scheitel verbindenden Linie FG liegen, parallel sind.

Bew. Man mache FB = GH, FD = GK, und ziehe BH, DK, BD, HK.

Da FB, GH, parallel und gleich, so sind auch BH, FG parallel und gleich, §. 110. Eben so beweist man dasselbe von DK, FG. Folglich sind BH, DK parallel und gleich, §. 110, folglich auch BD, HK. Demnach ist BFD = HGK, §. 48.

§. 394. Aufg. (Fig. 156.) Auf eine gegebene Ebene MN durch einen gegebenen Punkt einen Perpendikel zu ziehen.

Aufl. I. Wenn der gegebene Punkt A über der Ebene ist. Man ziehe in der Ebene eine beliebige Linie BC, und auf diese in der Ebene durch A, B, C die AD senkrecht §. 52. Ist diese auch auf der Ebene senkrecht, so ist das Verlangte geschehen.

Ist

Iſt ſie es aber nicht, ſo mache man auf BC die DE, und auf DE die AF ſenkrecht. Letztere iſt der verlangte Perpendikel.

Bew. Durch F ſey KL mit BC parallel. Da nach der Conſtruction CD auf DA und DF, folglich auf der Ebene ADF ſenkrecht iſt, §. 389, ſo iſt es auch ihre Parallele LF, §. 391, folglich AFL=R §. 376. Nun iſt auch AFD=R nach der Conſtruction. Folglich iſt AF auf der Ebene MN ſenkrecht, §. 389.

II. Wenn der gegebene Punkt G in der Ebene iſt. Von einem willkührlichen Punkte über der Ebene falle nach (I) ein Perpendikel. Trifft dieſer den Punkt G, ſo iſt das Verlangte geſchehen; trifft er ihn aber nicht, wie AF, ſo ziehe man in der Ebene durch A, F, G mit AF die GH parallel. Letztere iſt der verlangte Perpendikel.

Bew. Da AF auf MN ſenkrecht, ſo iſt es auch ihre Parallele GH, §. 391.

§. 395. Zuſ. Der Durchſchnitt BC zweyer Ebenen ABC, MN, iſt auf der Ebene ihres Neigungswinkels ADF ſenkrecht.

§. 396. Lehrſ. (Fig. 156.) Durch einerley Punkt A oder G gehen nicht zwey Perpendikel auf die Ebene MN.

Bew. 1) Wären AF, AD, auf MN ſenkrecht, und man zieht DF, ſo wären im △AFD zwey rechte Winkel, §. 376, gegen §. 63.

2) Wären GH, GQ, auf MN ſenkrecht, und man verlängert die Ebene HGQ, ſo ſchneidet ſie die Ebene MN in GR, da dann QGR=R=HGR wäre, gegen (3. Grundſ.)

§. 397. Zuſ. 1. Der Perpendikel AF iſt die kürzeſte Linie vom Punkte A auf die Ebene MN, §. 71, und heißt daher der Abſtand des Punktes von der Ebene.

§. 398. Zuſ. 2. Iſt AF auf der Ebene MN, und AD

auf einer Linie BC in der Ebene senkrecht, so ist auch DF auf BC senkrecht.

Denn wäre auf BC nicht die DF, sondern irgend eine andere, etwa DL, senkrecht, so sey AL auf DL senkrecht, folglich auch auf MN, §. 394, zugleich mit AF, gegen §. 396.

§. 399. Zus. 3. Ist AF auf der Ebene MN, und FD auf einer Linie BC in der Ebene senkrecht, so ist auch AD auf BC senkrecht.

Denn wäre auf BC nicht die AD, sondern irgend eine andre, etwa AC, senkrecht, so sey CL auf CB senkrecht, und daher mit DF parallel, da dann ein Perpendikel von A auf CL auf die Ebene MN, zugleich mit AF, senkrecht ist, gegen §. 396.

§. 400. Lehrs. (Fig. 157. 158) Wenn zwey Ebenen einander schneiden, so kann eine gerade Linie nicht auf beiden zugleich senkrecht seyn. Daher sind zwey Ebenen parallel, wenn eine gerade Linie auf beiden senkrecht ist.

Bew. I. (Fig. 157.) Die beiden Ebenen AC, AD, schneiden einander in AB. Wäre nun EF auf beiden zugleich senkrecht, und man zieht von einem willkührlichen Punkte G der Durchschnittslinie die GE, GF, so wären im △GEF zwey rechte Winkel, §. 376, welches unmöglich ist. §. 63.

II. (Fig. 158.) Auf die beiden Ebenen AC, DF, sey BG senkrecht, da dann die beiden Ebenen einander nicht schneiden können, nach (I) folglich parallel sind.

§. 401. Zus. 2. (Fig. 157) Eine gerade Linie kann nicht in einem Punkte G auf zwey Ebenen AC, AD zugleich senkrecht seyn.

Denn wäre ein solcher Perpendikel durch G möglich,

so

ſo ziehe man mit ihm die FE parallel, welche daher auf den beiden Ebenen AC, AD, zugleich ſenkrecht wäre, §. 391, gegen §. 400.

§. 402. Lehrſ. (Fig. 158.) Sind die Schenkel zweyer Winkel in verſchiednen Ebenen ABC, DEF, parallel, ſo ſind die Ebenen parallel.

Bew. Von B falle der Perpendikel BG auf die Ebene des Winkels DEF, und man ziehe durch G die GH, GK mit DE, DF, parallel, ſo ſind ſolche auch mit BA, BC, parallel, §. 392, da dann BG, die auf GH, GK, ſenkrecht iſt, §. 376, auch auf BA, BC, §. 86, folglich auf der Ebene durch ABC, §. 389, ſenkrecht iſt. Nun war ſie auch auf der Ebene durch DEF ſenkrecht, folglich ſind beide Ebenen parallel, §. 400.

§. 403. Zuſ. 1. Durch B eine Ebene mit einer gegebenen DEF parallel zu legen, falle von B ein Perpendikel BG auf die Ebene DEF, in welcher man beliebig GH, GK, und mit dieſen parallel die BA, BC, zieht, da dann die Ebene durch ABC der DEF parallel iſt, §. 402.

§. 404. Zuſ. 2. Durch einen Punkt B geht nur eine Ebene ABC mit DEF parallel, §. 401.

§. 405. Zuſ. 3. Eine Linie BG, die auf einer von zwey parallelen Ebenen ABC, DEF, ſenkrecht ſteht, iſt auch ſenkrecht auf der andern.

§. 406. Lehrſ. (Fig. 159.) Werden zwey parallele Ebenen AB, CD, von einer dritten EF geſchnitten, ſo ſind die Durchſchnittslinien EG, FH, parallel.

Bew. Denn wären ſie es nicht, ſondern ſtießen in irgend einem gemeinſchaftlichen Punkte zuſammen, ſo wäre dieſer Punkt in EG und HF, folglich in den Ebenen AB

und CD, §. 382, welche also zusammentrafen, und daher nicht parallel wären, gegen das Angenommene.

§ 407. Zus. (Fig. 160.) Drey parallele Ebenen, HK, LM, NO, schneiden zwey gerade Linien AB, CD, in proportionirte Stücke.

Denn sind A, E, B, D, F, C, die Durchschnittspunkte, und man zieht AD, welche MN in G schneidet, so ist AC mit GF, und BD mit EG parallel, §. 406, folglich AE: EB = AG: GD = CF: FD, §. 243.

§. 408. Lehrs. (Fig. 161.) Ist eine Ebene CD auf einer andern MN senkrecht, so muß der Perpendikel, der von einem willkührlichen Punkte H in jener Ebene auf diese fällt, den Durchschnitt CE treffen, also in der Ebene CD liegen.

Bew. Träfe dieser Perpendikel, wie HK, die Ebene MN in einem Punkte K außerhalb CE, so sey KB auf CE senkrecht, folglich KBH = R, §. 377. Nun wäre auch HKB = R, §. 376, folglich wären in △HBK zwey rechte Winkel, welches unmöglich ist.

§. 409. Lehrs. (Fig. 161.) Ist eine gerade Linie AB auf einer Ebene MN senkrecht, so ist auf dieser auch jede Ebene DC, die durch solche Linie gelegt wird, senkrecht.

Bew. In einem willkührlichen Punkte F des Durchschnitts CE sey auf denselben in der Ebene CD die FG senkrecht.

Da AB, senkrecht auf MN, folglich auf CE, so ist FG mit AB parallel, §. 86, folglich auch auf MN senkrecht, §. 391. Demnach ist CD auf MN senkrecht, §. 377.

§. 410. Zus. 1. (Fig. 162.) Zwey gegen einander geneigte Ebenen AC, AH, deren Durchschnitt AB auf der Ebene ihres Neigungswinkels EDF senkrecht ist, §. 395,

sind

ſind daher auch auf dieſer Ebene ſenkrecht, §. 409, folglich dieſe wiederum auf jenen beiden.

§. 411. Zuſ. 2. (Fig. 162) Hat man außer dem Paare der geneigten Ebenen AC, AH in §. 410. noch ein zweytes Paar GK, GL, von ähnlicher Neigung mit jenem, ſo werden beide Paare in einander paſſen, oder congruent ſeyn.

Es ſind hienach gleiche Neigungswinkel EDF, MFN, §. 380, welche auf beide Paare, ſo wie die Durchſchnittslinien AB, GH, auf dieſe Winkel ſenkrecht ſind, §. 410.

Legt man nun GL auf AH, ſo daß GH auf AB und F auf D zu liegen kömmt, ſo muß FN auf DF fallen, weil ADE=R=GFN; die Ebene MFN auf EDF, weil beide ſenkrecht ſind, und FM auf DE, weil die Winkel gleich. Demnach fallen die Ebenen GFM, ADE, d. i. GK, AC, auf einander, und gedachte beide Paare paſſen völlig in einander.

§. 412. Zuſ. 3. (Fig. 162.) Zwey parallele Ebenen AC, GK, haben gegen eine dritte Ebene AL ähnliche Neigungen.

Denn ihre Durchſchnitte AB, GH, die ſie mit der dritten machen, ſind parallel, §. 406. Auf dieſe ſey die Linie DF ſenkrecht, und über dieſer eine Ebene EDF ſenkrecht auf AL, welche die parallelen Ebenen in den Parallelen DE, FM ſchneide, §. 406, ſo ſind EDF, MFN gleich, §. 95, und der parallelen Ebenen Neigungswinkel, §. 379.

§. 413. Zuſ. 4. (Fig. 162.) Zwey Ebenen AC, GK, die eine dritte AL in Parallellinien AB, GH ſchneiden, und gegen ſie ähnliche Neigungen haben, ſind parallel.

Denn es ſey DF auf AB, GH, und auf DF in der Ebene AC die DE ſenkrecht, ſo iſt EDF der Ebene AC Neigungswinkel, §. 379, und auf der Ebene AL ſenkrecht,

§. 409. Dieſes Winkels Ebene ſchneide die GK in FM, die folglich auf FG ſenkrecht, ſo iſt MFN der Ebene GK Neigungswinkel, §. 379. Nun iſt angenommen EDF= MFN, folglich ſind DE, FM parallel, §. 86. folglich iſt ein Perpendikel von E auf FM auch auf DE ſenkrecht, und liegt in der Ebene EDFM, die auf beiden Ebenen AC, GK, ſenkrecht ſteht, §. 410, iſt alſo auf beiden Ebenen ſenkrecht, §. 408, welche daher parallel ſind, §. 400.

§. 414. Zuſ. 5. (Fig. 163.) Zwey Parallellinien AB, CD, haben gegen einerley Ebene MN ähnliche Neigungen.

Denn es ſey BE und DF auf MN ſenkrecht, folglich parallel, §. 391, ſo iſt ABE=CDF, §. 393. Nun ſind bey E und F rechte Winkel, §. 376, folglich iſt BAE=CDF §. 100, d. i. die Neigungswinkel §. 379. ſind gleich.

§. 414. * Zuſ. 6. (Fig. 163.) Zwey gerade Linien AB, CD, die gegen einerley Ebene MN ähnliche Neigungen haben, verhalten ſich wie die Perpendikel BE, DF.

Denn die Triangel ABE, CDF, haben einerley Winkel, § 413, und ſind alſo ähnlich, §. 257. Folglich iſt AB : CD = BE : DF.

§. 415. Lehrſ. (Fig. 164.) Sind zwey ſich ſchneidende Ebenen AC, AD, auf einer dritten Ebene MN ſenkrecht, ſo iſt es auch ihr Durchſchnitt AB.

Bew. Geſetzt AB ſey nicht ſenkrecht auf MN, ſo ſey BG auf BC in der Ebene AC, und BH auf BD in der Ebene AD ſenkrecht, beide folglich auf der Ebene MN ſenkrecht, §. 377, welches unmöglich iſt, §. 396.

Eben ſo wird von allen andern Linien durch B außer BA bewieſen, daß ſie nicht ſenkrecht auf MN ſeyn können; folglich muß BA ſenkrecht ſeyn.

2. Von

2. Von eckigen Körpern, und den körperlichen Winkeln, oder den Ecken.

§. 416. Erkl. Eine körperliche Figur, oder schlechthin ein Körper, ist ein nach allen Seiten ausgedehnter und eingeschlossener Raum.

Die Gränzen nämlich, welche einen körperlichen Raum allenthalben einschließen, §. 3, geben dem Körper seine Gestalt oder Figur, daher die Figur des Körpers von der Figur einer Fläche, die schlechthin Figur hieß, §. 16, wohl zu unterscheiden ist.

§. 417. Erkl. Ein eckiger Körper heißt, der von lauter ebenen Flächen §. 10. begränzt wird; ein runder Körper, den eine gekrümmte Oberfläche §. 11. ganz oder zum Theil begränzt.

§. 418. Zus. 1. Einen Raum, den ein eckiger Körper einnimt, einzuschließen, werden aufs wenigste vier ebene Flächen erfordert.

Denn eine einzige Ebene theilt blos den Raum, worin sie sich befindet, in zwey Stücke, die zu beiden Seiten der unbegränzten Ebene sich befinden. Zwey Ebenen GK, GL, (Fig. 162.) die einander in GH schneiden, schließen eben so wenig einen Raum ein. Kömmt aber (Fig. 165.) zu zwey Ebenen ABC, ABD, die einander in AB schneiden, noch eine dritte Ebene CAD, welche die erste in AC, die zweyte in AD schneidet, wodurch also die drey Durchschnittslinien AB, AC, AD, in einem Punkte zusammenlaufen; so wird zwar auf der Seite von A ein körperlicher Raum eingeschlossen, aber dieser ist noch an B, C, D offen. Eine vierte Ebene durch B, C, D, wird also erst diesen Raum völlig schließen.

§. 419. Zus. 2. Durch eine eingekrümmte Fläche

ist

ist es möglich, einen körperlichen Raum allenthalben zu begränzen, wie man an der Kugel sieht.

§. 420. Anm. In den Elementen der Stereometrie hat man nicht die Absicht, eine allgemeine und vollständige Theorie aller eckigen und runden Körper, und derer, die zum Theil eckig, zum Theil rund sind, zu geben, sondern nur einige wenige aber hauptsächliche Körper zu betrachten, deren Untersuchung von besonderer Nothwendigkeit und Erheblichkeit ist, und zur ersten Grundlage aller ähnlichen Betrachtungen dienet. Dahin gehören: das Prisma nebst dem Cylinder; die Pyramide nebst dem Kegel, und die Kugel. Das Prisma und die Pyramide sind eckige, die übrigen runde Körper. Nur von erstern sind hier vorläufige Erklärungen zu geben.

§. 421. Erkl. (Fig. 166.) Eine Pyramide ist der körperliche Raum zwischen einer geradlinigen Figur ABCD (der Grundfläche) und zwischen so vielen Triangeln EAB, EBC, ECD, EDA, (den Seitenflächen) als die Grundfläche Seiten hat, die alle ihre gemeinschaftliche Spitze in einem außer ihr befindlichen Punkte E (der Spitze) haben.

Ein Perpendikel von der Spitze C auf die Grundfläche ABD heißt die Höhe der Pyramide.

Die Pyramide heißt drey- vier- oder vielseitig nach der Zahl der Seitenflächen oder der Seiten ihrer Grundfläche.

§. 422. Zus. Eine dreyseitige Pyramide ist von lauter Triangeln begränzt, von denen also jeder für die Grundfläche gelten kann.

§. 423. Erkl. (Fig. 167.) Ein Prisma (Pfeiler) ist der körperliche Raum zwischen zweyen parallelen und congruenten geradlinigen Figuren AC, HF, (den Grundflächen) und zwischen so vielen Parallelogrammen AG, BH, CE, DF, (den Seitenflächen) als jede der beiden Grundflächen Seiten hat.

Ein Perpendikel von einem willkührlichen Punkte

der

der einen Grundfläche auf die andre heißt die Höhe des Prisma.

Stehen die Seitenflächen senkrecht auf den Grundflächen, so heißt das Prisma senkrecht, rectum, sonst aber schief, obliquum.

Ein Prisma heißt drey- vier- vielseitig, nach der Zahl der Seitenflächen, oder der Seiten einer jeden der beiden Grundflächen.

§. 424. Erkl. (Fig. 166.) Ein Prisma, dessen Grundflächen gleichfalls Parallelogramme sind, heißt ein Parallelepipedon.

Ein rechtwinkliches Parallelepipedon ist von sechs Rectangeln eingeschlossen.

Ein Würfel, cubus, ist von sechs Quadraten eingeschlossen.

§. 425. Zus. Ein Parallelepipedon ist von lauter Parallelogrammen eingeschlossen, von denen also jedes gegenüberstehende Paar für die Grundflächen gelten kann, wie im Folgenden noch näher gezeigt werden wird.

§. 426. Erkl. Kanten eines Körpers heißen die Durchschnitte eines jeden Paares der ihn einschließenden Ebenen. Unter diesen sollen die, welche Schnitte zweyer Seitenflächen sind, Seitenlinien heißen. Bey dem Würfel heißt jede Kante seine Seite.

§. 427. Erkl. Eine Ecke des Körpers, oder ein körperlicher Winkel heißt, was zwischen den ebenen Winkeln gegen den Punkt zu, wo die Kanten des Körpers zusammentreffen, enthalten ist.

Die ebenen Winkel, welche die Ecke einschließen, heißen ihre Seiten.

Eine Ecke ist nach der Zahl ihrer Seiten, drey- vier- vielseitig.

E.

Z. E. Fig. 165 iſt bey C eine dreyſeitige Ecke, deren Kanten CA, CB, CD, und deren Seiten ACB, BCD, DCA ſind. Fig. 166 iſt bey E eine vierſeitige Ecke, deren Kanten EA, EB, EC, ED, und deren Seiten AEB, BEC, CED, DEA ſind.

§. 428. Zuſ. (Fig. 166.) Man laſſe von einem Punkte E drey oder mehrere gerade Linien, EA, EB, EC, ED, ſo ausgehen, daß ſich durch ſolchen Punkt eine Ebene legen läßt, die alle dieſe Linien blos auf einer Seite hat, auch daß von dieſen Linien nie mehr als zwey in einer Ebene ſind. Werden nun durch ſolche Linien Ebenen gelegt, jede durch ein Paar, und zwar nach der Ordnung, wie ſie zunächſt an einander gränzen, ſo ſchließen dieſe Ebenen gegen obgedachten Punkt E zu das ein, was man einen **körperlichen Winkel**, oder eine Ecke nennt.

§. 429. Anm. Die Beſchaffenheit einer Ecke beruhet auf der Lage, welche jede Kante gegen zwey benachbarte Kanten und gegen deren Ebene hat, wie bald näher gezeigt werden wird. Wir ſchränken uns hier blos auf ſolche Ecken ein, dergleichen beym Prisma und der Pyramide vorkommen, zu deren Grundflächen auch nur ſolche geradlinige Figuren kommen, als in der Planimetrie betrachtet worden ſind, nämlich Figuren, deren Winkel alle auswärts gehen, in Gegenſatz derer, die auch einwärts gehende Winkel haben. Dergleichen Winkel unterſcheidet man leicht, wenn man ihre Schenkel über den Scheitel hinaus verlängert, da dann die Verlängerungen von jenen außerhalb, von dieſen aber innerhalb der Figur liegen. Nach dieſer Einſchränkung betrachten wir hier blos ſolche Ecken, deren Kanten von einer Ebene geſchnitten, die Spitzen einer geradlinigen Figur mit lauter auswärts gehenden Winkeln treffen, wie die Ecken bey C und E in Fig. 165. 166. Viel Lehrreiches über dieſe Materie ſagt Hr. Hofr. Käſtner in geometriſchen Abhandlungen II. Samml. 37 Abhandl.

§. 430. Lehrſ. (Fig. 168.) Von den drey ebenen Winkeln BAC, CAD, DAB, die einen körperlichen Winkel bey A einſchließen, ſind jede zwey zuſammen größer als der dritte.

Bew. Sind dieſe drey ebene Winkel gleich, ſo iſt der Satz an ſich klar; ſind ſie ungleich, ſo ſey BAC>BAD, und nicht <CAD.

In

In der Ebene durch BAC ſey BAE=BAD. Man nehme willkührlich AE, mache AD=AE, lege durch E eine gerade Linie, welche AB, AC, in B, C ſchneidet, und ziehe BD, DC.

Da BAE=BAD, AE=AD, AB=AB, ſo iſt BE=BD, §. 41. Nun iſt BD+DC>BC, d. i. >BE+EC, §. 73, folglich DC>EC (8. Grundſ.) Nun iſt AE=AD, AC=AC, folglich iſt CAD>CAE, §. 80. Nun iſt DAB=BAE, folglich iſt DAB+CAD>BAE+CAE (6. Grundſ.) d. i. >BAC. Nun iſt BAC nicht <CAD, folglich iſt auch BAC mit jedem der beiden übrigen zuſammen größer als der dritte.

§. 431. Erkl. (Fig. 166.) Wenn drey oder mehrere ebene Winkel einen körperlichen Winkel E einſchlieſſen, ſo ſind ſie zuſammen allemal kleiner als vier rechte Winkel.

Bew. Eine Ebene ſchneide die Kanten, ſo entſteht eine geradlinige Figur ABCD von n Seiten, nach der Zahl der Kanten, und man erhält n Triangel EAB, EBC u. ſ. w. deren gemeinſchaftliche Spitze E iſt, und auſſer der Ecke E noch n dreyſeitige Ecken an den Spitzen der Figur ABCD. Nun betragen die Winkel in den Triangeln 2nR, §. 98, die Winkel in der Figur ABCD aber 2nR — 4R, §. 105, daß alſo jene dieſen, wenn dazu noch 4 rechte kommen, gleich ſind. Aber die Winkel an den Grundlinien der Triangel ſind zuſammen größer als die Winkel der Figur ABCD §. 130, folglich bleiben, wenn man die Winkel an den Grundlinien der Triangel wegnimmt, die Winkel an E, weniger als 4R.

§. 432. Aufg. (Fig. 169. 170. 171.) Drey ebene Winkel ABC, DEF, GHK, die zuſammen weniger als vier rechte Winkel betragen, und deren jede zwey zuſammen gröſſer als der dritte ſind, in einen körperlichen Winkel zuſammenzuſtellen.

Auf-

Aufl. Man mache alle Schenkel der gegebenen Winkel gleich, ziehe AC, DF, GK, und mache hieraus den △LMN, daß LN=AC, LM=DF, MN=GK sey, §. 81. 77. Um den Triangel beschreibe man einen Kreis §. 196, dessen Mittelpunkt O in oder über oder unter LM fällt, und ziehe ON, OL, OM. Auf der Kreisfläche errichte man in O den Perpendikel OV, §. 394, daß $OV^q = AB^q - ON^q$, §. 133, folglich $OV^q + ON^q = AB^q$ sey, und ziehe VN, VL, VM, so ist bey V der verlangte körperliche Winkel.

Bew. I. Daß AB weder eben so groß noch kleiner als ON seyn könne, folglich größer als ON seyn müsse.

1. (Fig. 169.) Wenn O auf LM fällt. Wäre AB =ON, so wäre, weil AB=DE=EF, und ON=OL OM ist, DE+EF=OL+OM=LM=DF, welches unmöglich ist, §. 73. Wäre AB=ON, so beweist man eben so, daß DE+DF<DF wäre, welches noch weniger möglich ist, §. 73.

2. (Fig. 170.) Wenn O über LM fällt.

a) Wäre AB=ON, folglich BC=OL, auch AC =LN, so wäre ABC=NOL, §. 48. Eben so beweist man DEF=LOM, und GHK=MON. Folglich wären die drey gegebenen Winkel den Winkeln um O gleich, also =4R, §. 60, gegen das Angenommene.

b) Wäre AB<ON, so sey OP=AB, und OQ=BC, folglich PN=QL, folglich PQ mit NL parallel, §. 243, folglich ON:OP=NL:PQ, §. 243. Nun ist ON>OP, folglich wäre NL, d. i. AC>PQ, folglich ABC>NOL, §. 80. Eben so wird bewiesen DEF>LOM, und GHK >MON, folglich wären die drey gegebenen Winkel größer als die Winkel um O, also >4R, §. 60, welches noch mehr gegen das Angenommene ist.

3.

3. (Fig. 171.) Wenn O unter LM fällt.

a) Wäre AB = ON, so wird, wie in (2. a) bewiesen, daß ABC = NOL, GHK = MON, und DEF = LOM. Nun ist LOM = NOL + MON: folglich wäre DEF = ABC + GHK, gegen das Angenommene.

b) Wäre AB < ON, so wird wie in (2. b) bewiesen, daß ABC > NOL, und GHK > MON sey. Man mache CBR = GHK, BR = BC, und ziehe CR, AR, so ist CR = GK §. 41. = MN.

Da in den gleichschenklichen Triangeln NOL, ABC, der Winkel O < B, so ist LNO > BCA § 101, und aus eben dem Grunde ONM > BCR, folglich LNM > ACR. Nun war LN = AC, NM = CR, folglich ist NM, d. i. DF > AR, §. 79. Nun sind AB, BC, DE, EF gleich, folglich ist DEF > ABR §. 80, d. i. > ABC + GHK, welches noch mehr gegen das Angenommene ist.

II. Daß die ebenen Winkel, welche die Ecke bey V einschließen, den gegebenen gleich sind,

Da VO auf den gleichen Halbmessern ON, OL, OM senkrecht ist, §. 376. so ist VN = VL = VM §. 41, auch $VN^2 = OV^2 + ON^2$ §. 114. Nun ist nach der Construction $OV^2 + ON^2 = AB^2$, Folglich ist $VN^2 = AB^2$, folglich VN = AB. Demnach sind VN, VL, VM den Schenkeln der gegebenen Winkel gleich. Nun war auch NL = AC, LM = DF, MN = GK. Folglich ist NVL = ABC, LVM = DEF, MVN = GHK, §. 48.

§. 433. Lehrs. (Fig. 172.) Wenn zwey gerade Linien AB, CD, mit den gleichnamigen Schenkeln zweyer ebenen Winkel EAF, GCH, in deren Scheiteln sie aufgerichtet sind, gleiche Winkel machen, BAE = DCG, und BAF = DCH, so haben sie gegen die Ebenen erstgedachter Winkel ähnliche Neigungen.

Bew. Man mache die Linien AB, CD gleich, fälle von B und D auf die Ebenen erstgedachter Winkel die Perpendikel BK, DL, und ziehe AK, CL, so sind BAK, DCL der Linien Neigungen gegen die Ebenen, §. 378. und auf diesen senkrecht. Von K, L, fälle man auf die Schenkel der Winkel die Perpendikel KE, KF; LG, LH, und ziehe EF, FB, BE; GH, HD, DG.

Da BK senkrecht auf der Ebene EAF, so ist auch die Ebene BKE auf ihr senkrecht. §. 409. Folglich ist AE, die auf den Durchschnitt EK senkrecht steht, auch auf der Ebene BKE senkrecht, §. 377, folglich AEB=R, §. 376. Eben so wird bewiesen, daß CGD=R. Folglich ist AEB = CGD. Nun ist angenommen BAE=DCG, und AB = CD. Folglich ist AE=CG, §. 82. Auf eben die Art beweist man auch AF=CH. Nun ist angenommen EAF = GCH, folglich ist EF=GH, AEF=CGH, AFE = CHG, §. 41.

Da AEK=CGL=R, und AEF=CGH, so ist FEK=HGL (7. Grundſ.) Eben so wird bewiesen EFK =GHL. Nun war auch EF=GH, folglich ist EK=GL. Nun war auch AE=CG, und AEK=CGL=R, folglich ist AK=CL, §. 41. Nun war AB=CD, und AKB =CLD=R, und daher $AB^q = AK^q + BK^q = CD^q = CL^q + DL^q$. Folglich ist $BK^q = DL^q$, folglich BK = DL, folglich BAK=DCL, §. 48.

§. 434. Zuſ. 1. Wenn zwey in A und C aufgeſtellte gleiche Linien AB, CD, mit den gleichnamigen Schenkeln der gleichen Winkel EAF, GCH, gleiche Winkel machen, so sind die Perpendikel BK, DL, die von ihren Endpunkten B, D, auf die Ebenen der erstgedachten Winkel fallen, einander gleich.

§. 435. Zuſ. 2. Wenn von den ebenen Winkeln, welche zwey dreyſeitige Ecken bey A und B einschließen, die ähn-

ähnlich liegenden gleich sind, so haben die Ebenen, worin die gleichen Winkel sind, ähnliche Neigungen.

Es soll nämlich wie §. 433. seyn EAF=GCH, EAB = GCD, BAF=DCH, da dann aus dem Beweise erhellet: 1) daß AE, CG, senkrecht auf die Ebenen BEK, DGL, die folglich der Ebenen BAE, DCG, Neigungen gegen die Ebenen EAF, GCH sind; 2) daß bey K und L rechte Winkel, EK=GL, und BK=DL, folglich BEK =DGL sey, §. 41.

Eben so wird bewiesen, daß BFK, DHL gleich, und die Neigungen der Ebenen BAF, DCH, gegen die Ebenen FAE, HCG sind.

§. 436. Lehrs. (Fig. 172.) Wenn von den ebenen Winkeln, welche zwey dreyseitige Ecken bey A und C einschließen, die gleichliegenden gleich sind, so passen die Ecken in einander, oder sind congruent.

Bew. Man lege GCH auf EAF, daß C auf A, und CG längs AE liegt, so fällt CH auf AF, weil GCH =EAF ist. Da die Ebenen DCG, BAE, gegen GCH, EAF, ähnliche Neigungen haben, §. 435. so fallen sie auf einander, §. 411. Eben so beweist man, daß die Ebenen DCH, BAF, auf einander fallen. Folglich fällt CD auf AB, weil sowohl DCG=BAE, als auch DCH=BAF ist. Demnach passen die Ecken völlig in einander.

§. 437. Aufg. (Fig. 172.) An einen gegebenen Punkt A eine gegebne dreyseitige Ecke C aufzutragen.

Auflös. Von einem willkührlichen Punkte D der CD fälle man auf die Ebene GCH einen Perpendikel DL, und ziehe CL. Aus A ziehe man willkührlich AE, mache EAF =GCH, EAK=GCL, AK=CL, errichte in K auf der Ebene EAF den Perpendikel KB, mache KB=LD, und ziehe AB, so ist das Verlangte geschehen.

Beww. Man mache AE=CG, AF=CH, und ziehe EK, KF, FE, EB, BF, desgleichen GL, LH, HG, GD, DH, so sind die Perpendikel BK auf KE, KF, KA, und DL auf LG, LH, LG senkrecht.

Da in den Triangeln EAK, GCL, die Winkel bey A und C, und die einschließenden Seiten gleich sind, so ist EK=GL, §. 41. Nun ist auch KB=LD, und bey K und L rechte Winkel. Folglich ist EB=GD, §. 41. Nun sind AKB, CLD rechte Winkel, und die einschließenden Seiten gleich, also AB=CD. Auch war AE=CG, folglich ist BAE=DCG, §. 48.

Auf eben die Art beweist man FK=HL, und FB=HD. Nun war AB=CD, AF=CH, folglich ist BAF=DCH, §. 48. Nun war auch EAF=GCH, folglich sind die Ecken bey A und C congruent, §. 436.

§. 438. Lehrs. Zwey Prismen, oder zwey Pyramiden sind congruent, wenn sie durch gleichviele ebene Figuren eingeschlossen werden, von denen die, welche in beiden Körpern ähnliche Lagen haben, congruent sind.

Beww. Jedes Prisma, so wie jede Pyramide, hat lauter dreyseitige Ecken, welche die Seitenflächen mit den Grundflächen machen.

I. Nun denke man sich zu der Pyramide (Fig. 166.), deren Grundfläche ABCD, und Spitze E, eine andere von erfoderter Beschaffenheit, deren Grundfläche abcd, und Spitze e heiße. Man lege beider congruente Grundflächen mit den gleichlautenden Buchstaben auf einander, so fällt, weil die in beiden ähnlich liegenden Seitenflächen, die durch gleichlautende Buchstaben bezeichnet worden, congruent sind, die Ebene eab in EAB, und ebc in EBC, und eb in EB, auch e in E, §. 436. Eben so wird dies von den übrigen Seitenflächen und Seitenlinien bewiesen.

II. Auf

II. Auf eben die Art wird der Beweis geführt, wenn man sich zu dem Prisma AH (Fig. 167.) ein anders von erfoderter Beschaffenheit gedenkt, und dessen Kanten nach den ähnlich liegenden Kanten des erstern benennt.

§. 439. Anm. Wenn man die Congruenz zweyer Ecken oder eckigen Körper untersuchen will, so hat man auf die Bedingungen des Satzes §. 433. genau zu achten, aus denen daselbst bewiesen worden, daß die solchergestalt aufgestellten Linien AB, CD, gegen die Ebenen der Winkel EAF, GCH, ähnliche Neigungen haben. Wo also letzteres nicht stattfindet, da sind gewiß die vorausgesetzten Bedingungen nicht vorhanden.

§. 440. Erkl. Aehnliche Körper heißen solche, die durch gleichviele ebene Figuren so eingeschlossen worden, daß die ähnlich liegenden Figuren ähnlich, und die ähnlich liegenden Ecken congruent sind.

§. 441. Erkl. Reguläre Körper heißen solche, die durch lauter reguläre und congruente ebene Figuren, die lauter congruente Ecken machen, eingeschlossen sind. Nämlich:

Ein Würfel ist in sechs gleiche Quadrate eingeschlossen; ein Tetraeder in vier gleiche gleichseitige Triangel; ein Octaeder in acht, ein Ikosaeder in zwanzig. Ein Dodekaeder ist in zwölf gleiche reguläre Pentagone eingeschlossen.

Anmerk. Die Betrachtung der regulären Körper wird füglich in den Elementen übergangen.

§. 442. Zus. Außer den angezeigten sind wegen §. 431. keine andere reguläre Körper weiter möglich.

Denn der Winkel eines gleichseitigen Triangels ist $= \frac{2}{3}$R. Aus drey solchen Winkeln wird die Ecke des Tetraeders, aus vieren die Ecke des Octaeders, aus fünfen die Ecke des Ikosaeders; aus sechsen, die zusammen $= 4$R, läßt sich keine Ecke machen.

Der Winkel des Quadrats ist ein rechter. Aus drey solchen Winkeln wird die Ecke des Würfels; aus vieren, die zusammen $=4R$, läßt sich keine Ecke machen.

Der Winkel des regulären Pentagons ist $=\frac{6}{5}R$. Aus drey solchen Winkeln wird die Ecke des Dodekaeders; aus vieren, die zusammen $>4R$, läßt sich keine Ecke machen.

Der Winkel des regulären Hexagons ist $\frac{4}{3}R$. Aus drey solchen Winkeln, die zusammen $=4R$, läßt sich keine Ecke machen, folglich aus andern Polygonen noch viel weniger.

3. Vom Prisma.

§. 443. Lehrs. (Fig. 167) Durch eine geradlinige Figur ABCD, und durch eine gerade Linie AF, die gegen die Ebene der Figur in einem ihrer Winkelpunkte A unter einem gewissen Winkel geneigt ist, wird ein Prisma bestimmt.

Bew. Zieht man durch die übrigen Winkelpunkte mit AF die Parallelen BG, CH, DE, die folglich auch unter sich parallel sind, §. 392, und legt durch F eine Ebene mit ABCD parallel, §. 403, so sind auch die Seiten der parallelen Grundflächen parallel, §. 406, folglich die Winkel gleich, §. 393, und die parallelen Grundflächen auch congruent, §. 41. Demnach ist der Körper AE ein Prisma, §. 423.

Denkt man sich nun eine andre mit ABCD congruente Figur abcd, zieht aus a eine Linie af unter gleichem Winkel mit AF, §. 437, und macht alles wie zuvor, so ist der neue Körper dem vorigen congruent, §. 438, oder dasselbe Prisma, §. 35.

§. 444. Zus. 1. Des Prisma Seitenlinien AF, BG, CH, DE, sind alle einander gleich.

§. 445.

§. 445. Zuſ. 2. Jeder Schnitt des Prisma durch TV, mit der Grundfläche parallel, iſt mit ihr congruent.

§. 446. Zuſ. 3. Iſt AF auf der Ebene ABCD, folglich auch auf der ihr parallelen FGHE ſenkrecht, §. 400, ſo ſind auch alle übrige Seitenlinien auf beiden Grundflächen ſenkrecht, §. 95, folglich auch alle Seitenflächen §. 409, und das Prisma iſt ſenkrecht, §. 423, deſſen Seitenflächen Rectangel ſind.

§. 447. Zuſ. 4. Iſt ABCD ein Parallelogramm, ſo iſt AE ein Parallelepipedon, §. 424.

§. 448. Zuſ. 5. Iſt AF ſenkrecht, und ABCD ein Rectangel, ſo iſt AE ein rechtwinkliches Parallelepipedon, §. 424.

§. 449. Zuſ. 6. Iſt AF ſenkrecht und der AB gleich, auch ABCD ein Quadrat, ſo iſt AE ein Würfel, §. 424.

§. 450. Lehrſ. (Fig. 167.) Iſt ein Körper AE von lauter Parallelogrammen eingeſchloſſen, ſo ſind die gegenüberſtehenden parallel und congruent. Und iſt ein Körper AE von lauter parallelen Ebenen eingeſchloſſen, ſo ſind ſolche lauter Parallelogramme.

Bew. I. Da FG mit EH, und GB mit HC parallel iſt, ſo iſt auch ABGF mit DCHE parallel, §. 402. Eben ſo wird der Beweis von den übrigen Ebenen geführt.

Zieht man nun BF, CE, ſo ſind die Winkel FGB, EHC und die einſchließenden Seiten gleich, folglich $\triangle BFG = \triangle CEH$, §. 41, folglich ABGF=DCHE, §. 107. Eben ſo beweiſt man den Satz von den übrigen Figuren.

II. Da die Ebenen AG, CE, desgleichen AE, BH parallel ſind, ſo ſind es auch die Linien FG, EH, desgleichen FE, GH, §. 406. Folglich iſt GE ein Parallelogramm. Und ſo auch die übrigen.

§. 451. Zuſ. Für ein Parallelepipedon kann alſo jedes Paar der einſchließenden Flächen zu Grundflächen genommen werden.

§. 452. Aufg. (Fig. 167.) Auf einer geraden Linie KL ein Parallelepipedon zu beſchreiben, welches einem gegebenen BE ähnlich ſey, und ähnlich liege.

Auflöſ. An K trage man den körperlichen Winkel B §. 437, mache BC:BA=KL:KM, und BA:BG=KM:KN, §. 249, daher auch BC:BG=KL:KN, und vollende das Parallelipedon KP, §. 443.

Beweis. Da die Winkel LKM, CBA gleich, und die einſchließenden Seiten proportionirt ſind, ſo iſt LM∽CA. Eben ſo wird bewieſen, daß MN∽AC, und LN∽CG iſt. Nun ſind in jedem dieſer beiden Körper die drey genannte Flächen den drey entgegengeſetzten congruent, daher auch letztere ähnlich ſind. Folglich ſind die ähnlich liegenden Winkel gleich, folglich die ähnlich liegenden Ecken congruent, §. 436. Demnach ſind beide Körper ähnlich, §. 440.

§. 453. Lehrſ. (Fig. 173.) Wird ein Parallelepipedon AB von einer Ebene CD mit einer Seitenfläche AE parallel geſchnitten, ſo verhalten ſich ſeine beiden Abſchnitte AD, CB, wie die Abſchnitte der Grundfläche AG, GF, oder wie die Abſchnitte der Kante AC, CF.

Bew. I. Sind AC, CF, commenſurabel, ſo ſey AH ihr gemeines Maaß, in AC m mal, und in CF n mal enthalten. Man ziehe durch die Theilpunkte in AF Parallelen mit CG, und ſtelle ſie auf Ebenen parallel mit CD, ſo wird AD in m, und CB in n congruente Parallelepipeda getheilt, §. 438, Folglich iſt AD:CB=AC:CF=AG:GF.

Sind

Sind AC, CF incommensurabel, daß jedes Maaß der ersten darin m mal, in der andern aber n mal, mit einem Reste enthalten sey, so ersieht man aus dem ersten Falle, daß alsdann AD in m, aber CB in n congruente Parallelepipeda mit einem Reste getheilt werde, da dann gleichfalls obige Proportion bleibt, §. 223.

§. 454. Anm. Man kann auch die beiden Parallelepipeda so betrachten, daß AE, CD ihre congruenten Grundflächen sind, und die Kanten AC, CF ähnliche Neigungen gegen die Grundflächen haben.

§. 455. Lehrs. (Fig. 174.) Jedes Parallelepipedon BD wird von der Diagonalfläche ABCD in zwey gleiche dreyseitige Prismen getheilt.

Bew. Der Grundflächen Diagonalen AD, BC, (wodurch die Diagonalfläche geht) halbire man in E und F, so ist EF in der Diagonalfläche, und mit AB parallel. Durch EF lege man zwey Ebenen OQ, PN, jene mit BS, diese mit BR parallel, so wird dadurch das ganze Parallelepipedon BD in vier congruente Parallelepipeda getheilt, §. 438, wovon zwey PQ, ON, um die Diagonalfläche liegen, die beiden andern RF, EG, aber nicht. Jene sollen der Kürze wegen die mittlern, diese aber die Complemente heissen. Nun verfahre man wieder mit den beiden mittlern eben so wie mit dem Ganzen BD, so erhält man ebenfalls in jedem derselben vier congruente Parallelepipeda, nämlich zwey mittlere und zwey Complemente, da dann die mittlern abermals eben so wieder behandelt werden können u. s. w. ohne Ende.

Betrachtet man nun die beiden dreyseitigen Prismen, worin die Diagonalfläche das Parallelepipedon BD theilt, und welche T und V heißen sollen, so enthält jedes derselben die Hälfte von allen Complementen, die man durch obige Theilungen erhält, und bey jeder wiederholten Theilung geht von der Summe der mittlern die Hälfte ab, daß

demnach diese Summe jegend einmal kleiner als jede gegebene körperliche Größe werden muß. §. 220.

Man setze nun die Summe aller Complemente =S in T sowohl als in V, die Summe aller mittlern überhaupt =s, so ist das ganze Parallelepipedon BD = T + V = 2S + s. Wären nun T und V nicht von gleichem Inhalte, sondern das eine, etwa T, größer, daß also V = T — d wäre, so setze man obenbeschriebene Theilung so lange fort, bis s < d ist, da dann offenbar T — d < T — s ist, folglich auch V < T — s, folglich noch vielmehr V < S wäre, d. i. das Ganze kleiner als ein Theil. Demnach können also T und V nicht ungleich seyn.

Anm. Dieser Beweis, der aus Herrn Hofr. Karstens Lehrbegriff der Mathematik Geom. §. 343. entlehnt worden, ist allgemein. Der Beweis im Euklides XI. Buch 28. Satz, gilt blos für senkrechte Parallelepipeda, die in congruente Prismen getheilt werden.

§. 456. Zus. Jedes dreyseitige Prisma BGCASD ist die Hälfte eines Parallelipedons BD, das mit ihm gleiche Höhe und eine doppelt so große Grundfläche GH hat.

Demnach sind auch Fig. 174* zwey dreyseitige Prismen von gleicher Höhe AB einander gleich, wenn das eine ACDBGH auf dem Triangel ACD, das andre ACDEBF auf einer doppelt so großen Grundfläche ACDE steht. Denn jedes ist die Hälfte des Parallelepipedons CF.

§. 457. Lehrs. (Fig. 175. 176. 177.) Zwey Parallelepipeda von gleicher Höhe auf congruenten Grundflächen sind einander gleich.

Bew. Man lege die congruenten Grundflächen auf einander, da dann die Seitenlinien, die auf der gemeinschaftlichen Grundfläche stehen, sich entweder in einerley geraden Linien endigen, oder nicht.

Erster

Erster Fall.

Die beiden Parallelepipeda sind AF, AL, deren gemeinschaftliche Grundfläche ABCD ist, und beider Seitenlinien endigen sich in der geraden Linie EL, HM, da dann zweyerley Lagen möglich sind.

1. (Fig. 175.) Die Seitenfläche eines jeden der beiden Körper AF, AL, ist eine Diagonalfläche des andern. So ist ADFG, die Diagonalfläche von AF, eine Seitenfläche von AL, und BCFG, die Diagonalfläche von AL, eine Seitenfläche von AF, daß also das dreyseitige Prisma ABGDCF beiden Körpern gemein, und die Hälfte eines jeden ist, §. 456, daher beide Körper AF, AL, gleich sind.

2. (Fig. 176. 177.) Die Seitenfläche ADKN des einen AL ist keine Diagonalfläche des andern AF, d. i. K fällt nicht in F, sondern zwischen E und F, oder zur Seite, da dann leicht zu beweisen, daß die dreyseitigen Prismen DEKAHN, und CFLBGM, congruent sind. Nimmt man letzteres von dem ganzen hier verzeichneten Körper weg, so bleibt das Parallelepipedon AF. Nimmt man ersteres von eben dem Körper weg, so bleibt das Parallelepipedon AL. Folglich ist AF = AL.

Die Congruenz der Prismen aber wird folgendermaßen bewiesen:

Die körperlichen Winkel bey E und F sind gleich, §. 436. Nun ist AB = EF = KL. Wird daher KF Fig. 176 addirt, Fig. 177 subtrahirt, so hat man EK = FL, folglich ist △EKD = △FLC, und EN = FM, § 121. Auch ist AE = BF, AK = BL, und △HNA = △GMB.

Zweyter Fall.

Die beiden Parallelepipeda sind AF, AS (Fig. 176.) auf der gemeinschaftlichen Grundfläche ABCD. Des ersten Seitenlinien endigen sich in EF, HG, des zweyten in RS,

RS, VT, die von jenen unterſchieden ſind, d. i. die Seitenlinie DR liegt nicht in der Ebene CE, worin beym erſten Falle die DK lag.

Da die gemeinſchaftliche Grundfläche ABCD von den gegenüberſtehenden EG, RT, gleichen Abſtand hat, wegen der gleichen Höhe, ſo ſind dieſe in einer Ebene ET. Verlängert man EF, HG, ſo ſchneiden ſie die verlängerten VR, TS in K, L, M, N, daß KL, MN, parallel ſind. Vollendet man das Parallelepipedon AL, ſo iſt daſſelbe wegen des erſten Falls dem AF ſowohl als dem AS gleich. Folglich AF = AS.

§. 458. Zuſ. (Fig. 178.) Jedes ſchiefe Parallelepipedon AE läßt ſich in ein ſenkrechtes von gleicher Höhe und auf eben der Grundfläche ABCD verwandeln.

Denn wenn man auf der Grundfläche ABCD in ihren Winkelpunkten die Perpendikel AK, BL, CF, DH errichtet, die von der Ebene EK geſchnitten werden, ſo erhält man ein ſenkrechtes Parallelepipedon AF §. 423, welches dem ſchiefen AE gleich iſt, §. 457.

§. 459. Lehrſ. Zwey Parallelepipeda von gleicher Höhe, auf gleichen, obwohl unähnlichen Grundflächen, ſind einander gleich.

Bew. I. (Fig. 179. 180.) wenn die Parallelepipeda AB, CD ſenkrecht ſind, da dann AM, CG ihre Grundflächen, und BM, DG ihre Höhen.

Man verlängere CE bis ET = AF, und vollende das Parallelogramm GT, und Parallelepipedon EN. Ferner werde GE nach K verlängert, und das Parallelogramm KT, welches mit AM gleiche Höhe habe, verzeichnet, auch das Parallelepipedon KP vollendet: ſo iſt KT = AM = CG, auch ſind die Rectangel EP, AQ, congruent. Betrachtet man dieſe als Grundflächen von KP, AB, deren

Höhen

Höhen mit den Höhen von KT, AM, einerley sind, so ist KP = AB, §. 457.

Nun ist CD : EN = CG : GT, und EN : KP = GT : KT, §. 453. Folglich ist CD : KP = CG : KT (Ar. §. 380.) Aber CG = KT, folglich CD = KP = AB.

II. Sind die Parallelepipeda schief, so kann man sie in senkrechte von gleichen Höhen und auf eben den Grundflächen verwandeln, §. 458, da dann diese nach dem ersten Falle gleich sind, folglich auch jene gleich seyn müssen.

§. 460. Zus. 1. Jedes Parallelepipedon, das nicht rechtwinklich ist, läßt sich in ein rechtwinkliches von gleicher Höhe und Grundfläche verwandeln, wenn man die schiefe Grundfläche in ein Rectangel verwandelt, und auf dieses Perpendikel setzt, wie §. 458.

§. 461. Zus. 2. Zwey gleiche Parallelepipeda AB, CD, auf gleichen Grundflächen AM, CG, müssen gleiche Höhe BM, DC, haben. Denn wäre BM > DG, so sey VM = DG, da dann CD = AV < AB, gegen das Angenommene.

§. 462. Zus. 3. Zwey gleiche Parallelepipeda von gleichen Höhen müssen gleiche Grundflächen haben.

§. 463. Lehrs. Zwey Parallelepipeda von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Bew. I. (Fig. 179. 180) Wenn die Parallelepipeda AB, CD, rechtwinklich sind.

Man verlängere CE bis ET = AF, und vollende das Parallelepipedon EN, da dann GT = AM, und EN = AB, §. 459, auch EN : CD = GT : CG, §. 453, folglich AB : CD = AM : CG.

II. Sind die Parallelepipeda nicht rechtwinklich, so verwandle man sie in rechtwinkliche, §. 460. Von diesen gilt

gilt der Satz vermöge des ersten Falls, folglich auch von jenen.

§. 464. Zus. Sind zwey Parallelepipeda gleich, so muß das, was auf einer größern Grundfläche steht, eine kleinere Höhe haben. Denn bey einer eben so großen oder größern Höhe wäre dieses Parallelepipedon größer als das andre, gegen das Angenommene.

§. 465. Lehrs. Wenn zwey Parallelepipeda gleich sind, so verhalten sich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen. Wiederum wenn sich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen verhalten, so sind die Parallelepipeda gleich.

Bew. I. (Fig. 179. 180.) Wenn die Parallelepipeda AB, CD, senkrecht sind.

1. Wenn AB=CD. Wäre nun auch AM=CG, so müßte BM=DG seyn, §. 462, da dann AM: CG=DG: BM. Wären aber AM, CG, ungleich, etwa CG > AM, so müßte DG < BM seyn, §. 464. Es sey daher MV= DG, und das Parallelepipedon AV vollendet. Da AB= CD, so ist AV: CD=AV: AB, §. 225. Nun ist AV: CD=AM: CG, und AV: AB=FV: FB, §. 463, =VM: BM=DG: BM. Folglich ist wiederum AM: CG=DG: BM.

2. Wenn AM: CG=DG: BM. Wäre nun AM= CG, so wäre auch BM=LG, folglich AB=CD. Wären aber AM, CG ungleich, etwa CG > AM, so wäre auch BM > DG. Es sey daher MV=DG, und das Parallelepipedon AV vollendet: so ist AV: CD=AM: CG, und AV: AB=VM: BM=DG: BM. Nun ist angenommen AM: CG=DG: BM. Folglich ist AV: AB=AV: CD, folglich AB=CD.

II. Sind die Parallelepipeda schief, so kann man sie in senkrechte verwandeln, §. 458, daher sie sich auch wie diese verhalten.

§. 466.

§. 466. Zuſ. Aus dem Beweiſe erhellet, daß ſenkrechte Parallelepipeda AB, AV, auf congruenten Grundflächen ſich wie ihre Höhen BM, VM verhalten. Nun können jede ſchiefe Parallelepipeda auf gleichen Grundflächen in ſenkrechte von eben den Höhen verwandelt werden; folglich verhalten ſich jede Parallelepipeda auf gleichen Grundflächen, wie ihre Höhen.

§. 467. Lehrſ. (Fig. 179. 180.) Jede zwey Parallelepipeda AB, CD, ſind in zuſammengeſetzter Verhältniß ihrer Höhen und Grundflächen.

Bew. Nimmt man wiederum zwey rechtwinkliche AB, CD, von denen der Schluß auf alle ſchiefe gilt, und vollendet ein drittes EN, welches mit AB gleiche Grundflächen und mit CD gleiche Höhe hat, ſo iſt AB : EN = BM : DG, §. 466, und EN : CD = GT : CG, §. 453, = AM : CG. Folglich iſt AB : CD = (BM : DG) + (AM : CG) (Arithm. §. 412.)

§. 468. Lehrſ. Jede zwey Prismen von gleicher Höhe verhalten ſich wie ihre Grundflächen.

Bew. I. Sind beide Prismen dreyſeitig, ſo iſt jedes die Hälfte von einem Parallelepipedon, §. 456. Folglich gilt von ihnen der Satz §. 463.

II. (Fig. 182.) Iſt das eine viel- das andre dreyſeitig, ſo läßt ſich das erſte in lauter dreyſeitige theilen, und man hat, wenn die dreyſeitigen Prismen P, Q, R, T, und ihre Grundflächen p, q, r, t heißen, P : T = p : t, Q : T = q : t, R : T = r : t, nach dem erſten Falle, folglich P + Q + R : T = p + q + r : t (Ar. §. 375.) = ABCDE : FGH.

III. Sind beide vielſeitig, ſo folgt der Satz aus dem zweyten Falle.

§. 469. Zuſ. Jede Prismen von gleichen Höhen und Grund-

alle Winkelpunkte der Grundfläche, so sind alle Seitenlinien gleich. Diese können Seiten der Pyramide, und die Pyramide kann gleichseitig heißen.

Denn da KMA = R, so ist KA² = KM² + MA² = KM² + MB² = KB² u. s. w.

§. 477. Zus. 2. Hat eine gleichseitige Pyramide, wie §. 476, eine reguläre Figur zur Grundfläche, so sind ihre Seitenflächen congruent, folglich deren Höhen, wie KR, KS, gleich.

§. 478. Zus. 3. Haben alle Seitenflächen einer Pyramide gegen die Grundfläche ähnliche Neigungen, daß also die Neigungswinkel, wie KRM, KSM, gleich sind, so sind auch MKR, MKS u. s. w. gleich, folglich die genannten Triangel congruent, §. 82, also KR = KS u. s. w. MR = MS u. s. w.

Demnach haben alle Seitenflächen gleiche Höhe, und ist M der Mittelpunkt, und MR der Halbmesser eines Kreises, der alle Seiten der Grundfläche berührt.

§. 479. Zus. 4. Ist M der Mittelpunkt eines Kreises, der um oder in die Figur der Grundfläche beschrieben ist, so kann die Pyramide senkrecht, und KM ihre Axe heißen.

§. 480. Lehrs. (Fig. 184.) Wird eine Pyramide ABCDE mit einer Ebene der Grundfläche parallel geschnitten, so ist die Durchschnittsfigur EFGH der Grundfläche ähnlich.

Bew. In jeder Seitenfläche der Pyramide, wie KAB, ist die Seite des Durchschnitts EF mit der Seite der Grundfläche AB parallel, §. 406, folglich jeder Winkel des Durchschnitts, wie EFG, dem ähnlich liegenden Winkel der Grundfläche ABC gleich, §. 393, auch KF : KB

KB=FE:BA=FG:BC u. ſ. w. Folglich iſt EFGH ∽ ABCD §. 232.

§. 481. Zuſ. 1. Iſt KM auf ABCD, folglich auch auf EFGH ſenkrecht, §. 405, ſo iſt NE mit MA parallel, und NE:MA=KN:KM=KE:KA=EF:AB.

§. 482. Zuſ. 2. Da EFGH ∽ ABCD, ſo iſt EFGH:ABCD=EF^q:AB$_q$ §. 273=KE^q:KA^q=NE^q:MA^q=KN$_q$:KM^q, §. 481.

§. 483. Zuſ. 3. Die abgeſchnittene Pyramide KEHGF iſt der ganzen KABCD ähnlich, §. 440.

§. 484. Zuſ. 4. Iſt KE=EA, ſo iſt auch KN=NM.

§. 485. Lehrſ. (Fig. 185.) Jede dreyſeitige Pyramide KABC läßt ſich in zwey congruente ihr ſelbſt ähnliche Pyramiden, und in zwey gleiche Priſmen, die zuſammen mehr als die Hälfte der ganzen Pyramide betragen, eintheilen.

Bew. Man halbire die Seitenlinien in E, F, G, ſo iſt EF mit BC, und FG mit CA parallel, folglich der Durchſchnitt EGF der Grundfläche BDC parallel, §. 402, folglich die abgeſchnittene Pyramide KEFG der ganzen ähnlich, §. 483. Nun halbire man auch die Seiten der Grundfläche in D, H, L, und ziehe FH, HD, DF, ſo erhält man die zweyte Pyramide FCHD, welche mit der erſten congruent iſt, weil FD mit AK, FG mit CA u. ſ. w. parallel iſt, woraus die Gleichheit der Seiten und Winkel, und die Congruenz der Triangel, folglich auch der Pyramiden §. 438. folgt.

Nun ziehe man noch GL, LH, ſo iſt BE mit GL und FH, und FG mit HL und DA parallel. Folglich beſteht, wenn man obgedachte beide Pyramiden wegge-

nommen hat, der noch übrige Körper aus zwey Prismen, dem einen über dem Triangel BHL, dem andern über dem Parallelogramm ADHL = 2△BHL. Diese Prismen sind die Hälften von zwey Parallelepipedis zwischen den beiden parallelen Ebenen EFG, ABC, auf den Grundflächen 2△BHL und ADHL. Da diese Parallelepipeda also gleich sind, §. 457, so sind es auch die Prismen.

Endlich denke man sich noch die Linien EL, EH, so ist leicht einzusehen, daß die Pyramide EBHL=HEFG, und kleiner als das Prisma sey. Folglich betragen die beiden Prismen zusammen mehr als die Hälfte der ganzen Pyramide KABC.

§. 486. Zus. 1. Die Pyramide KFEG hat mit dem Prisma FEG HLH gleiche Höhe, §. 484.

§. 487. Zus. 2. △ABC=4△BHL, weil △BHL =△CHD=¼ADHL, nach dem Beweise §. 485. ist.

§. 488. Zus. 3. Die beiden Pyramiden KFEG, ECDH, die man in §. 485. erhalten hat, lassen sich wieder eben so wie die ganze Pyramide KABC eintheilen. Setzt man solche Eintheilung immer so fort, so besteht die ganze Pyramide aus einer Menge Prismen, deren Summe S heiße, und aus zwey kleinen Pyramiden, deren Summe s heiße, so daß s kleiner als jeder gegebene körperliche Raum werden kann, §. 220.

§. 489. Zus. 4. Hätte man einen Körper Z, der um einen gegebenen körperlichen Raum d kleiner als die Pyramide KABC wäre, so ließe es sich machen, daß S in §. 488 >Z würde.

Denn man hat KABC=S+s=Z+d. Nun kann s<d werden, §. 488, da dann S>Z seyn muß.

§. 490.

§. 490. Lehrſ. (Fig. 185.) Werden zwey dreyſeitige Pyramiden, KABC, kabc, von gleicher Höhe, auf die Art des §. 488. eingetheilt, ſo verhalten ſich ihre Grundflächen ABC, abc, wie Summen der Priſmen von gleicher Anzahl in den beiden Pyramiden.

Bew. Man theile zuerſt jede der beiden Pyramiden in zwey Pyramiden und zwey Priſmen, §. 485. Da die Höhen der Pyramiden gleich ſind, und durch die Ebenen EFG, efg, halbirt werden, §. 484, ſo ſind die Pyramiden KEFG, kefg, ſowohl als die Priſmen EFGBHL, efgbhl, von gleicher Höhe, folglich letztere, die P, p heißen ſollen, in Verhältniß ihrer Grundflächen BHL, bhl §. 468. Nun iſt BHL : bhl = ABC : abc, §. 487, folglich iſt ABC : abc = P : p = 2P : 2p.

Nun theile man die Pyramiden KEFG, kefg, auf eben die Art, und nenne die mit P, p ähnlichliegenden Priſmen Q, q, ſo erhält man aus obigen Gründen FEG, feg, d. i. ABC : abc = 2Q : q. Auch gilt das Nämliche von den Priſmen in FCDH : fcdh. Demnach verhalten ſich alle ſechs Priſmen in den beiden ganzen Pyramiden wie die Grundflächen ABC : abc, und man ſieht leicht ein, daß, ſo oft man auch die Eintheilung wiederhole, dieſe Verhältniß für die Summen der Priſmen von gleicher Anzahl in beiden Pyramiden immerfort dieſelbe bleibe.

§. 491. Lehrſ. (Fig. 185.) Zwey dreyſeitige Pyramiden KABC, kabc, von gleicher Höhe, verhalten ſich wie ihre Grundflächen ABC, abc.

Bew. Wäre nicht abc : ABC = kabc : KABC, ſo ſey abc : ABC = kabc : Z, daß Z entweder < oder > KABC ſey, da dann erweislich, daß beides unmöglich iſt. Denn

1. Es sey $Z<KABC$: so kann man aus der Pyramide KABC so viele Prismen machen, daß ihre Summe $S>Z$ wird §. 489. Nun mache man aus der Pyramide kabc eben so viele Prismen, deren Summe s sey: so ist $s:S=abc:ABC$. Folglich wäre $s:S=kabc:Z$. Nun ist $S>Z$. Folglich wäre auch $s>kabc$, welches unmöglich ist.

2. Es sey $Z>KABC$: so ist nach der angenommenen Proportion auch $Z:kabc=ABC:abc$. Setzt man nun $Z:kabc=KABC:Y$, so muß $Y<kabc$ seyn, weil $KABC<Z$ ist. Nun geben beyde Proportionen, $ABC:abc=KABC:Y$, wo $Y<kabc$, welches nach dem ersten Falle unmöglich ist.

§. 492. Lehrs. Jede zwey Pyramiden von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Bew. I. (Fig. 186.) Ist die eine viel die andre dreyseitig: so läßt sich die erste in lauter dreyseitige theilen; und man hat, wenn die dreyseitigen Pyramiden P, Q, R, T, und ihre Grundflächen p, q, r, t heißen, $P:T=p:t$, $Q:T=q:t$ $R:T=r:t$ §. 491; folglich $P+Q+R:T=p+q+r:t$ (Ae. §. 375.) $=ABCDE:FGH$.

II. Sind beyde Pyramiden vielseitig: so folgt der Satz aus dem ersten Falle.

§. 493. Zus. Jede zwey Pyramiden von gleicher Höhe und gleichen Grundflächen, sind gleich.

§. 494. Lehrs. (Fig. 188.) Jedes dreyseitige Prisma ABCDEF läßt sich in drey gleiche dreyseitige Pyramiden theilen.

Bew. In des Prisma Seitenflächen ziehe man die Diagonalen BD, DC, CE, so schneidet die Ebene durch DC, CE, die dreyseitige Pyramide CDEF ab, und den übrigen Körper theilet die Ebene durch BD, DC, in die drey-

dreyseitigen Pyramiden BDCA und BDCE. Von diesen drey Pyramiden haben die erste und zweyte die gleichen Grundflächen DEF, ABC, und dieselbe Höhe CF; die beyden letzten aber BDA, BDE, und dieselbe Spitze C, also auch dieselbe Höhe. Demnach sind die beyden ersten, und die beyden letzten, folglich alle drey, einander gleich, §. 493.

§. 495. Zus. 1. Jede Pyramide ist der dritte Theil von einem Prisma, auf einerley Grundfläche und von einerley Höhe.

Denn ist die Pyramide dreyseitig; so ist der Satz aus §. 494. klar. Ist sie vielseitig: so kann man sie in dreyseitige zerlegen; da dann der Satz aus dem ersten Falle erhellet.

§. 496. Zus. 2. Pyramiden verhalten sich also wie Prismen, die mit ihnen gleiche Grundflächen und Höhen haben, und es gelten von Pyramiden auch alle übrige Verhältnisse, die §. 469. von Prismen bewiesen worden, als:

1. bey gleichen Pyramiden sind die Grundflächen in umgekehrter Verhältniß der Höhen.

2. Pyramiden auf gleichen Grundflächen verhalten sich wie die Höhen.

3. Pyramiden sind in zusammengesetzter Verhältniß ihrer Grundflächen und Höhen.

4. Aehnliche Pyramiden verhalten sich wie die Würfel ihrer ähnlich liegenden Seiten §. 471.

5. Vom Cylinder.

§. 497. Erkl. (Fig. 189.) Ein Cylinder ist der körperliche Raum zwischen zweyen gleichen und parallelen Kreisen (den Grundflächen), deren Mittelpunkte

eine gerade Linie AB (die Axe) verbindet, und zwischen einer dergestalt gekrümmten Oberfläche, daß jede die Grundfläche berührende und mit der Axe AB parallele Linie GH (die Seite) ganz in dieselbe fällt. Die Höhe des Cylinders ist der Abstand seiner Grundflächen.

§. 498. Erkl. Ein Cylinder heißt senkrecht, wenn die Axe auf der Grundfläche senkrecht ist, sonst aber schief.

§. 499. Zus. Ein senkrechter Cylinder hat lauter gleiche Seitenlinien, und heißt daher gleichseitig; alle andre heißen ungleichseitig.

§. 500. Anm. Nach dem Euklid entsteht der Cylinder, wenn sich ein Rechteck um seinen unverrückten Perpendikel rings umdreht. Dies giebt aber blos den senkrechten Cylinder.

§. 501. Erklär. Zwey Cylinder heißen ähnlich, wenn die Axen ähnliche Neigungen gegen die Grundflächen, und einerley Verhältniß gegen die Durchmesser der Grundflächen haben.

§. 502. Lehrs. (Fig. 189.) Ein Cylinder wird bestimmt, wenn auf eines Kreises Ebene in seinem Mittelpunkte A eine gerade Linie AB unter einem gewissen Winkel steht.

Bew. Durch einen willkührlichen Punkt H im Umringe des Kreises sey die gerade Linie HG mit AB parallel. Geht nun durch des Kreises Umring eine gekrümmte Oberfläche, in welche jede solche Parallele, wie HG, fällt, und durch den andern Endpunkt B der Linie AB eine Ebene mit des Kreises Ebene parallel, so ist nunmehr der cylindrische Raum völlig eingeschlossen, und giebt einen bestimmten Cylinder.

§. 503.

§. 503. Aufg. (Fig. 189.) Die zweyte Grundfläche des §. 498. beschriebenen Cylinders ist ein der ersten gleicher Kreis, und dessen Mittelpunkt der andre Endpunkt B der Linie AB.

Bew. Da HG und AB parallel, so geht durch sie eine Ebene, und diese schneidet die beiden durch B und A gelegten parallelen Ebenen in den Parallelen BG, AH, §. 406. Folglich ist AG ein Parallelogramm, und BG=AH. Eben so wird dieses von jedem Paar dergleichen Linien, z. E. BC, AD, bewiesen. Nun sind alle Linien AH, AD u. s. w. gleich. Folglich sind auch alle Linien BG, BC u. s. w. gleich. Folglich ist B der Mittelpunkt eines Kreises durch G, C u. s. w. dessen Halbmesser BG=AH ist.

§. 504. Zus. 1. Jeder mit der Grundfläche des Cylinders parallel geführte Schnitt FML ist ein der Grundfläche gleicher Kreis, dessen Mittelpunkt F im Durchschnitte mit der Axe AB ist.

§. 505. Zus. 2. Jeder Schnitt des Cylinders durch die Axe AB ist ein Parallelogramm, welches von den Durchmessern der Grundflächen und von zwey gegenüberstehenden Seiten des Cylinders eingeschlossen ist, z. E. CK, weil CD mit NK und GN mit DK parallel ist.

§. 506. Lehrs. (Fig. 190.) Ein Cylinder und ein Prisma von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Bew. Der Cylinder K habe zur Grundfläche den Kreis A, das Prisma P irgend eine geradlinige Figur p, so wird behauptet, daß P:K=p:k. Denn man setze P:K =p:z, so kann z weder <k noch >k seyn, und ist folglich =k. Denn

1. Es sey z<k. In den Kreis k beschreibe man ein reguläres Polygon, welches >z sey, §. 300. Gesetzt dies

dies wäre abcde, und heiße q. Durch alle Winkelpunkte von q ziehe man mit des Cylinders Axe Parallellinien, welche in des Cylinders Oberfläche fallen, und lege durch dieselben Ebenen: so wird ein Prisma Q im Cylinder beschrieben, dessen Grundfläche q ist; da dann Q:P =q:p. §. 468. Nun ist angenommen P:K=p:z. Folglich müßte Q:K=q:z seyn (Ar. §. 380). Nun ist q>z, Folglich wäre Q>K, welches unmöglich ist.

2. Es sey z>k. Um den Kreis k beschreibe man ein reguläres Polygon, welches <z sey §. 301. Gesetzt dies wäre ABCDE, und heiße r; so werden seine Seiten den Kreis in den Punkten a, b, c, d, e berühren. Durch diese Berührungspunkte ziehe man mit des Cylinders Axe Parallellinien, welche in des Cylinders Oberfläche fallen, und lege durch dieselben und die Seiten des äußern Polygons Ebenen: so wird ein Prisma R um den Cylinder beschrieben, dessen Grundfläche r ist; da dann R:P=r:p §. 468. Nun ist angenommen P:K=p:z. Folglich müßte R:K=r:z seyn (Ar. §. 380). Nun ist r<z. Folglich müßte R<K seyn, welches unmöglich ist.

§. 507. Zus. Ein Cylinder ist einem Prisma oder andern Cylinder gleich, die mit ihm gleiche Höhen und gleiche Grundflächen haben. Daher verhalten sich Cylinder von gleichen Höhen wie ihre Grundflächen §. 468, und sind gleich, wenn bey gleichen Höhen auch ihre Grundflächen gleich sind. Ueberhaupt gelten alle Verhältnisse, die von Prismen §. 469. bewiesen worden, auch von Cylindern. Als

1. bey gleichen Cylindern sind die Grundflächen in umgekehrter Verhältniß der Höhen.

2. Cylinder auf gleichen Grundflächen verhalten sich wie die Höhen.

3. Cy-

3. Cylinder sind in zusammengesetzter Verhältniß ihrer Grundflächen und Höhen.

4. Aehnliche Cylinder verhalten sich wie die Würfel ihrer Höhen, oder der Durchmesser ihrer Grundflächen. §. 471.

5. Ein Cylinder ist dreymal so groß als eine Pyramide, die mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat. §. 495.

§. 508. Erkl. (Fig. 191.) Hat man zwey Cylinder BD, EG, mit concentrischen Grundflächen: so giebt das zwischen den Oberflächen beyder Cylinder enthaltene, eine cylindrische Röhre, tubus cylindricus, welche senkrecht oder schief ist, so wie es die beyden Cylinder sind.

§. 509. Zus. Wird das Rectangel ABKT um KT rings umgedrehet: so beschreibt es den senkrechten Cylinder, und das Stück desselben ABEH die senkrechte Röhre; da dann BC die auswendige, EF aber die inwendige Weite der Röhre, und BE ihre Dicke giebt, auch EC der Unterschied zwischen der Dicke und der auswendigen Weite ist. Setzt man BE auf EC in E senkrecht, und vollendet das Rectangel BEEC: so soll dasselbe der Kürze wegen das Rectangel der Röhre heißen.

§. 510. Lehrs. (Fig. 191.) Für die senkrechte Röhre AEFD ist das Rectangel der Röhre BEEC dem Unterschiede der Quadrate gleich, deren Seiten KB, KE, die Hälften der auswendigen und inwendigen Weite sind.

Bew. Es sey EL auf BC senkrecht: so ist BE:EL =EL:EC §. 264, folglich das Rectangel BEEC=EL^q §. 242. =KL^q — KE^q §. 133.

§. 511. Lehrs. (Fig. 191.) Die senkrechte Röhre AEFD verhält sich zu einem Cylinder MR von gleicher Höhe,

Höhe, wie das Rechteck der Röhre BEEC zu dem Quadrate, deſſen Seite OM der Halbmeſſer der Grundfläche des Cylinders iſt.

Bew. Da BD:EG=KB^q:KE^q, §. 303, ſo iſt BD — EG:EG=KB^q — KE^q:KE^q (Ar. §. 373.) Nun iſt BD — EG=AEFD, §. 508, und KB^q — KE^q = BEEC, §. 510. Folglich iſt AEFD:EG=BEEC:KE^q. Nun iſt EG:MR=KE^q:OM^q, §. 507. Folglich iſt AEFD:MR =BEEC:OM^q, (Ar. §. 380.)

6. Vom Kegel.

§. 512. Lehrſ. (Fig. 192.) Ein Kegel, conus, iſt der körperliche Raum zwiſchen einem Kreiſe (der Grundfläche) und zwiſchen einer dergeſtalt gekrümmten Oberfläche, daß jede von einem außerhalb der Grundfläche befindlichen Punkte A (der Spitze) nach einem willkührlichen Punkte R im Umringe der Grundfläche gezogene gerade Linie AR (die Seite) ganz in dieſelbe fällt.

Die von der Spitze nach der Grundfläche Mittelpunkt gezogene Linie AC heißt die Axe des Kegels. Die Höhe des Kegels iſt der Abſtand der Spitze von der Grundfläche.

§. 513. Erkl. Ein Kegel heißt ſenkrecht, wenn die Axe auf der Grundfläche ſenkrecht iſt, ſonſt aber ſchief.

§. 514. Zuſ. 1. (Fig. 192) Der Schnitt eines jeden Kegels durch die Axe AC iſt ein Triangel, z. E. ABD, deſſen Grundlinie der Durchmeſſer der Grundfläche, und deſſen Schenkel zwey gegenüberſtehende Seiten des Kegels ſind.

§. 515. Zuſ. 2. Ein ſenkrechter Kegel hat lauter gleiche

che Seitenlien, und heißt gleichseitig, alle andre heißen ungleichseitig.

§. 516. Anm. Nach dem Erklärten entsteht der Kegel, wenn sich ein rechtwinklicher Triangel um seinen unverrückten Perpendikel rings umdrehet; dies giebt aber blos den senkrechten Kegel.

§. 517. Erkl. Zwey Kegel heißen ähnlich, wenn die Axen ähnliche Neigungen gegen die Grundflächen, und einerley Verhältniß gegen die Durchmesser der Grundflächen haben.

§. 518. Lehrs. (Fig. 192.) Ein Kegel wird bestimmt, wenn man außerhalb der Ebene eines Kreises um C einen Punkt A annimmt, daß die Linie AC einen gewissen Winkel mit solcher Ebene macht.

Bew. Geht durch A und des Kreises Umring eine gekrümmte Oberfläche, in welche jede Linie wie AR fällt, so ist der kegelförmige Raum nunmehr völlig eingeschlossen, und giebt einen bestimmten Kegel.

§. 519. Lehrs. (Fig. 192.) Jeder mit der Grundfläche des Kegels parallel geführte Schnitt ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt E in der Axe AC ist.

Bew. Die Ebenen ACB, ACR u. s. w. schneiden die parallelen Ebenen des Durchschnitts und der Grundfläche in den parallelen Linien EF, CB, und EK, CR, §. 406. Folglich ist AC: AE = CB: EF = CR: EK, §. 243. Nun ist CB = CR, folglich ist auch EF = EK, §. 229. Demnach sind F, K, und so auch alle übrige Punkte der Durchschnittsfigur im Umfange eines Kreises, der den Punkt der Axe E zum Mittelpunkte und EF = EK zum Halbmesser hat. §. 153.

§. 520. Zus. Demnach verhält sich der Schnitt des Kegels zur parallelen Grundfläche wie $EF^q : CB^q$ §. 303 $= AF^q : AB^q = AE^q : AC^q = AN^q : AM^q$, wo ANM die Höhe bedeutet, wenn der Kegel schief wäre.

§. 521.

§. 521. Erkl. (Fig. 193.) In dem ſchiefen Kegel ABCD ſey △ABD ein Schnitt durch die Axe §. 514, und in deſſen Ebene durch einen willkührlichen Punkt E der Seite AB die Linie EF ſo gezogen, daß AEF=ADB, folglich auch AFE=ABD iſt; auch auf dieſer Linie EF eine Ebene ſenkrecht auf ABD geſtellt, welche des Kegels Oberfläche in ELF ſchneidet, ſo heißt ein ſolcher Schnitt des ſchiefen Kegels ſein **Wechſelſchnitt**, ſectio alterna ſeu ſubcontraria.

§. 522. Lehrſ. (Fig. 193.) Jeder Wechſelſchnitt des ſchiefen Kegels iſt ein Kreis.

Bew. Durch einen willkührlichen Punkt G der Linie EF gehe ein Schnitt mit BCD parallel, und gebe daher einen Kreis HLK, §. 519, der den Wechſelſchnitt in GL ſchneidet, ſo iſt GL auf EF ſowohl als auf HK ſenkrecht, §. 415, folglich HG:GL=GL:GK, §. 283. Nun iſt KFG=EBD=EHG, und bey G Scheitelwinkel. Folglich iſt GE:HG=GK:GF, §. 257, folglich GE:GL =GL:GF, (Ar. §. 380.) folglich ELF ein Kreis, §. 264. 283.

§. 523. Lehrſ. (Fig. 190.) Ein Kegel und eine Pyramide von gleichen Höhen verhalten ſich wie ihre Grundflächen.

Bew. Iſt dem in §. 506. völlig ähnlich. Nämlich der Kegel K habe zur Grundfläche den Kreis k, die Pyramide P aber irgend eine geradlinige Figur p, ſo wird behauptet, daß P:K=p:k. Denn man ſetze P:K=p:z, ſo kann z weder < noch > k ſeyn, und iſt folglich =k.

1. Es ſey z<k. In den Kreis k beſchreibe man ein reguläres Polygon q oder abcde>z, §. 300. Von der Spitze des Kegels ziehe man gerade Linien nach allen Winkelpunkten des Polygons, ſo wird eine Pyramide Q in den Kegel beſchrieben, deren Grundfläche q iſt, da dann

Q:P

Q:P=q:p, §. 468. Nun iſt angenommen P:K=p:z, folglich wäre Q:K=q:z, (Ar. §. 380.) Nun iſt q>z, folglich wäre Q>K, welches unmöglich iſt.

2. Es ſey z>K. Um den Kreis beſchreibe man ein reguläres Polygon r oder ABCDE<z, §. 301. Von der Spitze des Kegels ziehe man gerade Linien nach allen Winkelpunkten des Polygons, ſo iſt eine Pyramide R um den Kegel beſchrieben, deren Grundfläche r iſt, da dann R:P =r:p §. 468. Nun iſt angenommen P:K=p:z. Folglich wäre R:K=r:z. (Ar. §. 380.) Nun iſt r<z, folglich wäre R<K, welches unmöglich iſt.

§. 524. Zuſ. Ein Kegel iſt einer Pyramide gleich, die mit ihm gleiche Höhe und Grundfläche hat. Daher verhalten ſich Kegel von gleichen Höhen wie ihre Grundflächen, §. 492, und ſind gleich, wenn bey gleichen Höhen auch ihre Grundflächen gleich ſind. Ueberhaupt gelten alle Verhältniſſe, die von Pyramiden §. 496 bewieſen worden, auch von Kegeln. Als

1. Bey gleichen Kegeln ſind die Grundflächen in umgekehrter Verhältniß der Höhen.

2. Kegel auf gleichen Grundflächen verhalten ſich wie die Höhen.

3. Kegel ſind in zuſammengeſetzter Verhältniß ihrer Grundflächen und Höhen.

4. Aehnliche Kegel verhalten ſich wie die Würfel ihrer Höhen oder der Durchmeſſer ihrer Grundflächen.

5. Ein Cylinder iſt dreymal ſo groß als ein Kegel, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat, §. 507.

7. Von der Kugel.

§. 525. Erkl. (Fig. 194.) Eine Kugel, sphaera, ist der körperliche Raum, den eine gekrümmte Fläche (die Kugelfläche, superficies sphaerica,) allenthalben so einschließt, daß alle ihre Punkte von einem innerhalb des Raums befindlichen Punkte C (dem Mittelpunkte) gleichweit abstehen.

Der Kugel Durchmesser, diameter, ist jede von der Kugelfläche begränzte und durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie AB. Ihr Halbmesser, radius, ist jede vom Mittelpunkte bis zur Kugelfläche gehende gerade Linie CF.

§. 526. Zus. 1. Alle Halbmesser, folglich auch alle Durchmesser einer Kugel sind einander gleich, und der Durchmesser ist der doppelte Halbmesser.

§. 527. Zus. 2. Jeder Punkt liegt innerhalb der Kugel, oder in der Kugelfläche, oder außerhalb, je nachdem sein Abstand vom Mittelpunkte der Kugel kleiner, oder eben so groß, oder größer als ihr Halbmesser ist.

§. 528. Lehrs. (Fig. 187.) Wird die Kugel von einer Ebene geschnitten, so ist jeder solcher Schnitt ein Kreis, und heißt ein Kugelkreis.

Bew. I. Geht der Schnitt LNM durch der Kugel Mittelpunkt C, so sind alle Linien in seiner Ebene aus C an seinen Umfang, wie CL, CN, CT, Halbmesser der Kugel. Folglich ist der Schnitt ein Kreis, §. 153, der mit der Kugel einerley Mittelpunkt und Halbmesser hat.

II. Geht der Schnitt DGE nicht durch der Kugel Mittelpunkt C, und man fället von C auf seine Ebene einen Perpendikel, so trifft er sie innerhalb der Kugel in einem Punkte F. Denn wäre dies nicht, sondern etwa CG der Perpendikel, so wäre CF>CG, also F außerhalb der

Ku-

Kugel, gegen das Angenommene. Es sey also CF der Perpendikel, und man ziehe nach einem willkührlichen Punkt G seines Umfangs CG, FG, so ist allemal $FG^q = CG^q - CF^q$, und unveränderlich. Folglich ist der Schnitt ein Kreis, dessen Mittelpunkt F, und Halbmesser FG.

§. 529. Zus. 1. Der Perpendikel von der Kugel Mittelpunkt C auf die Ebene des Schnitts, trift deren Mittelpunkt F, wie aus dem Beweise §. 528. erhellet. Daher ist die Linie FG, welche beide Mittelpunkte verbindet, allemal senkrecht auf den Schnitt.

§. 530. Zus. 2. Ist eine gerade Linie auf dem Schnitte in seinem Mittelpunkte F senkrecht, so geht sie durch der Kugel Mittelpunkt C.

Denn gienge sie nicht durch C, wie FH, so ziehe man CF, welche auch senkrecht ist, §. 529, daß also zwey Perpendikel FC, FH wären, gegen §. 396.

§. 531. Zus. 3. Da $CN = CG$, aber $FG \leq CG$, so giebt jeder Schnitt durch der Kugel Mittelpunkt C immer einerley **größten Kreis**, jeder andre Schnitt aber einen **kleinern Kreis**.

§. 532. Zus. 4. Da CF der Abstand des Schnitts von der Kugel Mittelpunkte C, und allemal $FG^q = CG^q - CF^q$, so ist FG, folglich der Kugelschnitt, desto größer, je kleiner sein Abstand CF, und desto kleiner, je größer sein Abstand CF ist.

§. 533. Zus. 5. Kugelkreise in gleichem Abstande sind gleich, und gleiche Kugelkreise sind in gleichem Abstande von der Kugel Mittelpunkte.

§. 534. Zus. 6. (Fig. 194.) Eine gerade Linie DE, die irgend zwey Punkte der Kugelfläche verbindet, fällt ganz innerhalb der Kugel.

Denn eine Ebene durch DE und der Kugel Mittelpunkt G giebt einen größten Kreis, deſſen Sehne DE iſt, welche ganz in der Ebene des Kreiſes, folglich innerhalb der Kugel liegt.

§. 535. Zuſ. 7. Jede gerade Linie DE durch einen Punkt G innerhalb der Kugel ſchneidet allemal die Kugelfläche nur in zweyen Punkten.

§. 536. Zuſ. 8. Zwey Kreiſe auf der Kugelfläche können einander nur zweymal ſchneiden.

Denn ſie müſſen ſich in den Endpunkten des gemeinſchaftlichen Durchſchnitts ihrer Ebenen ſchneiden.

§. 537. Zuſ. 9. (Fig. 187.) Alle größte Kreiſe ALB, ANB, müſſen einander ſchneiden und halbiren.

Denn der Kugel Mittelpunkt iſt in ihren Ebenen, durch welchen auch der gemeinſchaftliche Durchmeſſer, worin ſie einander ſchneiden, geht.

§. 538. Zuſ. 10. Wenn Kreiſe ALB, ANB, einander halbiren, ſo ſind ſie größte Kreiſe.

Denn ihr Durchſchnitt AB muß beider Durchmeſſer ſeyn, der folglich durch beider Mittelpunkt C geht. Hätte nun die Kugel einen andern Mittelpunkt, ſo wäre die Linie von dieſem Punkte nach C, auf den Ebenen beider Kreiſe ſenkrecht, §. 529, gegen §. 396.

§. 539. Lehrſ. (Fig. 187.) Jeder größte Kreis LNM halbirt die Kugel.

Bew. Auf ſeiner Ebene ſey AB in C ſenkrecht, und in ſeinem Umringe ein willkührlicher Punkt T, auch MCZ = MCT. Durch A, C, Z ſey eine Ebene gelegt, ſo wie durch B, C, T, ſo ſind ACZ, BCT rechte Winkel, und AZ, BT, Quadranten auf der Kugelfläche.

Drehet man nun das unterſte Stück der Kugel um LM herum, bis die Ebene LTM auf die Ebene LZM fällt,

fällt, so fällt CB auf CA, B auf A, CT auf CZ, BT auf AZ. Demnach passen für jeden angenommenen Winkel MCT die beiden Ausschnitte der Kugel in einander, folglich auch beide Kugelstücke, worein der grösste Kreis LNM die Kugel theilet.

§. 540. Zus. 1. Der grösste Kreis LNM ist die gemeinschaftliche Grundfläche der beiden Halbkugeln. Mit ihr gehe durch A eine Ebene parallel, so ist die Halbkugel zwischen diesen Ebenen, und AC ihre Höhe.

§. 541. Zus. 2. Eine Halbkugel wird beschrieben, wenn sich der Quadrant ACM um den Halbmesser AC, eine ganze Kugel, wenn sich der halbe Kreis AMB um den Durchmesser AB ringsum drehet, wobey CM den grösten Kreis MNL beschreibt.

§. 542. Erkl. (Fig. 194.) Eine Ebene MN berühret die Kugel, wenn sie an die Kugelfläche so stößt, daß kein Punkt von ihr innerhalb der Kugel fällt, oder daß sie die Kugel nicht schneidet.

§. 543. Zus. 1. Eine Ebene MN kann die Kugel nur in einem Punkte B berühren.

Denn wäre noch ein Punkt H, so wäre die Linie BH innerhalb der Kugel, folglich auch die Ebene MN, und berührte also die Kugel nicht.

§. 544. Zus. 2. Die Ebene MN berührt die Kugel, wenn sie durch einen Punkt B der Kugelfläche auf den Halbmesser CB senkrecht ist.

§. 545. Zus. 3. Die Linie CB von der Kugel Mittelpunkte C nach dem Berührungspunkte B ist auf die berührende Ebene senkrecht.

Denn wäre ein anderer Perpendikel CK, so wäre CB > CK, gegen §. 544.

§. 546. Zuſ. 4. Der Perpendikel von C auf die berührende Ebene MN trifft den Berührungspunkt B, und wiederum der Perpendikel auf MN in B trifft C.

Denn wäre dies nicht, ſondern CK, BL ſolche Perpendikel, und man zieht CB, ſo iſt dieſe auch ſenkrecht auf MN, §. 545, und man hätte aus C und in B zwey Perpendikel, gegen §. 396.

§. 547. Erkl. (Fig. 187.) Der Pol eines Kugelkreiſes DGE heißt ein Punkt A oder B, der von allen Punkten ſeines Umfanges gleichweit abſteht.

Die Axe des Kugelkreiſes iſt die gerade Linie AB, die zwey Pole deſſelben A, B, verbindet.

§. 548. Lehrſ. (Fig. ~~194~~ 187.) Der Perpendikel FR auf der Ebene des Kugelkreiſes DGE in ſeinem Mittelpunkt F trifft zu beiden Seiten verlängert die beiden Pole des Kugelkreiſes A, B.

Bew. Im Umfange des Kugelkreiſes ſey ein willkührlicher Punkt G. Zieht man nun FG, und AG, BG, ſo iſt $AG^2 = AF^2 + FG^2$ unveränderlich, und eben ſo $BG^2 = BF^2 + FG^2$.

§. 549. Zuſ. 1. In dem auf der Ebene des Schnitts in ſeinem Mittelpunkte F ſenkrechten Durchmeſſer der Kugel AB liegen allemal die vier Punkte: die Mittelpunkte der Kugel C, und des Schnitts F, und ſeine beiden Pole A, B.

§. 550. Zuſ. 2. Der Perpendikel AF vom Pole A eines Kugelkreiſes DGE auf ſeine Ebene, trifft ſeinen Mittelpunkt F.

Denn $FG^2 = AG^2 - AF^2$ iſt unveränderlich, wo auch G in DGE angenommen worden.

§. 551. Zuſ. 3. Die Linie AF von einem Pole des Schnitts

Schnitts, nach seinem Mittelpunkte ist auf seiner Ebene senkrecht.

Denn sonst träfe ein Perpendikel von A auf den Schnitt nicht seinen Mittelpunkt, gegen §. 550.

§. 552. Lehrs. (Fig. 187.) Die Axe AB eines Kugelschnitts DGE ist auf seiner Ebene im Mittelpunkte senkrecht, und geht auch durch der Kugel Mittelpunkt.

Bew. Durch F lege man beliebig die Linie DE in der Ebene des Schnitts, und ziehe AD, AE, EB, BD, so ist AD=AE, DB=BE, und AB=AB. Folglich ist DAF =EAE, §. 48. Nun ist auch ADF=AEF, §. 44, und AF=AF. Folglich ist AFD=AFE=R, und FD=FE, §. 82.

Eben so beweist man AFG=R, und FG=FK. Folglich ist AF auf dem Kugelschnitte im Mittelpunkte senkrecht §. 389, und geht also auch durch der Kugel Mittelpunkt, §. 530.

§. 553. Zus. 1. Geht ein Kugelkreis ALBM durch eines andern DGE Pole A, B, so steht er auf ihm senkrecht, und halbirt ihn, und ist ein größter Kreis.

Denn da AB auf der Ebene DGE durch F und C senkrecht ist, §. 552, und in der Ebene ALBM liegt, so ist diese auf jener senkrecht, §. 409, schneidet sie im Durchmesser DE, und geht durch der Kugel Mittelpunkt, d. i. halbirt die andre, und ist ein größter Kreis.

§. 554. Zus. 2. Die Bogen dieses Kreises ALBM, und eines jeden andern ANB durch dieselben Pole, zwischen dem Kreise DGE und jedem seiner Pole, sind gleich, weil ihre Sehnen gleich sind.

So sind z. E. die Bogen ALD, AME, ANG, gleich, und eben so die Bogen BD, BE, BG.

Höhe, wie das Rechteck der Röhre BEEC zu dem Quadrate, dessen Seite OM der Halbmesser der Grundfläche des Cylinders ist.

Bew. Da BD:EG=KB^q:KE^q, §. 303, so ist BD —EG:EG=KB^q—KE^q:KE^q (Ar. §. 373.) Nun ist BD—EG=AEFD, §. 508, und KB^q—KE^q=BEEC, §. 510. Folglich ist AEFD:EG=BEEC:KE^q. Nun ist EG:MR=KE^q:OM^q, §. 507. Folglich ist AEFD:MR =BEEC:OM^q, (Ar. §. 380.)

6. Vom Kegel.

§. 512. Lehrs. (Fig 192.) Ein Kegel, conus, ist der körperliche Raum zwischen einem Kreise (der Grundfläche) und zwischen einer dergestalt gekrümmten Oberfläche, daß jede von einem außerhalb der Grundfläche befindlichen Punkte A (der Spitze) nach einem willkührlichen Punkte R im Umringe der Grundfläche gezogene gerade Linie AR (die Seite) ganz in dieselbe fällt.

Die von der Spitze nach der Grundfläche Mittelpunkt gezogene Linie AC heißt die Axe des Kegels. Die Höhe des Kegels ist der Abstand der Spitze von der Grundfläche.

§. 513. Erkl. Ein Kegel heißt senkrecht, wenn die Axe auf der Grundfläche senkrecht ist, sonst aber schief.

§. 514. Zus. 1. (Fig. 192) Der Schnitt eines jeden Kegels durch die Axe AC ist ein Triangel, z. E. ABD, dessen Grundlinie der Durchmesser der Grundfläche, und dessen Schenkel zwey gegenüberstehende Seiten des Kegels sind.

§. 515. Zus. 2. Ein senkrechter Kegel hat lauter gleiche

che Seitenlien, und heißt gleichseitig, alle andre heißen ungleichseitig.

§. 516. Anm. Nach dem Erklärt entsteht der Kegel, wenn sich ein rechtwinklicher Triangel um seinen unverrückten Perpendikel rings umdrehet; dies giebt aber blos den senkrechten Kegel.

§. 517. Erkl. Zwey Kegel heißen ähnlich, wenn die Axen ähnliche Neigungen gegen die Grundflächen, und einerley Verhältniß gegen die Durchmesser der Grundflächen haben.

§. 518. Lehrs. (Fig. 192.) Ein Kegel wird bestimmt, wenn man außerhalb der Ebene eines Kreises um C einen Punkt A annimmt, daß die Linie AC einen gewissen Winkel mit solcher Ebene macht.

Bew. Geht durch A und des Kreises Umring eine gekrümmte Oberfläche, in welche jede Linie wie AR fällt, so ist der kegelförmige Raum nunmehr völlig eingeschlossen, und giebt einen bestimmten Kegel.

§. 519. Lehrs. (Fig. 192.) Jeder mit der Grundfläche des Kegels parallel geführte Schnitt ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt E in der Axe AC ist.

Bew. Die Ebenen ACB, ACR u. s. w. schneiden die parallelen Ebenen des Durchschnitts und der Grundfläche in den parallelen Linien EF, CB, und EK, CR, §. 406. Folglich ist AC: AE = CB: EF = CR: EK, §. 243. Nun ist CB = CR, folglich ist auch EF = EK, §. 229. Demnach sind F, K, und so auch alle übrige Punkte der Durchschnittsfigur im Umfange eines Kreises, der den Punkt der Axe E zum Mittelpunkte und EF = EK zum Halbmesser hat. §. 153.

§. 520. Zus. Demnach verhält sich der Schnitt des Kegels zur parallelen Grundfläche wie $EF^q : CB^q$ §. 303 $= AF^q : AB^q = AE^q : AC^q = AN^q : AM^q$, wo ANM die Höhe bedeutet, wenn der Kegel schief wäre.

§. 521.

§. 521. Erkl. (Fig. 193.) In dem schiefen Kegel ABCD sey △ABD ein Schnitt durch die Axe §. 514, und in dessen Ebene durch einen willkührlichen Punkt E der Seite AB die Linie EF so gezogen, daß AEF=ADB, folglich auch AFE=ABD ist; auch auf dieser Linie EF eine Ebene senkrecht auf ABD gestellt, welche des Kegels Oberfläche in ELF schneidet, so heißt ein solcher Schnitt des schiefen Kegels sein Wechselschnitt, sectio alterna seu subcontraria.

§. 522. Lehrs. (Fig. 193.) Jeder Wechselschnitt des schiefen Kegels ist ein Kreis.

Bew. Durch einen willkührlichen Punkt G der Linie EF gehe ein Schnitt mit BCD parallel, und gebe daher einen Kreis HLK, §. 519, der den Wechselschnitt in GL schneidet, so ist GL auf EF sowohl als auf HK senkrecht, §. 415, folglich HG:GL=GL:GK, §. 283. Nun ist KFG=EBD=EHG, und bey G Scheitelwinkel. Folglich ist GE:HG=GK:GF, §. 257, folglich GE:GL =GL:GF, (Ar. §. 380.) folglich ELF ein Kreis, §. 264. 283.

§. 523. Lehrs. (Fig. 190.) Ein Kegel und eine Pyramide von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Bew. Ist dem in §. 506. völlig ähnlich. Nämlich der Kegel K habe zur Grundfläche den Kreis k, die Pyramide P aber irgend eine geradlinige Figur p, so wird behauptet, daß P:K=p:k. Denn man setze P:K=p:z, so kann z weder < noch > k seyn, und ist folglich =k.

1. Es sey z<k. In den Kreis k beschreibe man ein reguläres Polygon q oder abcde>z, §. 300. Von der Spitze des Kegels ziehe man gerade Linien nach allen Winkelpunkten des Polygons, so wird eine Pyramide Q in den Kegel beschrieben, deren Grundfläche q ist, da dann

Q:P

Q:P=q:p, §. 468. Nun iſt angenommen P:K=p:z, folglich wäre Q:K=q:z, (Ar. §. 380.) Nun iſt q>z, folglich wäre Q>K, welches unmöglich iſt.

2. Es ſey z>K. Um den Kreis beſchreibe man ein reguläres Polygon r oder ABCDE<z, §. 301. Von der Spitze des Kegels ziehe man gerade Linien nach allen Winkelpunkten des Polygons, ſo iſt eine Pyramide R um den Kegel beſchrieben, deren Grundfläche r iſt, da dann R:P =r:p §. 468. Nun iſt angenommen P:K=p:z. Folglich wäre R:K=r:z. (Ar. §. 380.) Nun iſt r<z, folglich wäre R<K, welches unmöglich iſt.

§. 524. Zuſ. Ein Kegel iſt einer Pyramide gleich, die mit ihm gleiche Höhe und Grundfläche hat. Daher verhalten ſich Kegel von gleichen Höhen wie ihre Grundflächen, §. 492, und ſind gleich, wenn bey gleichen Höhen auch ihre Grundflächen gleich ſind. Ueberhaupt gelten alle Verhältniſſe, die von Pyramiden §. 496 bewieſen worden, auch von Kegeln. Als

1. Bey gleichen Kegeln ſind die Grundflächen in umgekehrter Verhältniß der Höhen.

2. Kegel auf gleichen Grundflächen verhalten ſich wie die Höhen.

3. Kegel ſind in zuſammengeſetzter Verhältniß ihrer Grundflächen und Höhen.

4. Aehnliche Kegel verhalten ſich wie die Würfel ihrer Höhen oder der Durchmeſſer ihrer Grundflächen.

5. Ein Cylinder iſt dreymal ſo groß als ein Kegel, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat, §. 507.

7. Von der Kugel.

§. 525. Erkl. (Fig. 194.) Eine Kugel, sphaera, ist der körperliche Raum, den eine gekrümmte Fläche (die Kugelfläche, superficies sphaerica,) allenthalben so einschließt, daß alle ihre Punkte von einem innerhalb des Raums befindlichen Punkte C (dem Mittelpunkte) gleichweit abstehen.

Der Kugel Durchmesser, diameter, ist jede von der Kugelfläche begränzte und durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie AB. Ihr Halbmesser, radius, ist jede vom Mittelpunkte bis zur Kugelfläche gehende gerade Linie CF.

§. 526. Zus. 1. Alle Halbmesser, folglich auch alle Durchmesser einer Kugel sind einander gleich, und der Durchmesser ist der doppelte Halbmesser.

§. 527. Zus. 2. Jeder Punkt liegt innerhalb der Kugel, oder in der Kugelfläche, oder außerhalb, je nachdem sein Abstand vom Mittelpunkte der Kugel kleiner, oder eben so groß, oder größer als ihr Halbmesser ist.

§. 528. Lehrs. (Fig. 187.) Wird die Kugel von einer Ebene geschnitten, so ist jeder solcher Schnitt ein Kreis, und heißt ein Kugelkreis.

Bew. I. Geht der Schnitt LNM durch der Kugel Mittelpunkt C, so sind alle Linien in seiner Ebene aus C an seinen Umfang, wie CL, CN, CT, Halbmesser der Kugel. Folglich ist der Schnitt ein Kreis, §. 153, der mit der Kugel einerley Mittelpunkt und Halbmesser hat.

II. Geht der Schnitt DGE nicht durch der Kugel Mittelpunkt C, und man fället von C auf seine Ebene einen Perpendikel, so trift er sie innerhalb der Kugel in einem Punkte F. Denn wäre dies nicht, sondern etwa CG der Perpendikel, so wäre CF>CG, also F außerhalb der

Ku-

Kugel, gegen das Angenommene. Es ſey alſo CF der Perpendikel, und man ziehe nach einem willkührlichen Punkt G ſeines Umfangs CG, FG, ſo iſt allemal $FG^q = CG^q - CF^q$, und unveränderlich. Folglich iſt der Schnitt ein Kreis, deſſen Mittelpunkt F, und Halbmeſſer FG.

§. 529. Zuſ. 1. Der Perpendikel von der Kugel Mittelpunkt C auf die Ebene des Schnitts, trift deren Mittelpunkt F, wie aus dem Beweiſe §. 528. erhellet. Daher iſt die Linie FG, welche beide Mittelpunkte verbindet, allemal ſenkrecht auf den Schnitt.

§. 530. Zuſ. 2. Iſt eine gerade Linie auf dem Schnitte in ſeinem Mittelpunkte F ſenkrecht, ſo geht ſie durch der Kugel Mittelpunkt C.

Denn gienge ſie nicht durch C, wie FH, ſo ziehe man CF, welche auch ſenkrecht iſt, §. 529, daß alſo zwey Perpendikel FC, FH wären, gegen §. 396.

§. 531. Zuſ. 3. Da $CN = CG$, aber $FG \leqq CG$, ſo giebt jeder Schnitt durch der Kugel Mittelpunkt C immer einerley **größten Kreis**, jeder andre Schnitt aber einen **kleinern Kreis**.

§. 532. Zuſ. 4. Da CF der Abſtand des Schnitts von der Kugel Mittelpunkte C, und allemal $FG^q = CG^q - CF^q$, ſo iſt FG, folglich der Kugelſchnitt, deſto größer, je kleiner ſein Abſtand CF, und deſto kleiner, je größer ſein Abſtand CF iſt.

§. 533. Zuſ. 5. Kugelkreiſe in gleichem Abſtande ſind gleich, und gleiche Kugelkreiſe ſind in gleichem Abſtande von der Kugel Mittelpunkte.

§. 534. Zuſ. 6. (Fig. 194.) Eine gerade Linie DE, die irgend zwey Punkte der Kugelfläche verbindet, fällt ganz innerhalb der Kugel.

Denn eine Ebene durch DE und der Kugel Mittelpunkt C giebt einen größten Kreis, deſſen Sehne DE iſt, welche ganz in der Ebene des Kreiſes, folglich innerhalb der Kugel liegt.

§. 535. Zuſ. 7. Jede gerade Linie DE durch einen Punkt G innerhalb der Kugel ſchneidet allemal die Kugelfläche nur in zweyen Punkten.

§. 536. Zuſ. 8. Zwey Kreiſe auf der Kugelfläche können einander nur zweymal ſchneiden.

Denn ſie müſſen ſich in den Endpunkten des gemeinſchaftlichen Durchſchnitts ihrer Ebenen ſchneiden.

§. 537. Zuſ. 9. (Fig. 187.) Alle größte Kreiſe ALB, ANB, müſſen einander ſchneiden und halbiren.

Denn der Kugel Mittelpunkt iſt in ihren Ebenen, durch welchen auch der gemeinſchaftliche Durchmeſſer, worin ſie einander ſchneiden, geht.

§. 538. Zuſ. 10. Wenn Kreiſe ALB, ANB, einander halbiren, ſo ſind ſie größte Kreiſe.

Denn ihr Durchſchnitt AB muß beider Durchmeſſer ſeyn, der folglich durch beider Mittelpunkt C geht. Hätte nun die Kugel einen andern Mittelpunkt, ſo wäre die Linie von dieſem Punkte nach C, auf den Ebenen beider Kreiſe ſenkrecht, §. 529, gegen §. 396.

§. 539. Lehrſ. (Fig. 187.) Jeder größte Kreis LNM halbirt die Kugel.

Bew. Auf ſeiner Ebene ſey AB in C ſenkrecht, und in ſeinem Umringe ein willkührlicher Punkt T, auch MCZ = MCT. Durch A, C, Z ſey eine Ebene gelegt, ſo wie durch B, C, T, ſo ſind ACZ, BCT rechte Winkel, und AZ, BT, Quadranten auf der Kugelfläche.

Drehet man nun das unterſte Stück der Kugel um LM herum, bis die Ebene LTM auf die Ebene LZM fällt,

fällt, ſo fällt CB auf CA, B auf A, CT auf CZ, BT auf AZ. Demnach paſſen für jeden angenommenen Winkel MCT die beiden Ausſchnitte der Kugel in einander, folglich auch beide Kugelſtücke, worein der gröſte Kreis LNM die Kugel theilet.

§. 540. Zuſ. 1. Der gröſte Kreis LNM iſt die gemeinſchaftliche Grundfläche der beiden Halbkugeln. Mit ihr gehe durch A eine Ebene parallel, ſo iſt die Halbkugel zwiſchen dieſen Ebenen, und AC ihre Höhe.

§. 541. Zuſ. 2. Eine Halbkugel wird beſchrieben, wenn ſich der Quadrant ACM um den Halbmeſſer AC, eine ganze Kugel, wenn ſich der halbe Kreis AMB um den Durchmeſſer AB ringsum drehet, wobey CM den gröſten Kreis MNL beſchreibt.

§. 542. Erkl. (Fig. 194.) Eine Ebene MN berühret die Kugel, wenn ſie an die Kugelfläche ſo ſtößt, daß kein Punkt von ihr innerhalb der Kugel fällt, oder daß ſie die Kugel nicht ſchneidet.

§. 543. Zuſ. 1. Eine Ebene MN kann die Kugel nur in einem Punkte B berühren.

Denn wäre noch ein Punkt H, ſo wäre die Linie BH innerhalb der Kugel, folglich auch die Ebene MN, und berührte alſo die Kugel nicht.

§. 544. Zuſ. 2. Die Ebene MN berührt die Kugel, wenn ſie durch einen Punkt B der Kugelfläche auf den Halbmeſſer CB ſenkrecht iſt.

§. 545. Zuſ. 3. Die Linie CB von der Kugel Mittelpunkte C nach dem Berührungspunkte B iſt auf die berührende Ebene ſenkrecht.

Denn wäre ein anderer Perpendikel CK, ſo wäre CB>CK, gegen §. 544.

§. 546. Zuſ. 4. Der Perpendikel von C auf die berührende Ebene MN trifft den Berührungspunkt B, und wiederum der Perpendikel auf MN in B trifft C.

Denn wäre dies nicht, ſondern CK, BL ſolche Perpendikel, und man zieht CB, ſo iſt dieſe auch ſenkrecht auf MN, §. 545, und man hätte aus C und in B zwey Perpendikel, gegen §. 396.

§. 547. Erkl. (Fig. 187.) Der Pol eines Kugelkreiſes DGE heißt ein Punkt A oder B, der von allen Punkten ſeines Umringes gleichweit abſteht.

Die Axe des Kugelkreiſes iſt die gerade Linie AB, die zwey Pole deſſelben A, B, verbindet.

§. 548. Lehrſ. (Fig. 194.) Der Perpendikel FR auf der Ebene des Kugelkreiſes DGE in ſeinem Mittelpunkt F trifft zu beiden Seiten verlängert die beiden Pole des Kugelkreiſes A, B.

Bew. Im Umringe des Kugelkreiſes ſey ein willkührlicher Punkt G. Zieht man nun FG, und AG, BG, ſo iſt $AG^q = AF^q + FG^q$ unveränderlich, und eben ſo $BG^q = BF^q + FG^q$.

§. 549. Zuſ. 1. In dem auf der Ebene des Schnitts in ſeinem Mittelpunkte F ſenkrechten Durchmeſſer der Kugel AB liegen allemal die vier Punkte: die Mittelpunkte der Kugel C, und des Schnitts F, und ſeine beiden Pole A, B.

§. 550. Zuſ. 2. Der Perpendikel AF vom Pole A eines Kugelkreiſes DGE auf ſeine Ebene, trifft ſeinen Mittelpunkt F.

Denn $FG^q = AG^q - AF^q$ iſt unveränderlich, wo auch G in DGE angenommen worden.

§. 551. Zuſ. 3. Die Linie AF von einem Pole des Schnitts

Schnitts, nach seinem Mittelpunkte ist auf seiner Ebene senkrecht.

Denn sonst träfe ein Perpendikel von A auf den Schnitt, nicht seinen Mittelpunkt, gegen §. 550.

§. 552. Lehrs. (Fig. 187.) Die Axe AB eines Kugelschnitts DGE ist auf seiner Ebene im Mittelpunkte senkrecht, und geht auch durch der Kugel Mittelpunkt.

Bew. Durch F lege man beliebig die Linie DE in der Ebene des Schnitts, und ziehe AD, AE, EB, BD, so ist AD=AE, DF=BE, und AB=AB. Folglich ist DAF =FAE, §. 48. Nun ist auch ADF=AEF, §. 44, und AF=AF. Folglich ist AFD=AFE=R, und FD=FE, §. 82.

Eben so beweist man AFG=R, und FG=FK. Folglich ist AF auf dem Kugelschnitte im Mittelpunkte senkrecht §. 389, und geht also auch durch der Kugel Mittelpunkt, §. 530.

§. 553. Zus. 1. Geht ein Kugelkreis ALBM durch eines andern DGE Pole A, B, so steht er auf ihm senkrecht, und halbirt ihn, und ist ein größter Kreis.

Denn da AB auf der Ebene DGE durch F und C senkrecht ist, §. 552, und in der Ebene ALBM liegt, so ist diese auf jener senkrecht, §. 409, schneidet sie im Durchmesser DE, und geht durch der Kugel Mittelpunkt, d. i. halbirt die andre, und ist ein größter Kreis.

§. 554. Zus. 2. Die Bogen dieses Kreises ALBM, und eines jeden andern ANB durch dieselben Pole, zwischen dem Kreise DGE und jedem seiner Pole, sind gleich, weil ihre Sehnen gleich sind.

So sind z. E. die Bogen ALD, AME, ANG, gleich, und eben so die Bogen BD, BE, BG.

Anm. Iſt DGE kein größter Kreis, ſo iſt AG größer und BG kleiner als ein Quadrant. Setzt man aber anſtatt DGE einen größten Kreis LNM, ſo ſind alle Bogen AL, BL, Quadranten, weil DE eine Sehne, und LM ein Durchmeſſer des Kreiſes ALBM iſt.

§. 555. Zuſ. 3. Steht ein Kugelkreis ALBM auf einem andern DGE durch deſſen Mittelpunkt F ſenkrecht, ſo geht er durch des andern Pole, und iſt folglich ein größter Kreis.

Denn errichtet man in der ſenkrechten Ebene auf den Durchſchnitt DE den Perpendikel FR, ſo iſt er auf der Ebene DGE ſenkrecht, §. 377, geht alſo durch der Kugel Mittelpunkt C, §. 530, und trifft verlängert die beiden Pole A, B, §. 548.

§. 556. Zuſ. 4. Schneidet ein größter Kugelkreis ALBM einen nicht größten DGE durch deſſen Mittelpunkt F, ſo geht er durch des andern Pole, und iſt folglich auf ihn ſenkrecht.

Denn CF iſt ſenkrecht auf der Ebene DGE, §. 529, und trifft die Pole A, B, §. 548.

§. 557. Zuſ. 5. Steht ein größter Kugelkreis ALBM auf irgend einem Kugelkreiſe DGE ſenkrecht, ſo geht er durch des andern Pole, und halbirt ihn.

Denn geht auf DGE der Perpendikel CF, ſo trifft er den Mittelpunkt F, §. 529, und den Durchſchnitt DE, §. 408, und verlängert, die Pole A, B, §. 548.

§. 558. Zuſ. 6. Stehen zwey größte Kugelkreiſe ALBM, LNM, auf einander ſenkrecht, ſo geht jeder durch des andern Pole.

Und wenn von zwey größten Kugelkreiſen ALBM, LNM, der erſte durch die Pole des zweyten geht, ſo geht auch der zweyte durch die Pole des erſten.

Die

Die Bogen AL, AN, eines jeden dieſer Kreiſe zwiſchen dem andern Kreiſe und ſeinem Pole, ſind Quadranten.

§. 559. Erkl. Parallelkreiſe heißen alle Kugelkreiſe, deren Ebenen einander parallel ſind.

§. 560. Lehrſ. (Fig. 187.) Wenn zwey Kugelkreiſe PSQ, DGE, parallel ſind, ſo haben ſie einerley Pole; und wenn ſie einerley Pole haben, ſo ſind ſie parallel.

Bew. I. Ein Perpendikel FA auf DGE im Mittelpunkte F geht durch der Kugel Mittelpunkt C, §. 530, und iſt ſenkrecht auf PSQ, §. 405, in ſeinem Mittelpunkte R, §. 529, trifft alſo verlängert beider Pole A, B, §. 548.

II. Die Axe AB iſt auf beiden ſenkrecht, §. 552, folglich ſind ſie parallel, §. 400.

§. 561. Zuſ. Es giebt nur zwey gleiche Parallelkreiſe zu beiden Seiten des Mittelpunkts der Kugel.

Denn ſind PSQ, DGE Parallelkreiſe, ſo iſt AB auf beiden in ihren Mittelpunkten R, F, ſenkrecht, §. 552, durch der Kugel Mittelpunkt, §. 529. Iſt nun CR = CF, ſo ſind beide Parallelkreiſe gleich, aber jeder dritter Parallelkreis iſt größer oder kleiner. §. 531.

§. 562. Lehrſ. (Fig 187.) Gehen zwey Kugelkreiſe ALB, ANB, durch die Pole mehrerer Parallelkreiſe, ſo ſind die zwiſchen jenen befindlichen Parallelkreiſe PS, LN, DG, einander ähnlich.

Bew. Die Axe AB iſt auf den Ebenen aller Parallelkreiſe in ihren Mittelpunkten R, C, F, ſenkrecht, §. 552, folglich auch auf RP, CL, FD, §. 376, die in der Ebene ALB, alſo parallel ſind. Eben ſo ſind RS, CN, FG parallel. Folglich ſind PRS, LCN, DFG gleich, §. 393, folglich die Bogen PS, LN, DG ähnlich.

§. 563. Zuſ. 1. Jeder der genannten Winkel iſt die Neigung der Ebenen ALB, ANB gegen einander, §. 1379, oder des ſphäriſchen Winkels PAN, den zwey Bogen gröſter Kreiſe oder ihre Tangenten am Durchſchnittspunkte A auf der Kugelfläche einſchließen.

§. 564. Zuſ. 2. Theilt man die Parallelkreiſe in ihre Grade, ſo kömmt eine gleiche Anzahl derſelben auf die Bogen PS, LN, DG, und giebt das Maaß des ſphäriſchen Winkels PAN.

Iſt LNM ein gröſter Kreis, ſo hat der ſphäriſche Winkel PAN ſoviele Grade des gröſten Kreiſes, als der Bogen LN hat. Einen ſolchen Bogen erwählt man am bequemſten zum Maaße eines ſphäriſchen Winkels, weil er zum Halbmeſſer der Kugel gehört.

§. 565. Zuſ. 3. Sphäriſche Scheitelwinkel ſind gleich, und ſphäriſche Nebenwinkel betragen zuſammen zwey rechte Winkel.

§. 566. Zuſ. 4. Sind AL, AN, Quadranten, folglich A, B, die Pole des Kreiſes LNM, oder ſind A, B, die Pole des Kreiſes LNM, folglich AL, AN, Quadranten, ſo iſt der gröſte Kreis durch L, N, auf beiden Quadranten ſenkrecht, und geht durch beider Pole, weil er in der Ebene LCN, die auf AB ſenkrecht iſt.

§. 567. Zuſ. 5. Wenn zwey gröſte Kreiſe ALB, ANB einander ſchneiden, ſo iſt das Maaß ihrer Neigung LN, dem kleinſten Abſtande ihrer beiderſeitigen Pole gleich.

Denn in LNM ſind beider Pole, nämlich T, t, für ALB, und V, v, für ANB, §. 566. Nun iſt LN+NT = 90 Grad = NT+TV. Folglich iſt LN+TV.

§. 568. Anm. Die bisherige Lehre von den Schnitten der Kugel iſt eine Anwendung und weitere Ausführung der Lehre von der Lage der Ebenen und eine nöthige Vorbereitung zu der ſphäriſchen Trigonometrie. Nun folgen die übrigen Eigenſchaften der Kugel, die beſonders ihre Verhältniſſe gegen die andern Körper betreffen.

§. 569.

§. 569. Erkl. (Fig. 195.) Es sey ABa ein halber Kreis, auf dessen Durchmesser Aa der Halbmesser CB senkrecht sey. Durch einen willkührlichen Punkt dieses Halbmessers sey Dd mit Aa parallel, und schneide den Umkreis in E, e, auch sey mit CB durch E, e, die EF und ef, und durch A, a, die AD und ad parallel. Drehet sich nun der Quadrant ACB um CB ringsum, so beschreibt er eine Halbkugel §. 541, das Rectangel CE und CD aber zwey senkrechte Cylinder, §. 500, von denen der erste seine Oberfläche innerhalb, der andre außerhalb der Kugel hat, und deren Unterschied die cylindrische Röhre AEae ist.

Der Kürze wegen soll jener Cylinder der innere, und dieser der äußere heißen.

§. 570. Zus. 1. Theilet man den senkrechten Halbmesser CB in mehrere beliebige Theile, ziehet durch die Theilpunkte mit Aa Parallelen Dd, Gg, Mm, und macht mit jeder die §. 569. beschriebene Verzeichnung, so erhält man so viele äußere und innere Cylinder, als Theilpunkte vorhanden, da dann noch eine durch den Endpunkt B gezogene Parallele Ss einen äußern Cylinder giebt, zu dem kein innerer gehört.

§. 571. Zus. 2. Sind die §. 570. gemachten Theile des Halbmessers CB alle einander gleich, so ist der Ueberschuß aller äußern Cylinder über die innern dem zunächst am Durchmesser befindlichen äußern Cylinder ADda gleich.

Denn es ist Sn=Qr, MPmp=KRkr, GKgk=ELel, DFdf=DFdf, folglich Sn+MPmp+GKgk+DFdf = Qr+KRkr+ELel+DFdf=ADda.

§. 572. Zus. 3. Dieser §. 571. gedachte Ueberschuß der äußern Cylinder über die innern kann kleiner gemacht werden, als jeder gegebene körperliche Raum.

Denn halbirt man jede Abtheilung in CB, und verfährt wie vorher, so wird hier der Ueberschuß = ½ADda,

d. i. die Hälfte des ersten. Auf eben die Art kann man $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ u. s. w. des ersten Ueberschußes erhalten, folglich diesen kleiner als jeden gegebenen körperlichen Raum machen, §. 220.

§. 573. Zus. 4. Da der Unterschied der Halbkugel von der Summe der innern Cylinder sowohl, als von der Summe der äußern, offenbar kleiner ist, als der Ueberschuß der äußern Cylinder über die innern, d. i. kleiner als ADda, so kann dieser Unterschied kleiner werden, als jeder gegebene körperliche Raum, §. 572.

§. 574. Lehrs. (Fig. 195.) Die Summe aller innern in der Halbkugel beschriebenen Cylinder kann größer werden, als jeder Körper, der kleiner als die Halbkugel ist.

Bew. Es heiße dieser Körper P, sein Unterschied von der Halbkugel D, die Halbkugel selbst H, daß also H=P+D. Ferner heiße die Summe der innern Cylinder S, und ihr Unterschied von der Halbkugel d, daß also H=S+d, so ist P+D=S+d. Ist nun d<D geworden, §. 573, so ist S>P.

§. 575. Lehrs. (Fig. 195.) Die Summe aller äußern um die Halbkugel beschriebenen Cylinder kann kleiner werden als jeder Körper, der größer als die Halbkugel ist.

Bew. Es heiße dieser Körper Q, und sein Unterschied von der Halbkugel E, daß also Q=H+E, wenn H die Halbkugel bedeutet. Ferner heiße die Summe der äußern Cylinder T, und ihr Unterschied von der Halbkugel e, daß also T=H+e. Ist nun e<E geworden, §. 573, so ist H+e<H+E, d. i. T<Q.

§. 576. Lehrs. (Fig. 196. 200.) Die Halbkugel

gel ABa ist doppelt so groß, als ein Kegel DCd, der mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Construction. Man ziehe zwey Durchmesser Aa, Bb, senkrecht auf einander, und durch die Endpunkte A, B, a, b, Tangenten, und hierauf die Linien CD, Cd. Wird nun die Figur um Bb gedrehet, so wird eine Kugel, wie auch ein Cylinder und Kegel beschrieben. Insbesondere beschreibt der Quadrant ACB die Halbkugel ABa, CA die Grundfläche derselben, das Quadrat DACb einen Cylinder DAad, und der rechtwinkliche Triangel DCb einen Kegel DCd, beide von gleicher Grundfläche und Höhe mit der Halbkugel ABa, da dann der Kegel DCd der dritte Theil des Cylinders DAad, §. 524, folglich, wenn man diesen Kegel aus dem Cylinder herausschneidet, der übrige Körper ADCda = 2. DCd ist.

Nun behauptet man, daß die Halbkugel ABa dem Körper ADCda, also dem doppelten Kegel DCd gleich sey, weil ADCda weder größer, noch kleiner, als die Halbkugel ABa seyn kann.

Bew. I. (Fig. 196.) Es sey ADCda < ABa. Man beschreibe in die Halbkugel ABa soviele innere Cylinder, daß ihre Summe S > ADCda werde, §. 574. Die dadurch erhaltenen Theile in CB trage man auf Cb, und ziehe durch die Theilpunkte mit Aa Parallelen, auf die man in den Punkten, wo sie die Linien CD, Cd schneiden, die Perpendikel QT, RV, SZ, qt, rv, sz, errichtet. Hiedurch entstehen beym Umdrehen soviele cylindrische Röhren, als in der Halbkugel ABa innere Cylinder beschrieben sind. Nun ist $FK_q = BF.bF = AT.aT$; $GL_q = BG.bG = NV.nV$; $HM_q = BH.bH = OZ.oz$. Folglich ist jede der erzeugten Röhren dem zugehörigen Cylinder gleich, §. 511, folglich die Summe der innern Cylinder S so groß als die Summe der Röhren, folglich S < ADCda, welches dem obigen S > ADCda widerspricht.

II.

II. (Fig. 200.) Es sey ADCda>ABa. Man beschreibe um die Halbkugel ABa so viele äußere Cylinder, daß ihre Summe T<ADCda, §. 575. Die dadurch erhaltenen Theile in CB trage man auf Cb, und ziehe durch die Theilpunkte mit Aa Parallelen, auf die man aus den Punkten, wo sie die Linien CD, Cd schneiden, die Perpendikel QT, RV, SZ, qt, rv, sz, fället. Hiedurch entstehen beym Umdrehen theils ein Cylinder Na=AK, theils cylindrische Röhren, deren jede, wie zuvor, dem ihm zugehörigen Cylinder gleich ist. Folglich ist die Summe der äußern Cylinder, T, dem Cylinder Na und gedachten Röhren zusammen gleich, folglich T>ADCda, welches dem obigen T<ADCda widerspricht.

§. 577. Zus. Zieht man BD, Bd, so beschreibt beym Umdrehen um Bb, der Halbkreis BAb eine Kugel, deren Durchmesser Bb, das Rectangel Eb einen Cylinder DEed, und der rechtwinkliche Triangel DBb einen Kegel DBd, beide von der Höhe Bb, und von einerley Grundfläche, deren Durchmesser Dd=Bb.

Demnach ist die Halbkugel diesem Kegel DBd gleich, folglich die ganze Kugel diesem Kegel doppelt genommen, folglich zwey Drittheilen dieses Cylinders DEed.

Demnach verhalten sich ein Paar Kugeln wie ein Paar Cylinder auf ihren größten Kreisen und in der Höhe ihrer Durchmesser, und es gelten überhaupt die Verhältnisse, die von den Cylindern bewiesen worden, auch von den Kugeln. Als: Kugeln verhalten sich wie die Würfel ihrer Durchmesser oder Halbmesser.

8. Von der Ausmessung der Körper und ihrer Oberflächen.

§. 578. Lehrs. (Fig 179.) Sind eines rechtwinklichen Parallelepipedons AB Länge AF, Breite FM, und

und Höhe MB, mit einerley Maaße AS gemessen §. 327, und durch Zahlen c, e, a ausgedrückt, so ist der Würfel von AS so vielmal in dem Parallelepipedon AB enthalten, so vielmal die Einheit in dem Producte solcher Zahlen steckt.

Beyw. Der Würfel von AS läßt sich so vielmal neben einander an AF setzen, als seine Seite AS in AF enthalten ist, und so vielmal an FM, als AS in FM steckt. Folglich zeigt die Zahl c, wieviel solcher Würfel in der Reihe AF sind, und die Zahl e, wieviel solcher Reihen hinter einander stehen, folglich das Product ce die Menge aller Würfel in einer Schichte, welche die Grundfläche AM bedeckt. Nun zeigt die Zahl a, wie vielmal sich derselbe Würfel an MB tragen läßt, also wieviele solcher Schichten über einander stehen, folglich das Product ace die Anzahl dieser Schichten, oder die gesammte Menge der Würfel, die mit dem Parallelepipedon einerley Raum einnehmen.

Andrer Beyw. Es sey ein zweytes Parallelepipedon CD, dessen Grundfläche CG=AM=ce, und Höhe GD $=\alpha$ sey; ferner ein drittes EN, dessen Grundfläche GF $=\gamma\varepsilon$ und Höhe GD $=\alpha$ sey, so ist AB : CD $=a:\alpha$ §. 463, und CD : EN $=ce:\gamma\varepsilon$ §. 466, folglich AB : EN $=ace:\alpha\gamma\varepsilon$ (Ar. §. 380.) $=(a:\alpha)+(e:\varepsilon)+c:\gamma)$ Ar. §. 412. Setzt man nun den Würfel von AS = K, und AS = 1, so ist AB : K = ace : 1.

§. 579. Zus. 1. Nimmt man den Würfel von AS als das Maaß an, mit welchem Körper gemessen werden sollen, so wird der körperliche Inhalt des Parallelepipedons AB durch das Product ace ausgedrückt werden, wobey man der Kürze wegen sagt, daß Länge, Breite und Höhe, oder die Grundfläche und Höhe, in einander multiplicirt, das Parallelepipedon geben; welches aber eigentlich nur von den Zahlen a, c, e zu verstehen ist. Vergl. §. 329.

§. 580.

§. 580. Zuſ. 2. Wäre AB ein Würfel, ſo wäre $a=e=c$, folglich ſein körperlicher Inhalt $=a^3$.

§. 581. Anm. Producte aus Linien ac, $a\gamma$, oder ace, $ac\varepsilon$, zeigen zwar blos Verhältniſſe an, woraus die Verhältniß zweyer Flächen oder zweyer Körper zuſammengeſetzt iſt, §. 578. 328, können aber in dem Sinne §. 579. 329. dienen, Flächen und Körper ſelbſt vorzuſtellen. Alsdann nennt man die Menge der Factoren eines ſolchen Products ſeine Abmeſſung oder Dimenſion, da dann die Linie nur eine, die Fläche zwey, und der Körper drey Dimenſionen hat. Auch nimmt man Producte von mehr als drey Dimenſionen an, ob es gleich für ſolche keine weitere Ausdehnung giebt. Quotienten $\frac{a}{b}$ oder $\frac{ac}{bd}$ ſind nichts anders als unbenannte Zahlen, und haben daher keine Dimenſion. Daher iſt auch z. E. $\frac{abcg}{def}$ d. i. $\frac{abc}{def}\cdot g$ nichts anders als eine Linie, die mit einer Zahl multiplicirt iſt, alſo nur von einer Dimenſion. Denn wenn ac eine Fläche, ace einen Körper vorſtellt, ſo giebt $\frac{ac}{a}=c$ eine Linie, und $\frac{aec}{a}=ce$ eine Fläche. Will man alſo Producte aus Linien mit einander vergleichen oder zuſammenſetzen, ſo müſſen ſie gleiche Dimenſionen haben, oder darauf gebracht werden, indem man an die Stelle des noch fehlenden Factors eine Einheit des angenommenen Maaßes ſetzt, die man ſich ohnedem immer dazu denken muß. Denn jede Größe d, d^2, d^3, wozu das Maaß h, h^2, h^3 gehört, heißt eigentlich $h:d$, $h^2:d^2$, oder $2(h:d)$ und $h^3:d^3$ oder $3(h:d)$.

§. 582. Zuſ. 3. In der Ausübung müſſen die Seiten des Parallelepipedons mit den gewöhnlichen Maaßen §. 319. gemeſſen werden, da dann das Product ace, wenn alle drey Zahlen auf einerley Benennung gebracht ſind, anzeigt, wie viele Würfel ſolchen Maaßes in dem Parallelepipedon ſtecken. Es heißt aber ein Cubikfuß, der einen Fuß lang, einen Fuß breit, und einen Fuß hoch iſt. Eben ſo verhält es ſich mit den übrigen größern und kleinern Maaßen.

§. 583.

§. 583. Zus. 4. (Fig. 136.) Wäre ABCD ein Quadratfuß, in seine 100 Quadratzolle getheilt, §. 332, die Grundfläche eines Würfels von einem Cubikfuß, so hätten auf derselben 100 Cubikzolle Platz, und im ganzen Raume 10 solcher Schichten, also 1000 Cubikzolle. Auf eben die Art enthält eine Cubikruthe 1000 Cubikfuß, und ein Cubikzoll 1000 Cubiklinien u. s. w.

Bey der Duodecimaleintheilung sind auf der Grundfläche des Cubikfußes 144 Cubikzolle, und im ganzen Raume 12. 144 oder 1728, daß also hier die Cubikruthe auch 1728 Cubikfuße, der Cubikzoll 1728 Cubiklinien u. s. w. enthält.

§. 584. Anm. 1. Auf die Reduction beider Theilungsarten wird §. 320. 333. auf ähnliche Art angewendet, daß man, wenn die Fuße als gleich angenommen werden, setzet 10^3 Zoll des ersten, $= 12^3$ Zoll des zweyten, und 100^3 Linien des ersten $= 144^3$ Linien des zweyten.

§. 585. Anm. 2. Die verschiedenen Längenmaaße der Oerter §. 321. geben auch einen Unterschied in ihren Cubikmaaßen. Man nimmt also zu ihrer Vergleichung dieselben Verhältnißzahlen, nur daß man sie zu diesem Gebrauche in ihre Würfel erhebt. Vergl. §. 334.

§. 586. Aufg. Jedes Prisma auszumessen.

Aufl. Man messe die Grundfläche des Prisma §. 335, die man immer durch ein Rectangel ce ausdrücken kann, §. 336, und multiplicire sie in die Höhe a, so ist der Inhalt des Prisma $= ace$, eigentlich der Inhalt eines rechtwinklichen Parallelepipedons §. 578, von gleicher Grundfläche und Höhe mit dem Prisma, §. 469.

§. 587. Zus. 1. Der Inhalt P eines Prisma mit der Grundfläche ce dividirt giebt die Höhe a, oder mit der Höhe a dividirt, giebt die Grundfläche ce.

Denn es ist $P = ace$, folglich $\frac{P}{ce} = a$, und $\frac{P}{a} = ce$.

§. 588.

§. 588. Zuſ. 2. Aus dem Inhalte Q eines Würfels die Cubikwurzel gezogen, giebt ſeine Seite q.

Denn es iſt $Q=q^3$, folglich $\sqrt[3]{Q}=q$.

§. 589. Zuſ. 3. Ein Priſma P wird eben ſo in einen Würfel verwandelt; daher der Name Cubatur. Vergl. §. 339.

Denn man ſetzt hier $P=x^3$, daher $\sqrt[3]{P}=x$ iſt.

§. 590. Zuſ. 4. Will man die Seite x eines Würfels, der nmal ſo groß als ein gegebener Würfel a^3 iſt, ſo ſetze man $na^3=x^3$, da dann $a\sqrt[3]{n}=x$ iſt. Beym Deliſchen Problem war $n=2$.

§. 591. Zuſ. 5. Für ein zweytes Priſma Π ſey der Inhalt $=\alpha\gamma\varepsilon$, folglich $P:\Pi=ace:\alpha\gamma\varepsilon=\frac{a}{\alpha}+\frac{c}{\gamma}+\frac{e}{\varepsilon}$ §. 578.

Sind nun die beiden Priſmen ähnlich, §. 440, ſo iſt $a:\alpha=e:\varepsilon=c:\gamma$, folglich $P:\Pi=3(a:\alpha)=a^3:\alpha^3$.

§. 592. Zuſ. 6. Bedeuten b, β die Grundflächen, ſo hat man $P:\Pi=ab:\alpha\beta=a:\alpha+b:\beta$.

Iſt nun $a=\alpha$, ſo iſt $P:\Pi=b:\beta$; iſt $b=\beta$, ſo iſt $P:\Pi=a:\alpha$.

Iſt $P=\Pi$, ſo iſt $ab=\alpha\beta$, folglich $a:\alpha=\beta:b$.

§. 593. Aufg. (Fig. 182.) Die Oberfläche eines jeden Priſma, die Grundflächen nicht mitgerechnet, auszumeſſen.

Auflöſ. Da alle Seitenflächen, wie BGca, Parallelogramme ſind, die man nach §. 328. ausrechnet, ſo geben dieſe zuſammen die verlangte Oberfläche.

§. 593. Zuſ. 1. Macht man einen Schnitt ſenkrecht auf eine Seitenlinie Bb, der folglich auch auf allen übrigen Seitenlinien ſenkrecht iſt, ſo giebt das Produkt der

Sei-

Seitenlinie Bb in den Umring dieſes Schnitts die verlangte Oberfläche. Denn die Seiten des Schnitts ſind die Höhen der Parallelogramme, deren Grundlinien der Bb gleich ſind.

§. 595. Zuſ. 2. Die Oberfläche des ſenkrechten Priſma iſt das Product ſeiner Höhe Bb in den Umring ſeiner Grundfläche ABCDE.

Denn der Schnitt §. 594. iſt beym ſenkrechten Priſma der Grundfläche parallel, und mit ihr congruent.

§. 596. Zuſ. 3. Die Oberfläche des ſenkrechten Priſma iſt daher einem Rectangel gleich, das mit dem Priſma gleiche Höhe hat, und deſſen Grundlinie dem Umringe ſeiner Grundfläche gleich iſt.

§. 597. Zuſ. 4. Wird, wie §. 506, ein Priſma in und um einen Cylinder beſchrieben, ſo iſt die Oberfläche des innern kleiner, des äußern aber größer, als die gekrümmte Oberfläche des Cylinders.

§. 598. Lehrſ. (Fig. 198.) Die gekrümmte Oberfläche eines ſenkrechten Cylinders iſt ſo groß, als ein Rectangel ABCD, das mit ihm gleiche Höhe AD hat, und deſſen Grundlinie AB dem Umringe ſeiner Grundfläche gleich iſt.

Bew. Die cylindriſche Oberfläche kann weder kleiner noch größer ſeyn, als das beſchriebene Rectangel ABCD, d. i. wenn man die Höhe AD beybehält, die Grundlinie das der Oberfläche gleichen Rectangels kann weder kleiner noch größer ſeyn als AB. Denn

1. Sie ſey kleiner, etwa AE, daß, wenn man EF mit AB parallel zieht, die cylindriſche Oberfläche = AEFD wäre.

Es ſey die Grundfläche des Cylinders der Kreis k Fig. 190. Man beſchreibe in den Kreis ein Polygon abcde,

deſſen Umring >AE §. 300, und ſetze auf dieſes Polygon ein Priſma wie §. 506, ſo wäre deſſen Oberfläche, die Grundflächen ungerechnet, >AEFD §. 593, alſo größer als die Oberfläche des Cylinders, um den das Priſma beſchrieben worden, welches unmöglich iſt, §. 597.

2. Sie ſey größer, etwa AG, daß, wenn man GH mit AD parallel zieht, die cylindriſche Oberfläche =AGHD wäre.

Es ſey wiederum die Grundfläche des Cylinders der Kreis Fig. 190. Man beſchreibe um den Kreis ein Polygon ABCDE, deſſen Umring <AG, §. 301, und ſetze auf dieſes Polygon ein Priſma wie §. 506. ſo wäre deſſen Oberfläche, die Grundflächen ungerechnet, <AGHD, §. 593, alſo kleiner als die Oberfläche des Cylinders, um den das Priſma beſchrieben worden, welches unmöglich iſt, §. 597.

§. 599. Zuſ. 1. Iſt a des Cylinders Höhe, d der Durchmeſſer ſeiner Grundfläche, ſo iſt ſeine gekrümmte Oberfläche $S = ad\pi$.

Eines andern ſenkrechten Cylinders Höhe ſey α, und Durchmeſſer δ, ſo iſt deſſen Oberfläche $\Sigma = \alpha\delta\pi$.

Folglich iſt $S:\Sigma = ad : \alpha\delta$, folglich $= d:\delta$, wenn $a = \alpha$, und $= a:\alpha$, wenn $d = \delta$ iſt.

Auch ſind ad, $\alpha\delta$, die Rectangel, welche die Durchſchnitte der beiden Cylinder durch ihre Axen geben.

§. 600. Zuſ. 2. Die Oberfläche des ſenkrechten Cylinders iſt einem Kreiſe gleich, deſſen Halbmeſſer die mittlere Proportionallinie zwiſchen der Höhe und dem Durchmeſſer des Cylinders iſt.

Denn es ſey dieſes Kreiſes Halbmeſſer r, folglich der Kreis $= r^2\pi$, ſo ſoll $ad\pi = r^2\pi$ ſeyn, oder $ad = r^2$, folglich $a:r = r:d$.

Für

Für die Oberfläche Σ eines andern Cylinders hat man $\alpha\delta = \varrho^2$, folglich $S : \Sigma = r^2 : \varrho^2$.

§. 601. Aufg. Jeden Cylinder auszumeſſen.

Auflöſ. Man meſſe ſeine Grundfläche §. 349, der man allemal ein Rectangel ce gleichſetzen kann, §. 336, und multiplicire ſie mit der Höhe.

Des Cylinders Inhalt heiße C, ſeine Höhe a, der Durchmeſſer und Halbmeſſer ſeiner Grundfläche d und r, ſo iſt $C = ar^2\pi = \frac{ad^2\pi}{4}$ = dem Inhalte eines Priſma ace §. 586. von gleicher Grundfläche und Höhe mit dem Cylinder.

§. 602, Zuſ. 1. Von den drey Dingen eines Cylinders, Inhalte C, Höhe a und Halbmeſſer r der Grundfläche, findet man jedes aus den beiden übrigen.

Denn es iſt $C = ar^2\pi$; $\frac{C}{r^2\pi} = a$; $\frac{C}{a\pi} = r^2$, folglich $\sqrt{\frac{C}{a\pi}} = r$. Vergl. §. 347.

§. 603. Zuſ. 2. Wenn für einen andern Cylinder Γ, α, δ, ϱ, das Aehnliche bedeuten, ſo iſt $\Gamma = a\varrho^2\pi = \frac{a\delta^2\pi}{4}$, folglich $C : \Gamma = ar^2\pi : a\varrho^2\pi = ar^2 : a\varrho^2 = a : a = r^2 : \varrho^2$.

Iſt nun $a = \alpha$, ſo iſt $C : \Gamma = r^2 : \varrho^2$; iſt $r = \varrho$, ſo iſt $C : \Gamma = a : \alpha$.

Iſt $C : \Gamma$, ſo iſt auch $ar^2 = a\varrho^2$, folglich $a : \alpha = \varrho^2 : r^2$.

§. 604. Zuſ. 3. Wenn §. 508. KT = a, KB = r, KE = ϱ, ſo iſt der Inhalt der cylindriſchen Röhre $= ar^2\pi - a\varrho^2\pi = a\pi(r^2 - \varrho^2)$.

§. 605. Zuſ. 4. Haben die beiden Cylinder §. 603. gleiche Höhe a, ſo iſt ihre Summe $\frac{ad^2\pi}{4} + \frac{ad^2\pi}{4} = \frac{a\pi}{4}(d^2+\delta^2)$ = einem Cylinder von derſelben Höhe, deſſen Durchmeſſer $= \sqrt{(d^2+\delta^2)}$ folglich deſſen Grundfläche die Summe der beiden Grundflächen iſt. §. 130.

§. 606. Zuſ. 5. (Fig. 197.) Hierauf iſt die Verfertigung des Viſirſtabes gegründet. Es enthalte nämlich ein Cylinder ABD, deſſen Durchmeſſer AB und Höhe CD, ein gewiſſes Maaß, z. E. eine Kanne. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels EFG nehme man $EF = F1 = AB$, ſo iſt $E1 = F2$ der Durchmeſſer eines Cylinders von zwey Kannen, $E2 = F3$ aber von 3 Kannen u. ſ. w. und die ſolchermaßen eingetheilte Länge FG die eine Seite des Viſirſtabes, auf deſſen andre Seite man die Höhe des Maaßes CD ſo vielmal aufträge, als es geht, da dann der Durchmeſſer eines Cylinders mit der erſten Seite, und ſeine Höhe mit der zweyten gemeſſen, das Product beider Zahlen die Anzahl der im Cylinder enthaltenen Kannen geben muß.

§. 607. Anm. Will man ein Faß nach dieſer Methode viſiren, ſo nimmt man ohne allen Beweis an, daß es das arithmetiſche Mittel zwiſchen zwey Cylindern ſey, von gleichen Durchmeſſern mit dem Boden des Faſſes und dem damit paralleſen Durchſchnitte durch das Spundloch, da doch die tauſendfältigen Geſtalten des Faſſes, wenn die Rechnung genau ſeyn ſoll, ganz andre Unterſuchungen erfordern, die aber nicht dieſes Orts ſind.

§. 608. Aufg. Jede Pyramide auszumeſſen.

Auflöſ. Das Product der Höhe a in die Grundfläche b giebt ein Priſma §. 601, wovon die Pyramide der dritte Theil iſt, §. 495. Folglich iſt ihr Inhalt $P = \frac{ab}{3}$, folglich $\frac{3P}{a} = b$, und $\frac{3P}{b} = a$.

§. 609.

§. 609. Aufg. (Fig. 184.) Eine abgekürzte senkrechte Pyramide auszumessen.

Aufl. Die Grundfläche der ganzen Pyramide ABGD sey = b, der Schnitt EFGH = β, die Höhe KM = a, KN = α, so ist $a^2 : \alpha^2 = b : \beta$ §. 482, folglich $\beta = \frac{\alpha^2 b}{a^2}$. Demnach ist die ganze Pyramide $= \frac{ab}{3}$, und das obere abgeschnittene Stück $= \frac{\alpha^2 b}{3a^2}\alpha$, folglich die abgekürzte Pyramide $= \frac{ab}{3} - \frac{\alpha^2 b}{3a^2}\cdot\alpha = \frac{1}{3}b\left(a - \frac{\alpha^2}{a^2}\cdot\alpha\right) = \frac{1}{3}b\left(\frac{a^3 - \alpha^3}{a^2}\right)$.

Da aber hier die beiden Grundflächen b, β, der abgekürzten Pyramide, und deren Abstand MN = c gegeben, und α noch unbekannt ist, so nehme man ein Paar gleichliegende Seiten der Grundflächen, etwa AB, EF, und setze AB : EF = m : n = MK : NK, folglich AB − EF : EF = MN : NK, d. i. m − n : n = c : NK, und AB − EF : AB = MN : MK, d. i. m − n : m = c : MK, folglich $NK = \frac{nc}{m-n} = \alpha$ und $MK = \frac{mc}{m-n} = a$. Aber $m^2 : n^2 = b : \beta$, folglich $\beta = \frac{n^2 b}{m^2}$.

Demnach ist die ganze Pyramide $= \frac{b}{3}\cdot\frac{mc}{m-n} = \frac{bm^3c}{3(m-n)m^2}$, die abgeschnittene $= \frac{b}{3}\cdot\frac{n^2}{m^2}\cdot\frac{nc}{m-n} = \frac{bn^3c}{3(m-n)m^2}$, folglich die abgekürzte $\frac{bc}{3}\cdot\frac{m^3 - n^3}{m^2(m-n)} = \frac{bc}{3}\left(1 + \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2}\right)$.

§. 610. Aufg. Jeden Kegel auszumeſſen.

Auflöſ. Das Product der Höhe in die Grundfläche giebt einen Cylinder §. 601, wovon der dritte Theil dem Kegel gleich iſt, §. 524.

Des Kegels Inhalt heiße k, die Höhe a, der Durchmeſſer und Halbmeſſer d und r, ſo iſt $k = \frac{a.r^2\pi}{3} = \frac{ad^2\pi}{12}$, folglich $\frac{3k}{a\pi} = r^2$, und $\sqrt{\frac{3k}{a\pi}} = r$.

§. 611. Aufg. (Fig. 192.) Einen abgekürzten ſenkrechten Kegel auszumeſſen.

Auflöſ. Es ſey der Schnitt GF mit BD parallel, AC des Kegels Höhe noch unbekannt, aber CD = r, EG = ϱ, und CE = α gegeben.

Da CD : EG = AC : AE, ſo iſt CD — EG : EG = CE : AE, d. i. r — ϱ : ϱ = α : AE, und CD — EG : CD = CE : AC, d. i. r — ϱ : r = α : AC, folglich $AE = \frac{\alpha\varrho}{r-\varrho}$, und $AC = \frac{\alpha r}{r-\varrho}$.

Demnach iſt der ganze Kegel $ABD = \frac{r^2\pi}{3} \cdot \frac{\alpha r}{r-\varrho} = \frac{r^3}{r-\varrho} \cdot \frac{\alpha\pi}{3}$, und der abgeſchnittene $AFG = \frac{\varrho^2\pi}{3} \cdot \frac{\alpha\varrho}{r-\varrho} = \frac{\varrho^3}{r-\varrho} \cdot \frac{\alpha\pi}{3}$, folglich der abgekürzte $BDGE = \frac{r^3-\varrho^3}{r-\varrho} \cdot \frac{\alpha\pi}{3}$.

§. 612. Aufg. (Fig. 184.) Die Oberfläche einer jeden Pyramide, die Grundflächen nicht mitgerechnet, auszumeſſen.

Auflöſ. Da alle Seitenflächen, wie KAB, Triangel ſind,

ſind, die man nach §. 335. ausrechnet, ſo geben dieſe zuſammen die verlangte Oberfläche.

§. 613. Zuſ. 1. Iſt die Pyramide gleichſeitig, wie §. 476, ſo iſt ihre Oberfläche das Product des halben Perpendikels KR in den Umring ihrer Grundfläche, folglich einem Triangel gleich, deſſen Grundlinie dem Umringe ihrer Grundfläche, und deſſen Höhe dem Perpendikel KR gleich iſt.

§. 614. Zuſ. 2. Wird von einer ſolchen Pyramide das obere Stück weggenommen, ſo ſind die Seitenflächen der abgekürzten Pyramide Trapeze von gleichen Höhen, folglich ihre Summe das Product ſolcher Höhe FR in den Umfang eines parallelen Schnitts durch die Mitte der Seitenlinie FL. Vergl. §. 335.

§. 615. Zuſ. 3. Wird, wie §. 523, eine Pyramide in und um einen Kegel beſchrieben, ſo iſt die Oberfläche des innern kleiner, des äußern aber größer, als die gekrümmte Oberfläche des Kegels.

§. 616. Lehrſ. (Fig. 198.) Die gekrümmte Oberfläche eines ſenkrechten Kegels iſt ſo groß, als ein Triangel KLM, deſſen Höhe KM der Seite des Kegels, und deſſen Grundlinie KL dem Umringe ſeiner Grundfläche gleich iſt.

Bew. Die coniſche Oberfläche kann weder kleiner noch größer ſeyn, als der beſchriebene Triangel KLM, das iſt, wenn man die Höhe KM beybehält, die Grundlinie des der Oberfläche gleichen Triangels kann weder kleiner noch größer ſeyn als KL.

1. Sie ſey größer, etwa KN, daß, wenn man MN zieht, die coniſche Oberfläche = ΔKNM wäre.

Es ſey die Grundfläche des Kegels der Kreis Fig. 190. Man beſchreibe um den Kreis ein Polygon ABCDE, deſſen

Umring $<KN$ §. 301, und ſetze auf dieſes Polygon eine Pyramide wie §. 523, ſo wäre deren Oberfläche, die Grundfläche nicht mitgerechnet, $<\triangle KNM$ §. 612, alſo kleiner als die Oberfläche des Kegels, um den die Pyramide beſchrieben worden, welches unmöglich iſt, §. 615.

2. Sie ſey kleiner, etwa KP, daß, wenn man MP zieht, die coniſche Oberfläche $=\triangle KPM$ wäre.

Es ſey wiederum die Grundfläche des Kegels der Kreis Fig. 190. Man beſchreibe in den Kreis ein Polygon abcde, deſſen Umring $>KP$, §. 300, etwa $=KQ$, und ſetze auf dieſes Polygon eine Pyramide wie §. 523. Ferner nehme man an, daß RK der Perpendikel von der Spitze ſolcher Pyramide auf die Seite ſeiner Grundfläche ſey (wie KR in Fig. 184.) und ziehe RQ, ſo iſt die Oberfläche ſolcher Pyramide $=\triangle KQR$ §. 612. Je mehr ſich nun der Punct Q dem L nähert, deſto mehr nähert ſich der Punct P dem M, und rückt in M, wenn Q in L rückt, da dann die Oberfläche der Pyramide $=\triangle KLM$, folglich $>\triangle KPM$ wird, d. i. die Oberfläche der Pyramide wird größer, als die Oberfläche des Kegels, worein ſie beſchrieben worden, welches unmöglich iſt, §. 615.

§. 617. Zuſ. 1. Iſt l des Kegels Seite, d der Durchmeſſer ſeiner Grundfläche, ſo iſt ſeine gekrümmte Oberfläche

$$S=\frac{ld\pi}{2}.$$

Eines andern ſenkrechten Kegels Seite ſey λ, und Durchmeſſer δ, ſo iſt deſſen Oberfläche $\Sigma=\frac{\lambda\delta\pi}{2}$.

Folglich iſt $S:\Sigma=ld:\lambda\delta$, folglich $=d:\delta$, wenn $l=\lambda$, und $=l:\lambda$, wenn $d=\delta$ iſt.

Man nennt auch der Kürze wegen das Rectangel der

der Kegelfläche, wie $\frac{ld}{2}$, $\frac{\lambda\delta}{2}$, welches von der Seite des Kegels und dem Halbmesser seiner Grundfläche eingeschlossen wird.

§. 618. Zus. 2. Die gekrümmte Oberfläche des senkrechten Kegels ist einem Kreise gleich, dessen Halbmesser die mittlere Proportionallinie zwischen der Seite des Kegels und dem Halbmesser seiner Grundfläche ist.

Denn es sey dieses Kreises Halbmesser r, folglich der Kreis $r^2\pi$, so soll $\frac{ld\pi}{2} = r^2\pi$ seyn, oder $\frac{ld}{2} = r^2$, folglich $l : r = r : \frac{d}{2}$.

Für die Oberfläche Σ eines andern Kegels hat man $\frac{\lambda\delta}{2} = \varrho^2$, folglich $S : \Sigma = r^2 : \varrho^2$.

§. 619. Zus. 3. Bedeuten R, r, die Halbmesser der Kreise, die der Cylinderfläche K und Kegelfläche k gleich sind, §. 600. 618, A die Höhe des Cylinders, l die Seite des Kegels, D, d, die Durchmesser der beiderseitigen Grundflächen: so ist $K : k = R^2 : r^2 = AD : \frac{ld}{2}$, §. 600. 618, d. i. die Cylinderfläche verhält sich zur Kegelfläche, wie das Rectangel durch des Cylinders Axe zum Rectangel der Kegelfläche.

§. 620. Aufg. (Fig. 192.) Die gekrümmte Oberfläche eines abgekürzten senkrechten Kegels auszumessen.

Auflös. Es sey der Schnitt GF mit BD parallel. $CD = r$, $EG = \varrho$, $AG = x$, $GD = e$, so ist die Oberfläche

des Kegels AGF $= \varrho\pi x$, und des Kegels ADB $= r\pi(x+e)$ §. 617. Nun sey GH mit AC parallel, so ist DH : DG = GE : GA, d. i. $r-\varrho : e = \varrho : x$, und DH : DG = DC : DA, d. i. $r-\varrho : e = r : x+e$, folglich $x = \frac{e\varrho}{r-\varrho}$, und $x+e = \frac{er}{r-\varrho}$. Demnach ist die Oberfläche des Kegels AGF $= \frac{e\varrho^2\pi}{r-\varrho}$, und des Kegels ADB $= \frac{er^2\pi}{r-\varrho}$, folglich des abgekürzten Kegels DGFB $= e\pi \cdot \frac{r^2-\varrho^2}{r-\varrho} = e\pi(r+\varrho)$.

§. 621. Zus. Ist der Schnitt so nahe bey der Grundfläche, daß e unendlich klein ist, so ist $r-\varrho = \frac{\varrho}{x} \cdot e$ gleichfalls unendlich klein, folglich sind r und ϱ von einander nicht zu unterscheiden, oder so ist $r+\varrho = 2r$, folglich die abgekürzte Kegelfläche $= 2er\pi$.

§. 622. Aufg. (Fig. 199.) Die Oberfläche einer jeden Kugel auszumessen.

Auflös. Auf AD sey ein halber Kreis ABD, und CB senkrecht. Durch B ziehe man GH mit AD, und durch A, D, die AH, DG mit CB parallel. Einem willkührlichen Punkte E im Umkreise sey ein andrer F unendlich nahe, daß also EF ein unendlich kleines Stück der Tangente an E ist, welche CB in Q schneidet. Endlich ziehe man durch E, F mit AD die Parallelen mm, nn, welche CB in M, N schneiden. Man setze AC $= r$, EM $= \varrho$, EF $= e$, und MN $= g$.

Drehet sich nun der Quadrant ACB, und das Quadrat ACBH um CB, auch der rechtwinkliche Triangel FNQ um QN, so wird dadurch eine Halbkugel und ein senkrechter Cy-

Cylinder und Kegel beſchrieben, und zwar beſchreibt nun das unendlich ſchmale Stück der Cylinderfläche $= 2gr\pi$, §. 590, und EF das unendlich ſchmale Stück der Kugel- und Kegelfläche $= 2e\varrho\pi$, §. 621.

Von E fälle man auf FN einen Perpendikel EK, und ziehe EC, ſo iſt CEF = R = MEK, d. i. CEK + KEF = CEK + CEM, folglich KEF = CEM. Folglich ſind die eben genannten, bey K und M rechtwinklichen, Triangel ähnlich, und man hat EM:EC = EK:EF, d. i. $\varrho : r = g : e$, folglich $e = \frac{gr}{\varrho}$, folglich die ſchmale Kugelfläche, welche EF beſchreibt, d. i. $2\varrho\pi . e = 2\varrho\pi . \frac{gr}{\varrho} = 2gr\pi$, d. i. der ſchmalen Cylinderfläche, welche mn beſchreibt, gleich.

Da nun dieſe Gleichheit gilt, wo man auch den Punkt E im Umkreiſe AB angenommen habe, die ganze Oberfläche der Halbkugel aber aus lauter ſolchen Stücken = EF, und die Cylinderfläche aus eben ſo vielen Stücken = mn beſteht, ſo ſind beide einander gleich.

Demnach iſt die Oberfläche der Kugel der Oberfläche eines Cylinders gleich, deſſen Durchmeſſer und Höhe dem Durchmeſſer der Kugel gleich iſt.

§. 623. Zuſ. 1. Iſt d, r der Durchmeſſer und Halbmeſſer der Kugel, ſo iſt die Kugelfläche $S = d\pi . d = d^2\pi = 4r^2\pi$, folglich vier größten Kugelkreiſen gleich, oder einem Kreiſe, deſſen Halbmeſſer $R = 2r$ iſt.

Für eine andere Kugel, deren Halbmeſſer ϱ, iſt die Fläche $\Sigma = 4\varrho^2\pi$, folglich $S : \Sigma = 4r^2\pi : 4\varrho^2\pi = r^2 : \varrho^2$.

§. 624. Zuſ. 2. (Fig. 194.) Es ſey ACF ein Quadrant, deſſen Halbmeſſer CA = r, und in AF ein Punkt P gegeben, von dem ein Perpendikel PQ auf AB

fällt, so ist AQ sowohl als QC gegeben, und man hat das Stück der Kugelfläche, welches der Bogen PF beschreibt, $= 2r\pi . CQ$, und das Stück, welches der Bogen AP beschreibt, $= 2r\pi . AQ$.

Zieht man nun die Sehnen AP, PB, so ist $APB = R$, und $\triangle AQP \sim \triangle ABP$, folglich $AB : AP = AP : AQ$, folglich $AQ = \frac{AP^q}{AB} = \frac{AP^q}{2r}$, folglich das Stück der Kugelfläche, welches der Bogen AP beschreibt, $= 2r\pi . \frac{AP^q}{2r}$ $= \pi . AP^q$, d. i. einem Kreise gleich, dessen Halbmesser die Sehne AP ist.

§. 625. Aufg. Jede Kugel auszumessen.

Auflös. Das Product des größten Kugelkreises in den Durchmesser giebt einen Cylinder §. 501, wovon die Kugel zwey Drittheile enthält.

Der Kugel Inhalt heiße K, ihr Durchmesser und Halbmesser d und r, so ist $K = \frac{2}{3} . 2r . r^2\pi = \frac{4}{3} . r^3\pi$, oder $K = \frac{2}{3} . d . \frac{d^2\pi}{4} = \frac{1}{6} d^3\pi$.

§. 626. Zus. 1. Aus $K = \frac{d^3\pi}{6}$ folgt $\frac{6K}{\pi} = d^3$, folglich $\sqrt[3]{\frac{6K}{\pi}} = d$. Vergl. §. 347.

§. 627. Zus. 2. Für eine andere Kugel, deren Durchmesser und Halbmesser δ und ϱ, ist der Inhalt $= \frac{4}{3}\varrho^3\pi = \frac{1}{6}\delta^3\pi$, folglich sind beide in der Verhältniß $r^3 : \varrho^3$ oder $d^3 : \delta^3$.

§. 628. Zus. 3. Will man den Halbmesser r einer nmal größern Kugel, so hat man $1 : n = r^3 : \varrho^3$, folglich $\varrho = r\sqrt[3]{n}$.

IV.

Die Trigonometrie.

Erster Theil.

Die ebene Trigonometrie.

1. Von dem Sinus, der Tangente, und den übrigen trigonometrischen Linien.

§. 1. Erkl. (Fig. 201.) Eines Kreisbogens AB Sinus heißt der Perpendikel BE, der von des Bogens einem Endpunkte B auf den durch den andern Endpunkt A gehenden Durchmesser AD fällt.

§. 2. Zus. 1. Der Sinus eines Bogens ist die halbe Sehne des doppelten Bogens.

Denn verlängert man einen Sinus, wie BE, bis er den Kreis wieder in F schneidet, so ist, weil CA auf BF senk-

ſenkrecht, $BE = \frac{1}{2}BF$, und $BA = \frac{1}{2}BAF$. (Geom. §. 142. 180.)

Z. E. Seßt man $BAF = 60°$, ſo iſt $BF = CB$ (Geom. §. 198.), folglich $\frac{1}{2}BF = \sin 30° = \frac{1}{2}CB$. Seßt man $BAF = 90°$, ſo iſt $BF^2 = 2CB^2$, folglich $BF = CB \cdot \sqrt{2}$, und $\frac{1}{2}BF = \sin 45° = \frac{CB}{2} \cdot \sqrt{2}$.

Oder hat man aus Geom. §. 372. $\text{chord. } 36° = CB \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ſo iſt $\sin 18° = \frac{CB}{4} \cdot \sqrt{5}-1$.

§. 3. Anm. 1. Iſt eines Bogens BA Sinus BE gegeben, ſo findet man den Sinus des halben Bogens, wenn man nach Geom. §. 342. die Sehne des Bogens BA ſucht, und ſolche halbirt.

Z. E. Aus §. 2. hat man $\sin 30°$, $\sin 45°$, und $\sin 18°$, folglich hieraus $\sin 15°$, $\sin 22\frac{1}{2}°$, $\sin 9°$, und wiederum hieraus $\sin 7\frac{1}{2}°$, $\sin 11\frac{1}{4}°$, und $\sin 4\frac{1}{2}°$ u. ſ. w.

§. 4. Anm. 2. Iſt eines Bogens $\frac{1}{2}BA$ Sinus gegeben, ſo findet man den Sinus des doppelten Bogens BA, wenn man nach Geom. §. 367. die Sehne des Bogens $2BA$ ſucht, und ſolche halbirt.

§. 5. Zuſ. 2. Zwey Bogen, die einander zu 180 Grad ergänzen, haben völlig einerley Sinus.

Für AB und BLD folgt dies aus §. 1. unmittelbar. Nimmt man $DL = AB$, daß $ABL = 180° - AB$, ſo iſt $LK = \sin ABL = BE = \sin AB$. (Geom. §. 82.)

Iſt CG ſenkrecht auf AD, ſo iſt auch $GL = GB$, d. i. „die Bogen AB, AGL, die von 90 Grad zu beiden Seiten „gleichviel unterſchieden ſind, haben einerley Sinus.“

§. 6. Zuſ. 3. Die Sinus der Bogen von 0 bis 90 Grad wachſen von 0 bis zum Halbmeſſer, aber derer über 90 bis zu 180 Grad nehmen ab vom Halbmeſſer bis 0.

Dies

Dies einzusehen, braucht man sich nur vorzustellen, daß die Linie BE, immer sich parallel, von A bis G, und von G bis D fortrücke. Vergl. Geom. §. 158.

§. 7. Zus. 4. Zwey Bogen, die von 180, 270, 360 Grad zu beiden Seiten gleichviel unterschieden sind, haben gleichgroße Sinus, nur daß die für das erste und dritte Paar einander entgegengesetzt, aber die für das mittelste völlig einerley sind.

Denn verlängert man LK, bis sie den Umkreis wieder in M trifft, so ist LD=DM, und MK=sin ADM =LK=sin AGL; aber beide Sinus sind einander entgegengesetzt, weil sie auf entgegengesetzte Seiten des Durchmessers AD fallen.

Verlängert man BE bis F, so ist AF=AB, und FE =sin AHF =BE=sin AB, auch beide entgegengesetzt.

Verlängert man nun auch GC bis H, so ist HM=HF, und MK=sin ADM = FE=sin AHF, die einander nicht entgegengesetzt sind.

§. 8. Zus. 5. Die Sinus der Bogen über 180 bis 270 Grad wachsen entgegengesetzt von 0 bis zum Halbmesser, aber derer über 270 bis zu 360 Grad nehmen eben so ab vom Halbmesser bis 0.

Hiezu lasse man MK, immer sich parallel, von D bis H, und von H bis A fortrücken. Vergl. §. 6.

§. 9. Zus. 6. Da auch eben dieselben Sinus bleiben, wenn man gleich den ganzen Umkreis, oder ein Vielfaches desselben zu irgend einem Bogen x addirte, oder da sin x = sin (n. 360+x) ist, so folgt aus dem Bisherigen, daß der Halbmesser der größte Sinus sey. Man betrachtet daher alle übrigen als Theile von ihm, und nennt ihn deshalb den sinus totus.

§. 10.

§. 10. Zuſ. 7. Nennt man die Sinus im erſten und zweyten Quadranten AG, GD, d. i. für die Bogen von 0 bis 180 Grad, bejaht oder poſitiv, ſo heißen die im dritten und vierten Quadranten DH, HA, verneint oder negativ.

Z. E. Setzt man CB=r, AB=LD=DM=FA=30°, ſo iſt ſin 30°=ſin 180°−30°=+½r, aber ſin 180°+30°=ſin 360°−30°=−½r.

§. 11. Erkl. (Fig. 201.) Eines Kreisbogens AB Coſinus heißt der Sinus BN ſeiner Ergänzung BG zum Quadranten, oder, weil CE=BN, das Stück des Halbmeſſers CE vom Mittelpunkte C bis zum Sinus BE. Das übrige Stück des Halbmeſſers AE, von des Bogens Endpunkte A bis zum Sinus BE, heißt ſein Querſinus, ſinus verſus. Sein coſinus verſus heißt der ſinus verſus ſeiner Ergänzung zum Quadranten.

§. 12. Zuſ. 1. Für den Halbmeſſer, oder ſinus totus, r, und einen Bogen x, iſt coſ x=√(r²−ſin x²) und ſin verſ x=r−coſ x, und coſ verſ x=r−ſin x.

Das erſte gilt, weil CE²=CB²−BE², das zweyte, weil AE=CA−CE, das dritte, weil GN=CG−GN=CG−BE.

Z. E. Coſin 30°, oder ſin 60°=√(r²−¼r²)=√¾r²=$\frac{r\sqrt{3}}{2}$, coſ verſ 30°=r−½r=½r, ſin verſ 30°=r−$\frac{r\sqrt{3}}{2}$=r.$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Anm. So oft in der Folge dergleichen Ausdruck, wie ſin x², vorkömmt, ſo bezieht ſich der Exponent nicht auf den Bogen x, ſondern auf die Linie ſin x, und es müßte eigentlich (ſin x)² heißen.

§. 13.

§. 13. Zuſ. 2. Die Bogen AB, ABL, §. 5. haben gleiche aber entgegengeſetzte Coſinus.

Denn es iſt CK = coſ BLD = CE = coſ AB, wo beide einander entgegengeſetzt ſind.

§. 14. Zuſ. 3. Die Coſinus im erſten und vierten Quadranten ſind poſitiv, im zweyten und dritten aber negativ, nehmen im erſten und dritten Quadranten vom Halbmeſſer an bis zu Null ab, aber im zweyten und vierten Quadranten von Null bis zum Halbmeſſer zu.

Hiezu laſſe man die Sehne BF, immer ſich parallel, von A nach D, und von D wieder nach A fortrücken, da dann auch das Aehnliche von §. 7. ſtatiſinden wird.

§. 15. Zuſ. 4. Der Querſinus in den beiden erſten Quadranten wächſt von Null bis zum Durchmeſſer (da z. E. ſin verſ AB = AE, und ſin verſ AGL = AK) und nimmt von da bis zu Null in den beiden letzten Quadranten wieder ab, bleibt aber ſtets bejahend, weil er immer von A bis zum Sinus geht. Auch giebt dies die Formel ſin verſ x = r ∓ coſ x §. 12, vergl. §. 13.

§. 16. Zuſ. 5. Gienge man im Umkreiſe vom Punkte A an nunmehr entgegengeſetzt nach F, M, L, B u. ſ. w. ſo müßten die Bogen AF, AFM, AML, ALB u. ſ. w. negativ heißen, wenn man die vorigen AB, ABL, ALM, AMF poſitiv nennt, da dann die Sinus zweyer gleicher entgegengeſetzter Bogen gleich aber entgegengeſetzt, ihre Coſinus völlig einerley, bejaht oder verneint, und die Querſinus auch einerley und immer bejaht ſind.

Z. E. Im erſten bejahten Quadranten AG, und verneinten AH, ſind für zwey gleiche Bogen AB, AF, gleiche aber entgegengeſetzte Sinus BE, FE, einerley bejahter Coſinus CE, und bejahter Querſinus AE. In dem zweyten Quadranten GD, HD ſind für die gleichen Bogen AGL, AHM,

AHM, gleiche aber entgegengesetzte Sinus LK, MK, einerley verneinter Cosinus CK, und bejahter Quersinus AK u. s. w.

§. 17. Erkl (Fig. 201.) Eines Kreisbogens AB oder ABL Tangente, tangens, heißt die ihn in dem einen Endpunkte A berührende Linie AP oder AQ, von solchem Punkte A an bis zu dem Punkte P oder Q, wo sie mit der durch den andern Endpunkt B oder L und des Kreises Mittelpunkt C gelegten Linie CP oder CQ zusammentrifft. Und diese Linie CP oder CQ, von des Kreises Mittelpunkte an bis zur Tangente, heißt des Bogens AB oder ABL Secante, secans.

§. 18. Zus. 1. Zwey Bogen, die von 90, 180, 270 und 360 Grad zu beiden Seiten gleichviel unterschieden sind, haben gleiche Tangenten, nur daß diese im ersten und dritten Quadranten bejahend, im zweyten und vierten aber verneinend sind.

Denn ist LD = AB, so ist AP = tang AB = tang ADM = AQ = tang AGL = tang AHF, wo AQ und AP entgegengesetzte Lagen haben.

§. 19. Zus. 2. Im ersten und dritten Quadranten wachsen die Tangenten von Null bis Unendlich (von 0 bis ∞), im zweyten und vierten nehmen sie ab von ∞ bis 0, d. i. die Tangenten der Bogen von 0 bis 90, und derer über 180 bis zu 270 Grad, wachsen von 0 bis ∞; derer über 90 bis zu 180, und derer über 270 bis 360 Grad, nehmen ab von ∞ bis 0.

Hiezu lasse man den Halbmesser CA sich immer um C umdrehen, und sich mit AP, beide gehörig verlängert, schneiden, da dann CA in der Lage GH mit AP parallel ist, und das stattfindet, was Geom. §. 91. gesagt ist.

§. 20. Zus. 3. Aus dem Sinus und Cosinus eines Bogens x ergiebt sich seine Tangente.

Denn

Denn da AP mit BE parallel, so ist CE:EB=CA:AP, d. i. $\cos x : \sin x = r : \text{tang } x$, folglich $\text{tang } x = r \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$.

Z. E. für $x = 90°$ ist $\cos x = 0$, folglich $\text{tang } 90° = \frac{r \cdot \sin x}{0} = \infty$, wie §. 19.

§. 21. Zus. 4. Aus dem Cosinus eines Bogens x ergiebt sich seine Secante.

Denn es ist auch CE:CA=CB:CP, d. i. $\cos x : r = r : \text{sec } x$, folglich $\text{sec } x = \frac{r^2}{\cos x}$.

Daher hat auch die Secante mit dem Cosinus stets einerley Zeichen.

§. 22. Zus. 5. Tangente und Secante bestimmen einander.

Denn es ist $CP^2 = CA^2 + AP^2$, d. i. $\text{sec } x^2 = r^2 + \text{tang } x^2$, folglich $\text{sec } x = \sqrt{(r^2 + \text{tang } x^2)}$.

Z. E. Für AB=45°, ist AP=AC=r=tang 45°, folglich $\text{sec } 45° = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$.

§. 23. Zus. 6. Auch lassen sich Tangenten und Secanten mit Sinus und Cosinus in Verbindung bringen.

Denn es ist CP:CB=AP:BR=CA:CE, d. i. $\text{sec } x : r = \text{tang } x : \sin x = r : \cos x$, folglich $\text{tang } x = \frac{\text{sec } x \cdot \sin x}{r}$; $\sin x = \frac{r \cdot \text{tang } x}{\text{sec } x} = \frac{r \cdot \text{tang } x}{\sqrt{(r^2 + \text{tang } x^2)}}$, $\cos x = \frac{r^2}{\text{sec } x} = \frac{r^2}{\sqrt{(r^2 + \text{tang } x^2)}}$.

§. 24. Erkl. (Fig. 201.) Eines Kreisbogens AB

Cotangente oder Cosecante, cotangens, cosecans, heißt die Tangente GR, oder Secante CR seiner Ergänzung GB zum Quadranten.

§. 25. Zus. 1. Die Cotangente ist durch die Tangente, oder Sinus und Cosinus gegeben.

Denn da CG mit AP parallel, folglich APC=GCR, so ist AP : AC = CG : GR, d. i. tang x : r = r : cot x, folglich tang x. cot x = r², und $\cot x = \frac{r^2}{\tang x} = \frac{r \cos x}{\sin x}$

§. 26.

Daher haben auch die Cotangenten stets einerley Zeichen mit den Tangenten. Auch ist für einen andern Bogen y, $\cot y = \frac{r^2}{\tang y}$, folglich cot x : cot y = tang y : tang x.

§. 26. Zus. 2. Aus dem Sinus findet man die Cosecante.

Denn es ist auch BE : CB = CG : CR, d. i. sin x : r = r : cosec x, folglich $\operatorname{cosec} x = \frac{r^2}{\sin x}$.

Daher hat auch die Cosecante stets einerley Zeichen mit dem Sinus.

§. 27. Zus. 3. Cotangente und Cosecante bestimmen einander.

Denn es ist $CR^2 = CG^2 + GR^2$, d. i. $\sec x^2 = r^2 + \cot x^2$, folglich $\sec x = \sqrt{(r^2 + \cot x^2)}$ und $\cot x^2 = \sqrt{(\sec x^2 - r^2)}$

§. 28. Anm. Aus Obigem erhellet, wie man aus dem gegebenen Sinus und Cosinus eines Bogens seine übrigen trigonometrischen Linien §. 17, 24 finden könne. Desgleichen sieht man leicht,

leicht, daß obige Formeln auch für Bogen > 90 Grad gelten, wenn man nur die gehörigen Zeichen anbringt.

§. 29. Lehrs. (Fig. 202.) Die trigonometrischen Linien verhalten sich bey ähnlichen Bogen, wie die Halbmesser.

Bew. Aus dem Scheitel des Winkels ACB beschreibe man mit dem Halbmesser CA, Ca, die ähnlichen Bogen AB=v, ab=u, und verzeichne ihre trigonometrischen Linien §. 1. 11. 17. 24: so ist nach Geom. §. 243. CB: Cb = BD: bd = CD: Cd; d. i. CA: Ca = sin v: sin u = cos v: cos u; ferner CA: Ca = AE: ae = CE: Ce; d. i. CA: Ca = tang v: tang u = sec v: sec u; desgleichen CF: Cf = FG: fg = CG: Cg, d. i. CA: Ca = cot v: cot u = cosec v: cosec u.

§. 30. Zus. 1. Jede trigonometrische Linie erhält ihre bestimmte Größe erst durch die Verhältniß gegen den Halbmesser des Kreises, von dem v und u ein Bogen ist; aber diese Verhältniß ist für jeden Halbmesser einerley.

Z. E. Wenn v sowohl als u = 30°: so ist sin v = ½ CA, und sin u = ½ Ca §. 2. Setzt man daher Ca = 1 und CA = 1000: so ist sin u = 0, 5 und sin v = 500; da dann 1 : 0, 5 = 1000 : 500. Oder theilte man beyde Halbmesser in einerley Menge von Theilen, z. E. in 24: so kämen deren auch einerley Menge, nämlich 12 auf sin 30°, deren Verhältniß auf der Verhältniß der Halbmesser beruhete.

§. 31. Zus. 2. Hätte man die trigonometrischen Linien für einen Halbmesser berechnet: so ließen sie sich leicht für jeden andern Halbmesser bestimmen.

Z. E. Es sey sin u für den Halbmesser 1, und sin v für den Halbmesser r: so ist aus §. 29, 1 : r = sin u : sin v, folglich sin v = r. sin u, und sin u = $\frac{\sin v}{r}$.

§. 32. Zuſ. 3. Für jeden angenommenen Halbmeſſer CA beruhet die Größe des Bogens AB, und die Verhältniß ſeiner trigonometriſchen Linien zum Halbmeſſer, auf der Größe des Winkels ACB. In ſo fern man alſo den Bogen AB als das Maaß des Winkels ACB anſehen kann (Geom. §. 294.), ſo beziehen ſich die trigonometriſchen Linien auf die Winkel eben ſo, wie auf die Bogen, daß z. E. x den Bogen AB und den Winkel ACB, und ſin x den Sinus des Bogens und des Winkels bedeutet, und es einerley iſt, wie groß man in dem einen Schenkel des Winkels den Halbmeſſer angenommen habe; nur muß man hiebey auch Winkel $> 180°$ ſtattfinden laſſen, (vergl Geom. § 61.) Auch wechſeln für die Winkel die Zeichen der trigonometriſchen Linien wie für die Bogen ab.

§. 33. Zuſ. 4. Drückt man die Winkel und ihre Bogen durch Grade aus, ſo ſind die trigonometriſchen Linien nichts anders als Zahlen, die für gewiſſe Winkel und Bogen gehören, und einen in beſtimmte Theile getheilten Halbmeſſer vorausſetzen.

§. 34. Anm. Der Kürze wegen ſetzt man in den allgemeinen Formeln für die trigonometriſchen Linien den Halbmeſſer $= 1$, und verſteht darunter nach Befinden der Umſtände auch das Quadrat des Halbmeſſers. Hienach iſt aus §. 2. $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{chord } 36° = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, aus §. 12. $\cos x = \sqrt{(1-\sin x^2)}$, $\sin \text{verf } x = 1-\cos x$, $\cos \text{verf } x = 1-\sin x$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \text{verf } 30° = \frac{1}{2}$, $\sin \text{verf } 30° = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$; aus §. 20 bis 23. $\text{tang } x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \sqrt{(1+\text{tang } x^2)}$, $\text{tang } 45° = 1$, $\sec 45° = \sqrt{2}$, $\text{tang } x = \sec x \sin x$, $\sin x = \frac{\text{tang } x}{\sec x} = \frac{\text{tang } x}{\sqrt{(1+\text{tang } x^2)}}$, $\cos x = \frac{1}{\sec x} =$

$\frac{1}{\sqrt{(1+\tang x^2)}}$; aus §. 25 bis 27. $\cot x = \frac{1}{\tang x} = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, $\sec x = \sqrt{(1+\cot x^2)}$, $\cot x = \sqrt{(\sec x^2 - 1)}$

2. Von Zuſammenſetzung trigonometriſcher Linien.

§. 35. Aufg. (Fig. 203.) Die Sinus zweyer Bögen ſind gegeben; man ſoll den Sinus und Coſinus der Summe und Differenz der Bögen finden.

Aufl. Man nehme an, daß die Bogen ſowohl, als ihre Summe $< 90°$; ſetze $CA = r$, und in der Folge $= 1$, $AB = x$, $BD = BM = y$; und es ſey $BE = \sin x$, $DG = MG = \sin y$, folglich auch aus §. 12. $CE = \cos x$, $CG = \cos y$, gegeben.

I. Man ſucht $DF = \sin(x+y)$. Durch G ſey GH mit BE, und GK mit AC parallel: ſo iſt $CB : BE = CG : GH$ (Geom. §. 243.) d. i. $r : \sin x = \cos y : GH$, folglich $\frac{\sin x \cdot \cos y}{r} = GH = KF$.

Da bey E und K rechte Winkel, und $BGE = CGK = GDK$: ſo iſt $CB : CE = DG : DK$ (Geom. §. 257.) d. i. $r : \cos x = \sin y : DK$, folglich $\frac{\cos x \cdot \sin y}{r} = DK$.

Demnach iſt $KF + DK = DF = \sin(x+y) = \frac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{r}$

II. Man ſucht $MN = \sin(x-y)$. Durch M ſey ML mit AC parallel: ſo iſt $DGK = GMR$, bey K und R rechte Winkel, und $DG = GM$, folglich $DK = GR$, und $GK = MR$ (Geom. §. 82.) Folglich iſt auch $DK = KL$,

folglich $KF - DK = LF = MN = \sin(x-y) = \frac{\sin x . \cos y - \cos x . \sin y}{r}$.

III. Man ſucht $CF = \cos(x+y)$. Nach Obigem iſt auch $CB : CE = CG : CH$, d. i. $r : \cos x = \cos y : GH$, folglich $\frac{\cos x . \cos y}{r} = CH$. Ferner iſt auch $CB : BE = DG : GK$, d. i. $r : \sin x = \sin y : GK$, folglich $\frac{\sin x . \sin y}{r} = GK = FH$.

Demnach iſt $CH - FH = CF = \cos(x+y) = \frac{\cos x . \cos y - \sin x . \sin y}{r}$.

IV. Man ſucht $CN = \cos(x-y)$. Da nach Obigem $GK = MR = NH = FH$: ſo iſt $CH + NH = CN = \cos(x-y) = \frac{\cos x . \cos y + \sin x . \sin y}{r}$.

Exempel. Es ſey $x = 45°$, $y = 30°$; man ſucht $\sin 75°$, und $\cos 75° = \sin 15°$.

Aus §. 2. hat man $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \cos x$, $\sin y = \frac{1}{2}$, $\cos y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Folglich iſt $\sin(x+y) = \frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$; und $\cos(x+y) = \frac{\sqrt{2} . \sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} . (\sqrt{3}-1)}{4}$.

Die Rechnung ſelbſt wird nach Art. §. 215. angeſtellet; wobey man die Factoren bis auf 8 Decimalſtellen annimmt, um das Product bis auf 7 Stellen richtig zu haben.

§. 36.

§. 36. Zus. 1. Obgleich §. 35. angenommen ist, daß die Bogen x, y sowohl, als ihre Summe, $< 90°$ wären: so kann man doch die daselbst gefundnen Formeln auch auf andre Bogen leicht anwenden, wenn man dem Sinus und Cosinus das nach §. 10. 14. zugehörige Zeichen giebt.

Z. E. $\cos(60°+45°) = \frac{1}{2}.\frac{r_2}{2} - \frac{r_3}{2}.\frac{r_2}{2} = \frac{r_2}{4}(1-r_3) = -\cos 75°$, wie seyn muß; weil $60°+45° = 105° = 180° - 75°$.

Für $\sin(45°+120°)$ setze man $\sin 120° = \sin 60° = \frac{r_3}{2}$, und $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$, folglich $\sin(45°+120°) = \frac{r_2}{2}.\frac{r_3}{2} + \frac{1}{2}.\frac{r_2}{2} = \sin 75°$.

Zur Uebung können sich Anfänger für ein und das andre Beyspiel besondre Figuren entwerfen.

§. 37. Zus. 2. Aus dem Sinus des einfachen Bogens findet man den Sinus und den Cosinus des doppelten Bogens, wenn man §. 35 $x=y$ setzt; da dann $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$, und $\cos 2x = \cos x^2 - \sin x^2$. Oder: (weil $\cos x^2 = 1 - \sin x^2$, und $\sin x^2 = 1 - \cos x^2$) $\cos 2x = 1 - 2\sin x^2 = 2\cos x^2 - 1$.

Setzt man $x = \frac{1}{2}z$, oder $2x = z$: so ist $\sin z = 2\sin\frac{1}{2}z.\cos\frac{1}{2}z$, und $\cos z = 2\cos\frac{1}{2}z^2 - 1 = 1 - 2\sin\frac{1}{2}z^2$.

§. 38. Zus. 3. Aus dem Sinus eines Bogens findet man den Sinus und Cosinus seiner Hälfte, wenn man wiederum $x=y$ setzt; da dann aus §. 37. $2\sin x^2 = 1 - \cos 2x$, folglich $\sin x = r\frac{1-\cos 2x}{2}$, oder $\sin\frac{1}{2}z =$

$\sqrt{\frac{1-\cos z}{2}}$; desgleichen $2\cos x^2 = 1+\cos 2x$, folglich $\cos x = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$, oder $\cos \frac{1}{2}z = \sqrt{\frac{1+\cos z}{2}}$.

Z. E. Für $z = 30$, also $\sin z = \frac{1}{2}$, $\cos z = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ist $\sin 15° = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})}$.

§. 39. Zus. 4. Setzt man in den Formeln $\sin(x+y)$ und $\cos(x+y)$ §. 35. $y = x$, also die §. 37. gefundnen Werthe $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$, und $\cos 2x = \cos x^2 - \sin x^2$: so erhält man $\sin 3x = 3\sin x \cdot \cos x^2 - \sin x^3$, und $\cos 3x = \cos x^3 - 3\cos x \cdot \sin x^2$.

Auf eben die Art kann man $\sin 4x$ und $\cos 4x$ finden, wenn man $y = 3x$, also für $\sin 3x$ und $\cos 3x$ die eben gefundnen Werthe setzet u. s. w.

§. 40. Zus. 5. Aus §. 35. hat man

1) $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$, und
$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$; folglich
$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cdot \cos y$, und
$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x \cdot \sin y$.

2) $\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$, und
$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ folglich
$\cos(x-y) + \cos(x+y) = 2\cos x \cdot \cos y$, und
$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\sin x \cdot \sin y$.

Setzt man $x+y = v$, und $x-y = u$: so ist $x = \frac{v+u}{2}$, und $y = \frac{v-u}{2}$ (Ar. §. 171.) folglich nach Obigem

sin

$$\sin v + \sin u = 2 \sin \frac{v+u}{2} \cdot \cos \frac{v-u}{2}$$

$$\sin v - \sin u = 2 \cos \frac{v+u}{2} \cdot \sin \frac{v-u}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{v+u}{2} \cdot \cos \frac{v-u}{2},$$

$$\cos u - \cos v = 2 \sin \frac{v+u}{2} \cdot \sin \frac{v-u}{2}.$$

§. 41. Zuſ. 6. Aus §. 40. hat man

1) $\frac{\sin v + \sin u}{\sin v - \sin u} = \frac{\sin \frac{v+u}{2} \cos \frac{v-u}{2}}{\cos \frac{v+u}{2} \cdot \sin \frac{v-u}{2}} = \frac{\sin \frac{v+u}{2}}{\cos \frac{v+u}{2}} : \frac{\sin \frac{v-u}{2}}{\cos \frac{v-u}{2}} = \tang \frac{v+u}{2} : \tang \frac{v-u}{2}$, d. i. $\sin v + \sin u : \sin v - \sin u = \tang \frac{v+u}{2} : \tang \frac{v-u}{2}$.

2) $\frac{\cos u + \cos v}{\cos u - \cos v} = \frac{\cos \frac{v+u}{2} \cdot \cos \frac{v-u}{2}}{\sin \frac{v+u}{2} \cdot \sin \frac{v-u}{2}} = \frac{\cos \frac{v+u}{2}}{\sin \frac{v+u}{2}} : \frac{\sin \frac{v-u}{2}}{\cos \frac{v-u}{2}} = \cot \frac{u+v}{2} : \tang \frac{u-v}{2}$, d. i. $\cos u + \cos v : \cos u - \cos v = \cot \frac{u+v}{2} : \tang \frac{u-v}{2}$

3) $\sin$

3) $\frac{\sin v + \sin u}{\cos v + \cos u} = \frac{\sin\frac{v+u}{2}}{\cos\frac{v+u}{2}} = \tang\frac{v+u}{2}$

4) $\frac{\sin v - \sin u}{\cos u - \cos v} = \frac{\cos\frac{v+u}{2}}{\sin\frac{v+u}{2}} = \cot\frac{v+u}{2}$

§. 42. Aufg. Die Tangenten zweyer Bogen sind gegeben; man soll die Tangenten und Cotangenten der Summe und Differenz der Bogen finden.

Aufl. I. Für den Halbmesser $= 1$, ist $\tang(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$ §. 30. $= \frac{\sin x . \cos y + \cos x . \sin y}{\cos x . \cos y - \sin x . \sin y}$ §. 35.

Dividirt man die Glieder dieses Bruchs mit $\cos x . \cos y$: so wird der Zähler $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \tang x + \tang y$, und der Nenner $1 - \frac{\sin x . \sin y}{\cos x . \cos y} = 1 - \tang x . \tang y$; folglich $\tang(x+y) = \frac{\tang x + \tang y}{1 - \tang x . \tang y}$.

Da auch $\cot x+y = \frac{1}{\tang(x+y)}$ §. 25: so hat man $\cot(x+y) = \frac{1 - \tang x . \tang y}{\tang x + \tang y}$.

II. Auf eben die Art ist $\tang(x-y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)} =$

sin

$\frac{\sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y} = \frac{\tang x - \tang y}{1 + \tang x \cdot \tang y}$, und $\cot(x-y) = \frac{1 + \tang x \cdot \tang y}{\tang x - \tang y}$.

Z. E. Es ſey $x = 45°$, $y = 30°$, ſo iſt $\tang x = 1$, und $\tang y = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, folglich $\tang 45° + 30° = \frac{1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$ (vergl. Ar. §. 294.) und $\cot 30° = \tang 60° = \sqrt{3}$, folglich $\tang 45° - 30° = \frac{1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$ (vergl. Ar. §. 294.)

§. 43. Zuſ. 1. Setzt man $x = y$ in §. 42. ſo iſt $\tang 2x = \frac{2 \tang x}{1 - \tang x^2}$, und $\cot 2x = \frac{1 - \tang x^2}{2 \tang x}$.

§. 44. Zuſ. 2. Für die Tangente des halben Bogens iſt $\tang x^2 = \frac{\sin x^2}{\cos x^2}$ §. 20. $= \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$ §. 38. $= \frac{(1 - \cos 2x)^2}{(1 - \cos 2x^2)}$ oder $= \frac{1 - \cos 2x^2}{(1 + \cos 2x)^2}$, wenn man mit $1 + \cos 2x$ multiplicirt. Folglich $\tang x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$ oder $= \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$.

Auch iſt $1 + \cos 2x = 1 + \frac{1}{\sec 2x} = \frac{\sec 2x + 1}{\sec 2x}$, folglich $\tang x^2 = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{\sec 2x - 1}{\sec 2x + 1} = \frac{(\sec 2x - 1)^2}{\sec 2x^2 - 1}$ oder

$= \frac{\text{sec } 2x^2 - 1}{(\text{sec } 2x + 1)^2}$, wenn man mit sec $2x + 1$ dividirt.

Folglich ist tang $x = \frac{\text{sec } 2x - 1}{\text{tang } 2x}$, oder $= \frac{\text{tang } 2x}{\text{sec } 2x + 1}$.

3. Von den trigonometrischen Tafeln.

§. 45. Aufg. Die Sinustafeln zu berechnen, d. i. für einen gegebenen Halbmesser die Sinus bis auf einzelne Minuten selbst, sowohl als deren Logarithmen, oder die natürlichen und künstlichen Sinus zu finden.

Auflös. 1. Aus §. 2. 3. hat man sin 18° und sin 15°, folglich auch cos 18° und cos 15°. Hieraus findet man nach den Formeln in §. 35. sin $(18° - 15°) = \sin 3° =$ 5233595 62 für den Halbmesser $=$ 10000 000000, und cos $(18° - 15°) = \cos 3° =$ 9986295347. Hieraus läßt sich nach den Formeln §. 38. sin $\frac{1}{2}°$, cos $\frac{1}{2}°$, und sin $\frac{1}{4}°$, cos $\frac{1}{4}°$, d. i. sin 45′, cos 45′ finden. Hiedurch kann man nach den Formeln §. 35, sin $(x+y)$ und cos $(x+y)$ die Sinus und Cosinus aller Winkel von $\frac{1}{4}$ zu $\frac{1}{4}$ Grad berechnen.

2. Aus Sinus und Cosinus von 45′ findet man mittelst §. 38. nach und nach Sinus und Cosinus von $\frac{45'}{2}$, $\frac{45'}{4}$, $\frac{45'}{8}$, $\frac{45'}{16}$, $\frac{45'}{32}$, $\frac{45'}{64}$, nämlich sin $\frac{45'}{32} =$ 4090615,32 und sin $\frac{45'}{64} =$ 2045307,7. Da nun beide letztere Winkel, und ihre Sinus für den angenommenen Halbmesser die Hälften von einander, folglich proportionirt sind, so setzt man $\frac{45'}{64} : 1' = \sin \frac{45'}{64} : \sin 1' = 2045307,7 : \sin 1'$, und findet dadurch sin 1′ $=$ 2908 82,06. Hiedurch kann man mittelst der Formeln §. 38. 35. nun auch die Sinus und Cosinus für alle einzelnen Minuten des Quadranten berechnen.

3. Aus

3. Aus den gefundenen Zahlen für die Sinus findet man auch deren Logarithmen oder die künstlichen Sinus, nach Anweisung der Ar. §. 456, da dann bey dem angenommenen Halbmesser log sin tot = 10,0000000 ist.

§. 46. Zus. 1. Aus den gefundnen Sinus und Cosinus hat man auch die Tangenten und Cotangenten nach den Formeln §. 20. 25. $\text{tang } x = \frac{r. \sin x}{\cos x}$, und $\cot x = \frac{r. \cos x}{\sin x}$, und hiedurch auch aus den Logarithmen der Sinus und Cosinus die Logarithmen der Tangenten und Cotangenten.

§. 47. Zus. 2. Auf eben die Art können auch die Secanten und Quersinus selbst sowohl als ihre Logarithmen gefunden, oder besser bey vorkommenden Gelegenheiten einzeln berechnet werden.

§. 48. Anm. Die Absicht obiger Aufgabe und ihrer Auflösung geht blos dahin, die allgemeine Möglichkeit und Methode zu zeigen, wie die trigonometrischen Tafeln haben berechnet werden können. Eine vollständige Anweisung hiezu, nebst Anzeige der hiebey dienlichen Abkürzungen, ist nicht dieses Orts; wohl aber eine Nachricht von der Einrichtung und dem Gebrauche der gemeinen Tafeln. Hievon ist Folgendes zu merken:

1) Die Bequemlichkeit erfordert, daß die Winkel unter 45 Grad, und ihre Ergänzungen zu 90 Grad beysammen stehen, um bey dem Sinus und Tangens zugleich den Cosinus und Cotangens zu haben. Auch braucht man blos einen Quadranten, worauf sich die Bogen über 90 Grad leicht bringen lassen.

2) Bey Berechnung der Tafeln hat man den Halbmesser = 10000 Millionen gesetzt, aber in den gemeinen Ausgaben bey den berechneten Zahlen die drey letzten Ziffern weggelassen, also sie nur für den Halbmesser 10 Millionen gegeben. Diese Zahl muß man also in den Formeln für die trigonometrischen Linien mit in Rechnung bringen, §. 31. Es sey nämlich unter sin x der Sinus des Winkels x für den Halbmesser 1, und unter sin tab x der-

derſelbe Sinus für den Halbmeſſer r der Tafeln zu verſtehen, ſo hat man $\sin x = \frac{\sin \text{tab } x}{r}$, und $r \cdot \sin x = \sin \text{tab } x$. Z. E. $\sin \text{tab } 12^{\circ} = 2079117$, folglich $\sin 12^{\circ} = 0{,}2079117$.

Was vom Sinus geſagt worden, gilt eben ſo von allen übrigen trigonometriſchen Linien, und den Formeln §. 34. 35 ꝛc. vergl. §. 31.

3) Die Logarithmen der trigonometriſchen Linien ſind für den Halbmeſſer 10000 Millionen berechnet, und noch eben ſo für den abgekürzten Halbmeſſer 10 Millionen beybehalten worden. Z. E. log sin tot iſt für den großen Halbmeſſer 10, und für den kleinen nur 7; aber man hat dieſem auch 10 gelaſſen.

Dieſes bringt bey der Rechnung mit bloßen Logarithmen keinen Fehler, indem man bey den Linien, deren Logarithmen ſie ſind, nicht auf ihre wirklichen Größen, ſondern nur auf ihre Verhältniſſe ſieht.

Aber das iſt unrichtig, daß man insgemein für sin und tang des Bogens 0 den Logarithmus auch 0 ſetzt, da doch $0 = \log 1$, und sin ſowohl als tang des Bogens $0^{\circ}\,0'\,0''\,0'''0^{IV}\,4^{V}\,27^{VI} = 1$ iſt.

4) Will man einen Logarithmus für den Halbmeſſer 1 haben, ſo muß man von den Logarithmen der Tafeln 10 abziehen, welches am bequemſten nach Art. §. 456. Aufl. 4. geſchieht. So iſt z. E. $\log \sin' = 6{,}4637261 - 10 = 0{,}4637261 - 4$.

Hat man die allgemeinen trigonometriſchen Formeln für den Halbmeſſer der Tafeln eingerichtet, ſo ergiebt ſich von ſelbſt ihre logarithmiſche Berechnung. Z. E. $\text{tang } x = \frac{\sin x}{\cos x}$, und $\text{tang tab } x = \frac{r \cdot \sin x}{\cos x} = \frac{r \cdot \sin \text{tab } x}{\cos \text{tab } x}$, folglich $\log \text{tang tab } x = \log r + \log \sin \text{tab } x - \log \cos \text{tab } x$.

Eben ſo iſt $\sec x = \frac{r}{\cos x}$, folglich $\sec \text{tab } x = \frac{r}{\cos x}$; aber $\cos x = \frac{\cos \text{tab } x}{r}$, folglich $\sec \text{tab } x = \frac{r^2}{\cos \text{tab } x}$, folglich $\log \sec \text{tab } x = 2 \log r - \log \cos \text{tab } x$.

5) Die

5) Die trigonometrischen Linien werden zwar unter gewissen Umständen verneinend, aber man sieht sie doch, in so fern von ihren Logarithmen die Rede ist, als bejahend an. Denn diese Linien behalten auch noch verneinend einerley Logarithmen, weil sich die Logarithmen blos auf die Größe der Linien beziehen, und das Verneinende blos die entgegengesetzte Lage bedeutet.

6) Bey Auflösung der trigonometrischen Aufgaben kann man die Rechnung auf doppelte Art führen; entweder mit den natürlichen Linien, oder mit den künstlichen, d. i. mit ihren Logarithmen; welches letztere in den meisten Fällen vorzuziehen ist. Von einem vortheilhaften Gebrauche der natürlichen Linien zum Ausmessen und Auftragen der Winkel sollen einige Aufgaben folgen, wenn zuvor noch ein Umstand berichtigt ist. Nämlich

7) die großen Tafeln gehen bis zu 10, oder gar bis zu einzelnen Secunden, die kleinen aber nur bis zu Minuten. Um hieraus nun auch einzelne Secunden zu finden, nimmt man wie Ar. §. 456 an, daß kleine Differenzen der Winkel, wie die Differenzen der zugehörigen Linien, oder ihrer Logarithmen, sich verhalten. Von der Art, dieses zu bewerkstelligen, sollen ein Paar Aufgaben folgen. Der Grund aber, worauf die Voraussetzung beruhet, ist:

8) (Fig. 204.) Es sey $BD = \text{arc } 1'' = \text{arc } 60''$, und $BE = \text{arc } x''$: so betrachtet man BED als eine gerade Linie, und setzet $BD : BE = DF : EG$, wo $BD = AD - AB$, $BE = AB + BE$, $DF = DN - BM$, und $EH = BM + EG$ ist.

Aus den größern Tafeln erhellet, daß diese Proportion bey den Sinus und Cosinus aller Winkel, und bey den Tangenten aller Winkel unter 45 Grad, so gut als völlig richtig sey, hingegen bey den Tangenten nahe bey 90 Grad, und bey den Logarithmen der Sinus und Tangenten kleiner Winkel etwas von der Wahrheit abweiche. Wo also mehrere Genauigkeit verlangt wird, muß man bey den ersten und letzten drey oder vier Graden des Quadranten sich solcher Tafeln bedienen, die von 10 zu 10 Secunden berechnet sind.

§. 49. Aufg. Es ist ein Bogen in Secunden gegeben; man soll den dazu gehörigen natürlichen und künstlichen Sinus finden.

Auflöſ. Man ſetze nach §. 48. Anm. 8: Wie ſich 60 verhält zu der gegebenen Zahl der Secunden, ſo verhält ſich die Differenz der beiden nächſten Bögen in den Tafeln, zwiſchen welche der gegebene fällt, zu dem, was zu dem kleinern Sinus der Tafeln addirt werden muß.

Z. E. der gegebene Bogen ſey 27° 18′ 33″, ſo hat man aus den Tafeln

1) $\sin 27° 19′ = 4589080$
$\sin 27° 18′ = 4586496$

Differenz der nächſten Bogen = 2584; und nun $60:33 = 2584:\frac{2584 \cdot 33}{60}$, welches zu $\sin 27° 18′$ addirt den $\sin 27° 18′ 33″$ giebt.

2) $\log \sin 27° 19′ = 9{,}6617257$
$\log \sin 27° 18′ = 9{,}6614810$

Differenz = 2447; und nun $60:33 = 2447:\frac{2447 \cdot 33}{60}$, welches zu $\log \sin 27° 18′$ addirt $\log \sin 27° 18′ 33″$ giebt.

Anm. Für Tangenten iſt es eben ſo: auch läßt es ſich leicht auf Coſinus und Cotangenten anwenden, wo man, ſtatt zu addiren, ſubtrahirt.

§. 50. Aufg. Es iſt ein natürlicher und künſtlicher Sinus, der nicht in den Tafeln ſteht, gegeben; man ſoll den dazu gehörigen Bogen in Secunden finden.

Auflöſ. Man ſuche die Differenz der beyden nächſten Sinus in den Tafeln, und die Differenz des kleinern von dem gegebenen, und ſetze nach §. 48. Anm. 8. wie ſich die erſte Differenz verhält zur zweyten, ſo verhält ſich 60 zu der Zahl der Secunden, die zu dem kleinern Bogen der Tafeln addirt werden muß.

Z. E.

Z. E. der gegebene Sinus sey = 1081234, und der gegebene log sin = 9,7181325: so hat man aus den Tafeln

1) 1082885 = sin 6° 13′
1081234 = sin x
1079994 = sin 6° 12′

2891 = ersten Differenz
1204 = zweyten Differenz; und nun

2891:1240=60:y; da dann der gesuchte Bogen x = 6° 12′ + y″ ist.

2) 9,7182012 = log sin 31° 31′
9,7181325 = log sin x
9,7180851 = log sin 31° 30′

1161 = ersten Differenz
474 = zweyten Differenz; und nun

1161:474=60:y; da dann x = 31°30′+y″ ist. Hier gilt auch die Anmerkung in §. 49.

§. 51. Aufg. (Fig. 205. 206.) Einen gegebenen Winkel ACB mit Hülfe der Tafeln genauer als mit dem Transporteur zu messen.

Auflös. I. (Fig. 205.) Nach einem verjüngten Maaßstabe mache man CB = 1000, und BA senkrecht auf CA; messe nach eben dem Maaßstabe BA = sin ACB, oder CA = cos ACB, und suche die gefundene Zahl in den Sinustafeln für den Halbmesser = 1000: so steht dabey die Größe des gegebenen Winkels.

II. (Fig. 206.) Oder man mache CA = CB = 1000, ziehe AB, messe sie nach eben dem Maaßstabe, und suche die Hälfte der gefundenen Zahl in den Sinustafeln für den Halbmesser = 1000: so steht dabey die Hälfte des gegebenen Winkels, weil ein Perpendikel von C auf AB, diese sowohl als den Winkel C halbirt, da dann $\frac{1}{2}$AB = sin $\frac{1}{2}$ACB ist.

§. 52. Aufg. (Fig. 205. 206.) Einen Winkel x, der in Graden und Minuten gegeben ist, mit Hülfe der Tafeln genauer als mit dem Transporteur aufzutragen.

Aufl. I. (Fig. 205.) Man mache CA=1000, und die auf CA senkrechte AB=tang x aus den Tafeln für den Halbmesser 1000, und ziehe CB: so ist ACB=x.

Wäre x > 45°, folglich tang x > 1000: so mache man die auf AC senkrechte CD=1000, und die auf CD senkrechte DE = cot x aus den Tafeln für r=1000, und ziehe CE: so ist ACE=x.

Wäre x > 90°: so verzeichne man seinen Nebenwinkel nach Obigen.

II. (Fig. 206.) Mit CA=1000 beschreibe man aus C einen Kreisbogen, trage darein AB=2 sin ½ x aus den Tafeln für r=1000, und ziehe CB: so ist ACB=x.

4. Trigonometrische Auflösung der Triangel.

§. 53. Lehrs. (Fig. 207.) In jedem Triangel ABC verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.

Bew. Da sich um jeden Triangel ABC ein Kreis beschreiben läßt (Geom. §. 195.): so sind dessen Seiten Sehnen der Bogen, auf denen die gegenüberliegenden Winkel stehen, ihre Hälften aber die Sinus der halben Bogen, folglich die Sinus der gegenüberliegenden Winkel (Geom. §. 170.). Demnach ist für den Halbmesser des Kreises

$$\sin A : \sin B = \tfrac{1}{2}BC : \tfrac{1}{2}AC = BC : AC$$
$$\sin A : \sin C = \tfrac{1}{2}BC : \tfrac{1}{2}AB = BC : AB$$
$$\sin B : \sin C = \tfrac{1}{2}AC : \tfrac{1}{2}AB = AC : AB$$

§. 54.

§. 54. Zuſ. 1. Auf dieſen Lehrſatz gründet ſich die Methode, jeden Triangel trigonometriſch aufzulöſen, d. i. wenn drey Dinge an einem Triangel gegeben ſind, die übrigen zu berechnen, welches eine weit größere Genauigkeit, als die geometriſche Verzeichnung, giebt, auch auf die übrigen geradlinichten Figuren, die ſich alle in Triangel zerlegen laſſen, angewendet werden kann. Soll man aber aus drey Dingen eines Triangels die übrigen finden: ſo wird erfordert, daß wenigſtens eine Seite unter den gegebenen ſey; weil aus drey Winkeln ſich kein Triangel beſtimmen läßt. Daher kommen hier vier Aufgaben vor. Es ſind nämlich gegeben: eine Seite und zwey Winkel; zwey Seiten und entweder ein gegenüber liegender, oder der eingeſchloſſene Winkel; drey Seiten.

§. 55. Zuſ. 2. Dieſe Aufgaben erſtrecken ſich auf alle Arten der Triangel. Für einen rechtwinklichten Triangel BAC (Fig. 205.) iſt auch unmittelbar, wenn CB der Halbmeſſer, BA = ſin C = cof B, und AC = ſin B = cof C; oder wenn CA der Halbmeſſer, AB = tang C = cot B, und AC = tang B = cot C. Einen gleichſchenklichten Triangel ABC (Fig. 206.) halbirt der Perpendikel CD, und man kann ſtatt ſeiner den rechtwinklichten △ ADC berechnen.

§. 56. Aufg. (Fig. 207.) In einem Triangel ABC ſind zwey Winkel und eine Seite gegeben; man ſoll die übrigen Winkel finden.

Aufl. Da der dritte Winkel zugleich mit den beiden andern gegeben iſt: ſo iſt es einerley, welche Seite gegeben ſey. Es ſey dieſes AB, ſo iſt nach §. 53. ſin C: ſin A = AB: BC, und ſin C: ſin B = AB: AC.

Z. E. Es ſey AB=57,32°; C=55°10′; A=65° 80′: ſo iſt log AB = 1,7583062
+ log ſin A = 9,9590229
11,7173291
— log ſin C = 9,9142464
log AB = 1,8030827 = 63,545°

§. 57. Aufg. (Fig. 207.) In einem Triangel ABC ſind zwey Seiten und ein gegenüberliegender Winkel gegeben; man ſoll die übrigen Winkel finden.

Auflöſ. Es ſey AB=57,32°; BC=63,545°, und A=65°30′ gegeben: ſo iſt nach §. 53. CB: AB = ſin A : ſin C, folglich
log ſin A = 9,9590229
+ log AB = 1,7583062
11,7173291
— log CB = 1,8030827
log ſin C = 9,9142464 = log ſin 55°10′.

§. 58. Zuſ. 1. Iſt C nicht = R: ſo gehört ſin C für zweyerley Winkel, §. 5. d. i. C könnte ſowohl ſtumpf als ſpitz ſeyn. Wegen dieſer Zweydeutigkeit iſt zu merken:

1) Iſt der gegebene Winkel A ein rechter oder ſtumpfer: ſo muß C nothwendig ſpitz ſeyn.

2) Iſt A ſpitz, und die gegenüberliegende Seite BC größer als die anliegende AB, wie im Exempel §. 57 angenommen worden: ſo muß C ebenfalls ſpitz ſeyn, weil ſonſt AB > BC ſeyn müßte.

3) Iſt A ſpitz, und BC < AB, wie Fig. 208: ſo bleibt die Zweydeutigkeit, daß ſin C ſowohl dem ſpitzen Winkel C, als dem ſtumpfen E zugehört. In der Aus-

übung

übung weiß man gemeiniglich schon zum voraus, ob C spitz oder stumpf seyn müsse.

§. 59. Zus. 2. Ist C gefunden, so hat man auch B, und kann nun auch nach §. 56. AC finden.

§. 60. Lehrs. (Fig. 209.) In jedem Triangel ABC verhält sich die Summe der beiden Schenkel, AC+AB, zu ihrer Differenz, AC — AB, wie die Tangente der halben Summe der Winkel an der Grundlinie, $\text{tang}\frac{B+C}{2}$, zur Tangente ihrer halben Differenz, $\text{tang}\frac{B-C}{2}$.

Bew. Von den Winkeln an der Grundlinie BC sey der größere ABC=x, der kleinere ACB=y. Man verlängere den größern Schenkel CA über A hinaus, mache der AB die AD, AE gleich, und ziehe DB, BE, und mit letzterer die CF parallel, welche mit der verlängerten DB in F zusammentreffe.

Da DAB=x+y=2ABE=2AEB=2DCF (Geom. §. 99.) so ist $\frac{x+y}{2}$=ABE=AEB=ACF, folglich EBC=BCF=$\frac{x-y}{2}$ (Ar. §. 171.) Nun ist DBE=R (Geom. §. 181.)=DFC (Geom. §. 95.) Folglich sind DF, BF die Tangenten der Winkel DCF, BCF, oder $\frac{x+y}{2}$, $\frac{x-y}{2}$, für den Halbmesser CF. Auch ist DC:EC=DF:BF (Geom. §. 243.) Folglich ist AC+AB:AC−AB=$\text{tang}\frac{x+y}{2}$:$\text{tang}\frac{x-y}{2}$.

Andrer Bew. Da AC:AB = sin x: sin y, so ist AC + AB: AC − AB = sin x + sin y: sin x − sin y (Ar. §. 373.) = $\text{tang}\frac{x+y}{2} : \text{tang}\frac{x-y}{2}$ §. 41.

§. 61. Aufg. (Fig. 208.) In einem Triangel ABC sind zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben; man soll die übrigen Winkel finden.

Auflös. Es sey AB = 60, 06°; AC = 62, 53°; BAC = 55° 10′: so ist AB + AC = 122, 59°, und AB − AC = 2, 47° auch $\frac{B+C}{2}$ = 62° 25′ und nach §. 60.

$AC + AB : AC - AB = \text{tang}\frac{x+y}{2} : \text{tang}\frac{x-y}{2}$;

folglich

log. $\text{tang}\frac{x+y}{2}$ = 10, 2819827

+ log AC − AB = 0, 3926970

10, 6746797

− log AC + AB = 2, 0884550

log. $\text{tang}\frac{x-y}{2}$ = 8, 5862247 = log tang 2° 46′.

Demnach ist $\frac{B-C}{2}$ = 2° 46′, $\frac{B+C}{2}$ = 62° 25′, folglich (nach Ar. §. 171.) ABC = 65° 11′, und ACB = 59° 39′.

Und nun findet man auch leicht die dritte Seite BC nach §. 56 oder 57.

§. 62. Anmerk. Eine andere Auflösung von §. 61. ist: Wenn BD auf AC senkrecht: so ist r: sin A = AB: BD, und r: cos A = AB: AD, folglich AC − AD = CD, und BD gegeben; wor-

woraus man im rechtwinklichten Triangel BDC den Winkel C findet, §. 55.

§. 63. Aufg. (Fig. 208.) In einem Triangel ABC sind alle drey Seiten gegeben; man soll die Winkel finden.

Auflös. Mit der kleinsten Seite BC beschreibe man aus B einen Kreis, der durch C, E, F, G, geht, da dann AG = AB + BC, und AF = AB − BC ist. Nun ist AC: AG = AF: AE (Geom. §. 284.) Folglich ist AC: AB + BC = AB − BC: AE, wodurch AE, folglich auch AC − AE = CE gegeben ist. Nun halbirt der Perpendikel BD die CE. Demnach ist CD, AD bekannt, und man findet in den rechtwinklichten Triangeln ADB, BDC, die Winkel §. 55.

Exempel. Es sey BC = 7, AB = 9, AC = 11, folglich AG = 16, AF = 2, und 11: 16 = 2: $\frac{32}{11}$, d. i. AE = $\frac{32}{11}$, folglich EC = $11 - \frac{32}{11} = \frac{89}{11}$; daher CD = $\frac{89}{22}$, und AD = $\frac{153}{22}$.

Nun ist AB: AD = r: sin ABD, und BC: CD = r: sin DBC, folglich

1) log r + log AD = 10,8422687
— log AB = 0,9542425

log sin ABD = 9,8880262 = log sin 50° 35′ 58″
folglich A = 39° 24′ 2″

2) log r + log CD = 10,6069673
— log BC = 0,8450980

log sin DBC = 9,7618693 = log sin 35° 18′ 16″
folglich C = 54° 41′ 44″, und ABD + DBC = ABC = 85° 54′ 14″.

§. 64. Aufg. Eines jeden Triangels Seiten und Winkel mit einander zu vergleichen.

Aufl. I. (Fig. 205.) In dem rechtwinklichten Triangel BAC ſey p die Höhe, q die Baſis, h die Hypotenuſe, m der ſpitze Winkel bey C, und ſin tot = 1: ſo iſt h: p = 1: ſin m, und p: q = ſin m: cof m, folglich

1. $p = h.\ \text{ſin}\, m = q.\ \frac{\text{ſin}\, m}{\text{cof}\, m} = q.\ \text{tang}\, m$

2. $q = p.\ \frac{\text{cof}\, m}{\text{ſin}\, m} = p.\ \text{cot}\, m$

3. $h = p.\ \frac{1}{\text{ſin}\, m} = p.\ \text{cofec}\, m.$

II. (Fig. 211. 212.) In einem ſchiefwinklichten Triangel ABC fällt der Perpendikel CD innerhalb oder außerhalb des Triangels, nachdem beide Winkel an der Grundlinie wie Fig. 211. ſpitz ſind, oder einer davon, wie A Fig. 212. ſtumpf iſt. In beiden Fällen erhält man zwey rechtwinklichte Triangel BDC, ADC. Benennt man die den Winkeln A, B, C, gegenüberſtehenden Seiten mit denſelben aber kleinen Buchſtaben a, b, c, ſo iſt nach dem erſten Falle

1. CD = b. ſin A. 2. CD = a. ſin B.
3. AD = b. cof A. 4. BD = a. cof B.
5. BD = c − b. cof A.

Denn Fig. 211 iſt BD = AB − AD = c − b. cof A. Nun iſt zwar Fig. 212 BD = AD + AD = c + b cof A; weil aber hier A ſtumpf, und daher cof A verneint iſt: ſo gilt die erſte Formel auch für dieſen Fall, wenn man in denſelben cof A verneint nimmt.

§. 65. Zuſ. 1. Da nach §. 64 $\frac{CD}{BD} = \frac{b.\text{ſin}\, A}{c - b.\text{cof}\, A}$

und $\frac{CD}{BD} = \frac{\text{ſin}\, B}{\text{cof}\, B} = \text{tang}\, B$: ſo iſt

tang

$$\text{tang } B = \frac{b \cdot \text{sin } A}{c - b \cdot \text{cos } A} = \frac{\text{sin } A}{\frac{c}{b} - \text{cos } A}; \text{ und eben so}$$

$$\text{tang } C = \frac{c \cdot \text{sin } A}{b - c \cdot \text{cos } A} = \frac{\text{sin } A}{\frac{b}{c} - \text{cos } A}, \text{ d. i. aus zwey}$$

Seiten b, c, und dem eingeschlossenen Winkel A, kann man den der Seite b oder c gegenüber liegenden Winkel finden.

Noch bequemer werden diese Formeln, wenn man hienach setzt $\text{Cot } B = \frac{1}{\text{tang } B} = \frac{c - b \text{ cos } A}{b \cdot \text{sin } A} = \frac{c}{b \text{ sin } A} - \frac{\text{cos } A}{\text{sin } A} = \frac{c}{b} \cdot \text{cosec } A - \text{cot } A$. Eben so ist $\text{cot } C = \frac{b}{c} \text{ cos } A - \text{cot } A$.

§. 66. Zus. 2. Da $BC^2 = CD^2 + BD^2$, und nach §. 64. $BC = a$, $CD = b \text{ sin } A$, $BD = c - b \text{ cos } A$: so ist $a^2 = b^2 \cdot \text{sin } A^2 + c^2 - 2bc \cdot \text{cos } A + b^2 - \text{cos } A^2 = b^2 (\text{sin } A^2 + \text{cos } A^2) + c^2 - 2bc \cdot \text{cos } A$, wo $\text{sin } A^2 + \text{cos } A^2 = 1$. Folglich ist $a^2 = b^2 - 2bc \cdot \text{cos } A + c^2$, d. i. aus zwey Seiten b, c, und dem eingeschlossenen Winkel A, läßt sich die dritte Seite a finden.

Anmerk. Ist A stumpf, also cos A verneint: so wird in der Formel das zweyte Glied rechter Hand positiv. Alsdann ist a^2 und 2bc cos A größer als $b^2 + c^2$. Für $A < 90$ ist a^2 um eben diese Größe $< b^2 + c^2$. Ist $A = 90$ Grad: so ist $\text{cos } A = 0$, folglich $a^2 = b^2 + c^2$, wie dem Pythagorischen Lehrsatze gemäß ist.

§. 67. Zus. 3. Aus der Formel für a^2, §. 66, hat man $\text{cos } A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, d. i. aus drey Seiten eines

Trian-

Triangels, a, b, c, kann man den der Seite a gegenüberliegenden Winkel A finden.

Für einen gleichschenklichten Triangel ist, wenn A der Winkel an der Spitze, b=c folglich $\cos A = \frac{2b^2 - a^2}{2b^2} = 1 - \frac{a^2}{2b^2}$.

§. 68. Zus. 4. Nimmt man an, daß c die größte Seite: so fällt der Perpendikel CD gewiß innerhalb des Triangels, und macht von c zwey Abschnitte AD, BD; da dann $AD = b.\cos A$ §. 64 $= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$ §. 67, folglich $BD = AB - AD = c - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{c2}$; welches dient, die Abschnitte der Grundlinie aus den drey Seiten zu finden.

§. 69. Zus. 5. Hieraus folgt $BD - AD = \frac{a^2 - b^2}{c} = \frac{(a+b)(a-b)}{c}$, folglich $c : a+b = a-b : BD - AD$, d. i. die größte Seite eines Triangels verhält sich zur Summe der beyden übrigen Seiten, wie die Differenz dieser Seiten zur Differenz der Abschnitte, worein die größte Seite durch den Perpendikel aus dem gegenüberliegenden Winkel getheilt wird.

§. 70. Zus. 6. Wenn man $\cos A$ zu 1 addirt, und von 1 subtrahirt, so hat man aus §. 67

$$1 + \cos A = \frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc}$$

$$1 - \cos A = \frac{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2bc}$$

Nun

Nun ist $(1+\cos A)(1-\cos A) = 1-\cos A^2 = \sin A^2$.
Folglich ist $\sin A^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(a+b-c)}{4b^2c^2}$

Diese Formel dient wie die §. 67, und ist zur Berechnung mit Logarithmen geschickter. Man setze der Kürze wegen das Product im Zähler $= u^2$: so ist $\sin A = \frac{u}{2bc}$, und $\log \sin \text{tab } A = 10 + \log u - \log 2bc$.

Anmerk. Für einen gleichschenklichten Triangel ist, wenn A der Winkel an der Spitze, $b=c$, folglich $u^2 = a^2(2b+a)(2b-a)$ und der Nenner $= 4b^4$. Für einen gleichseitigen Triangel ist $a=b=c$, folglich $u^2 = 3a^4$, und der Nenner $4a^4$.

§. 71. Zus. 7. Da $\sin A = \frac{u}{2bc}$ §. 70: so ist CD $= b \cdot \sin A$ §. 64. $= \frac{u}{2c}$, folglich des $\triangle$ ABC Inhalt $T = \frac{1}{2}c \cdot CD = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}c \cdot \frac{u}{2c} = \frac{1}{4}u$, d. i. der Inhalt wird aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, oder aus allen drey Seiten gefunden.

Hieraus hat man auch $\sin A = \frac{2T}{bc}$, und $c = \frac{2T}{b \cdot \sin A} = \frac{2T}{b} \cdot \frac{1}{\sin A} = \frac{2T}{b} \cdot \text{cosec } A$.

§. 72 Anmerk. 1. (Fig. 210.) Aus dem Inhalte Q eines Parallelogramms ABEC, und den beiden Seiten $AB=c$, und $AC=b$, findet man den von den Seiten eingeschloßnen Winkel A. Denn es ist $Q = 2T$, folglich $\sin A = \frac{Q}{bc}$ §. 71, wo $\sin A$ zweyen Winkeln A und B zugehören kann.

§. 73.

§. 73. Anm. 2. (Fig. 210.) In jedem Parallelogramm ABEC, betragen die Quadrate der Diagonalen soviel, als die Quadrate aller vier Seiten zusammen.

Denn ist A ein stumpfer Winkel: so ist sein cos verneint, und cos B = + cos A folglich nach der Formel für a^2 §. 66.

$BC^q = b^2 + 2bc \cos A + c^2$, und

$AE^q = b^2 - 2bc \cos A + c^2$, folglich

$BC_q + AE_q = 2(b^2 + c^2)$ Auch ist

$BC_q - AE_q = 4\,bc \cos A$.

5. Trigonometrische Kreisrechnung.

§. 74. Aufg. (Fig. 207.) Die Seiten eines Triangels ABC sind gegeben; man soll den Halbmesser r des um den Triangel beschriebenen Kreises berechnen.

Aufl. Da $\sin A = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$ für den Halbmesser 1: so ist r. $\sin A = \frac{a}{2}$ für den Halbmesser r, folglich $r = \frac{a}{2 \sin A}$

$= \frac{abc}{u}$ §. 70. $= \frac{abc}{\sqrt{+(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}$

§. 75. Zus. 1. Ist der Triangel gleichschenklicht, und a = b: so ist $r = \frac{a^2 c}{\sqrt{c^2(2a+c)(2a-c)}} = \frac{a^2}{\sqrt{(2a+c)(2a-c)}}$

Für den gleichseitigen Triangel ist a = b = c, folglich $r = \frac{a^3}{\sqrt{3a^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

§. 76. Zus. 2. Nimmt man in einem gegebenen Kreisbogen drey Punkte, so kann man den zugehörigen Halbmesser berechnen.

§. 77. Aufg. (Fig. 213.) Eines Kreises Halbmesser CA, Centriwinkel ACB, und Sehne AB, mit einander zu vergleichen.

Auf-

Auflöſ. Es ſey ACB = u, CA = a, AB = c, CD = p, und ſin tot = 1, ſo iſt

I. $1 : \sin\frac{1}{2}u = a : \frac{1}{2}c$, folglich $\frac{1}{2}c = a \cdot \sin\frac{1}{2}u$, oder

$c = 2a \cdot \sin\frac{1}{2}u$, und $a = \frac{c}{2\sin\frac{1}{2}u} = \frac{1}{2}c \cos\frac{1}{2}u$.

II. $1 : \cos\frac{1}{2}u = a : p$, oder $1 : \cot\frac{1}{2}u = \frac{1}{2}c : p$, folglich

$p = a \cdot \cos\frac{1}{2}u = \frac{1}{2}c \cdot \cot\frac{1}{2}u$.

III. $c : a = \sin u : \cos\frac{1}{2}u$, §. 53. und

$a : \frac{1}{2}c = 1 : \sin\frac{1}{2}u$, folglich

$1 : \frac{1}{2} = \sin u : \sin\frac{1}{2}u \cdot \cos\frac{1}{2}u$,

folglich $\sin u = 2\sin\frac{1}{2}u \cdot \cos\frac{1}{2}u$.

§. 78. Zuſ. 1. Soll man in einem Kreiſe, deſſen Halbmeſſer a, einen verlangten Bogen u abſchneiden, ſo iſt deſſen Sehne $c = 2a \cdot \sin\frac{1}{2}u$.

Anm. Läßt ſich der Bogen in zwey Stücke theilen, wovon das größere ſich durch geometriſche Zeichnung ergiebt; ſo berechnet man nur des kleinern Sehne.

§. 79. Zuſ. 2. Aus der, einem gewiſſen Bogen u zugehörigen Sehne c, findet man den Halbmeſſer durch die Formel $a = \frac{1}{2}c \cdot \cos\frac{1}{2}u$.

Anm. Die Sehne von 60 Grad iſt unmittelbar der Halbmeſſer. Iſt aber unſer Maaßſtab nicht ſo groß, ſo nehme man die Sehne eines kleinern Bogens.

§. 80. Zuſ. 3. Aus dem Halbmeſſer a, und ſeiner Sehne c, findet man den zugehörigen Bogen u durch die Formel $\sin\frac{1}{2}u = \frac{c}{2a}$.

Anm. Es verſteht ſich von ſelbſt, daß bey aller dieſer Rechnung der Halbmeſſer der Tafeln r zugezogen wird. Z. E. für §. 78. iſt $c = \frac{2a \cdot \sin\text{tab}\frac{1}{2}u}{r}$, folglich hier $\frac{cr}{2a} = \sin\text{tab}\frac{1}{2}u$. Nähme man $a = \frac{1}{2}r$: ſo wäre $c = \sin\text{tab}\frac{1}{2}u$.

§. 81.

§. 81. Zuſ. 4. Des △ ABC Inhalt iſt $T = \frac{1}{2}p.c = \frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}u.2a.\sin\frac{1}{2}u = \frac{1}{2}a^2.\sin u$.

§. 82. Zuſ. 5. Des Ausſchnitts AEBC Inhalt iſt $S = \frac{1}{2}a^2u$, wenn u in Decimaltheilen des Halbmeſſers ausgedrückt iſt. Vergl. Geom. §. 352.

§. 83. Zuſ. 6. Des Abſchnitts ABEA Inhalt iſt $V = AEBC - \triangle ABC = \frac{1}{2}a^2(u - \sin u)$.

Anmerk. Hat man u bis auf Zehnmillionen Theile: ſo iſt $u - \sin u$ ſo klein, daß man den Logarithmus davon ziemlich genau hat. Da man alſo V, und auch T mit Logarithmen berechnen kann, ſo hat man $S = T + V$.

§. 84. Zuſ. 7. Soll man den Bogen $AEB = u$ aus ſeiner Sehne $AB = c$, und Höhe DE finden: ſo hat man

1) aus Geom. §. 283. $\frac{AD^2}{DE} + DE = 2CE$, d. i. $\frac{\frac{1}{4}c^2}{DE} + DE = 2a$, alſo $\frac{c^2 + 4DE^2}{4DE} = 2a$, folglich $\frac{c.4DE}{c^2 + 4DE^2} = \frac{c}{2a} = \sin\frac{1}{2}u$.

2) aus Geom. §. 170. $AEB = \frac{1}{2}(360° - u) = 180° - \frac{1}{2}u$, folglich $AEC = 90° - \frac{1}{4}u$. Nun iſt $AD : DE = 1 : \cot AEC = 1 : \tan\frac{1}{4}u$. Folglich iſt $\tan\frac{1}{4}u = \frac{DE}{AD} = \frac{2DE}{c}$.

§. 85. Zuſ. 8. Für ein reguläres Polygon iſt c ſeine Seite, u ſein Centriwinkel, und p des △ ABC Höhe. Hieraus läßt ſich jedes reguläre Polygon in den Kreis, oder über einer gegebenen Linie viel genauer, als durch die mechaniſchen Methoden, beſchreiben.

Z. E.

Z. E. Für das 9seitige Polygon ist $u = 40°$, folglich $c = a.2 \sin 20°$, $p = a.\cos 20°$, $a = c.\frac{1}{2}\operatorname{cosec}. 20°$.

§. 86. Zus. 9. Für ein nseitiges Polygon sey der Centriwinkel u, der Halbmesser des umschriebenen Kreises a, so ist sein Inhalt $q = a^2.\frac{n}{2}\sin u$. Eben so ist von einem in denselben Kreis beschriebenen Nseitigen Polygon, dessen Centriwinkel v, der Inhalt $Q = a^2.\frac{N}{2}\sin v$, folglich $q : Q = \sin u : \sin v$.

§. 87. Zus. 10. Es sey die Seite eines um den Kreis beschriebenen ähnlichen Polygons $FG = e$, so ist $e = 2a.\operatorname{tang}\frac{1}{2}u = 2a.\frac{\sin\frac{1}{2}u}{\cos\frac{1}{2}u}$, folglich $c : e = \sin\frac{1}{2}u : \operatorname{tang}\frac{1}{2}u = \sin\frac{1}{2}u : \frac{\sin\frac{1}{2}u}{\cos\frac{1}{2}u} = 1 : \frac{1}{\cos\frac{1}{2}u} = 1 : \sec\frac{1}{2}u$.

Zweyter Theil.

Die sphärische Trigonometrie.

1. Von den sphärischen Triangeln überhaupt.

§. 88. Erkl. (Fig. 214.) Ein sphärischer Triangel ABC heißt der von drey Bogen größter Kreise auf einer Kugelfläche eingeschlossene Raum. Diese Bogen heißen seine Seiten, und die sphärischen Winkel, welche die Seiten machen, seine Winkel (vergl. Geom. §. 563.) Oder ein sphärischer Triangel entsteht, wenn man auf der Kugelfläche drey Punkte A, B, C, die nicht in einerley größten Kreise liegen, annimmt, und durch jede zwey derselben den Bogen eines größten Kreises legt.

§. 89. Zus. 1. (Fig. 214.) Zieht man von den Winkelspitzen des △ ABC gerade Linien nach der Kugel Mittelpunkte K, so erhält man drey ebene Winkel AKC, BKC, AKB, deren Maaße die Seiten des Triangels sind, und die an K eine Ecke machen. Diese ist die Spitze eines pyramidenartigen Körpers, dessen gekrümmte Grundfläche die Fläche des sphärischen Triangels ist.

§. 90.

§. 90. Anm. Bogen schlechthin, die nach Graden angegeben werden, sollen die Seiten des Triangels anzeigen, aber Ebene eines Bogens soll die Ebene des größten Kreises bedeuten, von welchem der Bogen ein Stück, und der Winkel, den der Bogen mißt, ein Ausschnitt ist.

§. 91. Zus. 2. (Fig. 215.) Es sey DBC ein sphärischer Triangel, und K der zugehörige Mittelpunkt. Von einer seiner Seiten BC Endpunkte C falle ein Perpendikel CM auf die Ebene der andern Seite BD, und ein zweyter Perpendikel CN auf beider Ebenen Durchschnitt BK, und man ziehe MN, die auch auf BK senkrecht ist (Geom. §. 398.), so ist CNM die Neigung der beiden Ebenen, und dem sphärischen Winkel CBD gleich, (Geom. §. 563.)

Eben so, wenn man CQ auf DK senkrecht macht, und MK ziehet, ist CQM dem sphärischen Winkel CDB gleich.

Auf eben die Art ist die Neigung der Ebenen BCK, DCK, dem sphärischen Winkel BCD gleich.

§. 92. Anm. (Fig. 214.) Will man das Maß eines sphärischen Winkels ACB in Graden des größten Kreises, so nehme man auf seinen Schenkeln 90°, und lege durch die dadurch bestimmten Punkte F, G, einen Bogen FG des größten Kreises, dessen Pol des Winkels Scheitel C ist. (Geom. §. 566.)

§. 93. Zus. 3. (Fig. 214.) Der Winkel ACB ist, zugleich mit dem gegenüberstehenden Bogen AB, kleiner oder größer als 180 Grad.

Denn da die Ebenen der Bogen AB, AC, einander halbiren (Geom. §. 557.), so ist $ABE = 180° - ACE$. Ist nun $AB < 180°$, so ist $ACB + BCE = 180°$, folglich $ACB < 180°$ so lange, bis B in E fällt. Rücke B als dann noch über E hinaus, daß $AB > 180°$ würde, so würde auch $ACB > 180°$. Man muß sich hiebey vorstellen, daß sich der Winkel ACB immer weiter öffnete, indem die Ebene BKC immer weiter von der Ebene AKC fortrückt.

§. 94. Zuſ. 4. (Fig. 214.) Mit dem ſphäriſchen △ACB hat man noch zwey andre zuſammengehörige:

1) der eine BCE hat mit ihm die Seite BC gemein; die Seite BE iſt die Ergänzung von AB zu 180 Grad, und CE von AC; der Winkel bey E iſt dem bey A gleich, auch ſind bey B und C Nebenwinkel.

2) der andre BECA hat mit ihm zwey Seiten BC, AC gemein, und die Seite BEA iſt die Ergänzung von AB zu 360 Grad. Auf ähnliche Art ergänzen ſich auch die Winkel.

§. 95. Anm. Da es für die Betrachtung einerley iſt, welchen von dieſen 3 Triangeln §. 94. man nehmen will, indem man aus jedem derſelben die beiden übrigen erkennt, ſo iſt es eine große Erleichterung für die folgenden Unterſuchungen, nur ſolche Triangel zu betrachten, worin jede Seite, folglich nach §. 93. auch jeder Winkel, <180 Grad iſt. Blos von ſolchen iſt im Folgenden die Rede. In der Ausübung kann man ſelbſt unter dieſen immer denjenigen wählen, der die wenigſten ſtumpfen Winkel und Seiten hat, wie Fig. 214. der zuerſt betrachtete Triangel ABC.

Selbſt unter obiger Einſchränkung ſind doch noch Zweydeutigkeiten vorhanden, die mit dem größten Theile nach gehoben werden können, wie die Unterſuchungen in der Folge, lehren werden.

§. 96. Lehrſ. (Fig. 214.) In einem ſphäriſchen Triangel ABC ſind jede zwey Seiten zuſammen größer als die dritte, und alle drey Seiten zuſammen kleiner als 360 Grad.

Bew. beruhet auf §. 89. 95. und Geom. §. 431.

§. 97. Aufg. (Fig. 216.) Auf der Kugelfläche iſt ein ſphäriſcher △BDC gegeben; man ſoll auf eben der Kugelfläche einen andern △bdc verzeichnen, deſſen Seiten die Winkel, und deſſen Winkel die Seiten des gegebenen zu 180 Grad ergänzen.

Auflöſ. Man verlängere jede Seite des gegebenen △BDC bis zu einem Quadranten, nämlich BC, BD,

nach

nach E, F; CB, CD, nach G, H; DB, DC, nach M, N, und lege durch die so erhaltenen Punkte E, F, G, H, M, N größte Kreise, so schneiden diese einander in b, d, c, und geben den verlangten Triangel bdc.

Bew. Nach der Construction sind die Punkte B, D, C, die Pole der Bogen cd, cb, bd (Geom. §. 554.) Folglich sind Bc, Dc, Quadranten, und c ist der Pol des Bogens BD oder MF. (Geom. §. 554.) Eben so ist b der Pol von NH, und d von GE. Demnach sind die Bogen bH, bN; dG, dE; cF, cM Quadranten. Auch sind nach der Construction BE, BF; DM, DN; CG, CH, Quadranten.

Nun ist NH das Maaß des Winkels b, und DN + CH = 180° = DN + HD + CD = HN + CD. Folglich ist das Maaß des Winkels, b die Ergänzung des Bogens CD. Eben so wird bewiesen, daß die Maaße der Winkel d und c, die Ergänzungen der Bogen BC, BD sind.

Ferner ist EF das Maaß des Winkels B, und cF + Ed = 180° = cF + dF + EF = cd + EF. Folglich ist cd die Ergänzung von EF, dem Maaße des Winkels B. Eben so sind bc, bd, die Ergänzungen von MN, GH, den Maaßen der Winkel D, C.

§. 98. Lehrs. (Fig. 216.) Die Winkel eines sphärischen Triangels BDC sind zusammen größer als zwey, und kleiner als sechs rechte Winkel.

Bew. Man verzeichne wie §. 97. den △ bdc, so ist B = 2R − cd; D = 2R − bc; C = 2R − bd, folglich B + D + C = 6R − (cd + bc + bd), also < 6R. Nun ist cd + bc + bd < 4R, §. 96. Folglich ist B + D + C > 2R.

2. Von den rechtwinklichen sphärischen Triangeln.

§. 99. Erkl. (Fig. 217.) **Ein rechtwinklicher sphärischer Triangel BAC ist, wenn die Ebenen zweyer Bogen CA, AB (folglich auch die Bogen Geom. §. 563.) senkrecht auf einander sind, da dann die Ebene des Bogens CA durch CM, den Perpendikel von C, auf die Ebene des Bogens AB liegt, und CA die Höhe, AB die Grundlinie, und BC die Hypotenuse des Triangels ist, auch CA, AB, die Catheten oder Perpendikel heißen.**

Ein schiefwinklicher sphärischer Triangel BDC (Fig. 215.) ist, der keinen rechten Winkel hat; wo die Ebene des Bogens CD oder CB nicht durch den Perpendikel CM liegt.

Anm. Der rechtwinkliche soll gewöhnlich durch BAC oder DAC, der schiefwinklichte durch BDC bezeichnet werden, daß in beiden C die Spitze sey.

§. 100. Lehrs. (Fig. 217.) In dem rechtwinklichen sphärischen Triangel BAC ist:

I. $r : \sin BC = \sin B : \sin AC = \sin C : \sin AB$.
d. i. sin tot zum Sinus der Hypotenuse, wie der Sinus eines schiefen Winkels zum Sinus der gegenüberliegenden Cathete.

II. $r : \sin AB = \tang B : \tang AC$, oder
$r : \sin AC = \tang C : \tang AB$.
d. i. sin tot zum Sinus einer Cathete, wie die Tangente des anliegenden Winkels zur Tangente der andern Cathete.

III. $r : \cos AC = \cos AB : \cos BC$.
d. i. sin tot zum Cosinus einer Cathete, wie der Cosinus der andern Cathete zum Cosinus der Hypotenuse.

IV.

IV. r: cos AC = sin C: cos B.
d. i. sin tot zum Cosinus einer Cathete, wie der Sinus des anliegenden zum Cosinus des gegenüberliegenden Winkels.

V. r: cos B = cot AB: cot BC.
d. i. sin tot zum Cosinus eines schiefen Winkels, wie die Cotangente der anliegenden Cathete zur Cotangente der Hypotenuse.

VI. r: cos BC = tang C: cot B.
d. i. sin tot zum Cosinus der Hypotenuse, wie die Tangente des einen zur Cotangente des andern schiefen Winkels.

Beweis. 1) Für das erste Gesetz. Im rechtwinklichen △CMN ist r: CN = sin CNM: CM = sin MCN: NM, d. i.

I. r: sin BC = sin B: sin AC = sin C: sin AB.

2) für das zweyte Gesetz. In den beiden rechtwinklichen Triangeln KMC, CMN, ist

KM: MC = r: tang CKM
MC: NM = tang MNC: r
KM: NM = tang MNC: tang CKM,

und im rechtwinklichen △KNM
KM: NM = r: sin MKN.
r: sin MKN = tang MNC: tang CKM, d. i.

II. r: sin AB = tang B: tang AC.

Fiel nun ein Perpendikel von B auf die Ebene AC, wie vorher von C auf die Ebene AB, so würde auf eben die Art bewiesen:
r: sin AC = tang C: tang AB.

3) für die vier übrigen Gesetze. Man verlängere die Seiten BA, BC, bis BE, BF, Quadranten sind,

§. 73. Anm. 2. (Fig. 210.) In jedem Parallelogramm ABEC, betragen die Quadrate der Diagonalen soviel, als die Quadrate aller vier Seiten zusammen.

Denn ist A ein stumpfer Winkel: so ist sein cos verneint, und $\cos B = +\cos A$ folglich nach der Formel für a^2 §. 66.

$BC^q = b^2 + 2bc.\cos A + c^2$, und

$AE^q = b^2 - 2bc.\cos A + c^2$, folglich

$BC^q + AE^q = 2(b^2 + c^2)$ Auch ist

$BC^q - AE^q = 4\ bc\cos A$.

5. Trigonometrische Kreisrechnung.

§. 74. Aufg. (Fig. 207.) Die Seiten eines Triangels ABC sind gegeben; man soll den Halbmesser r des um den Triangel beschriebenen Kreises berechnen.

Aufl. Da $\sin A = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$ für den Halbmesser 1: so ist r. $\sin A = \frac{a}{2}$ für den Halbmesser r, folglich $r = \frac{a}{2\sin A}$

$= \frac{abc}{u}$ §. 70. $= \frac{abc}{\sqrt{.+(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}$

§. 75. Zus. 1. Ist der Triangel gleichschenklicht, und $a=b$: so ist $r = \frac{a^2c}{\sqrt{.c^2(2a+c)(2a-c)}} = \frac{a^2}{\sqrt{.(2a+c)(2a-c)}}$

Für den gleichseitigen Triangel ist $a=b=c$, folglich $r = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

§. 76. Zus. 2. Nimmt man in einem gegebenen Kreisbogen drey Punkte, so kann man den zugehörigen Halbmesser berechnen.

§. 77. Aufg. (Fig. 213.) Eines Kreises Halbmesser CA, Centriwinkel ACB, und Sehne AB, mit einander zu vergleichen.

Auf-

Auflöſ. Es ſey ACB=u, CA=a, AB=c, CD=p, und ſin tot=1, ſo iſt

I. $1 : \sin\frac{1}{2}u = a : \frac{1}{2}c$, folglich $\frac{1}{2}c = a.\sin\frac{1}{2}u$, oder

$c = 2a.\sin\frac{1}{2}u$, und $a = \frac{c}{2\sin\frac{1}{2}u} = \frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}u$.

II. $1 : \cos\frac{1}{2}u = a : p$, oder $1 : \cot\frac{1}{2}u = \frac{1}{2}c : p$, folglich

$p = a.\cos\frac{1}{2}u = \frac{1}{2}c.\cot\frac{1}{2}u$.

III. $c : a = \sin u : \cos\frac{1}{2}u$, §. 53. und

$a : \frac{1}{2}c = 1 : \sin\frac{1}{2}u$, folglich

$1 : \frac{1}{2} = \sin u : \sin\frac{1}{2}u.\cos\frac{1}{2}u$,

folglich $\sin u = 2\sin\frac{1}{2}u.\cos\frac{1}{2}u$.

§. 78. Zuſ. 1. Soll man in einem Kreiſe, deſſen Halbmeſſer a, einen verlangten Bogen u abſchneiden, ſo iſt deſſen Sehne $c = 2a.\sin\frac{1}{2}u$.

Anm. Läßt ſich der Bogen in zwey Stücke theilen, wovon das größere ſich durch geometriſche Zeichnung ergiebt; ſo berechnet man nur des kleinern Sehne.

§. 79. Zuſ. 2. Aus der, einem gewiſſen Bogen u zugehörigen Sehne c, findet man den Halbmeſſer durch die Formel $a = \frac{1}{2}c.\cos\frac{1}{2}u$.

Anm. Die Sehne von 60 Grad iſt unmittelbar der Halbmeſſer. Iſt aber unſer Maaßſtab nicht ſo groß, ſo nehme man die Sehne eines kleinern Bogens.

§. 80. Zuſ. 3. Aus dem Halbmeſſer a, und ſeiner Sehne c, findet man den zugehörigen Bogen u durch die Formel $\sin\frac{1}{2}u = \frac{c}{2a}$.

Anm. Es verſteht ſich von ſelbſt, daß bey aller dieſer Rechnung der Halbmeſſer der Tafeln r zugezogen wird. Z. E. für §. 78. iſt $c = \frac{2a.\sin\text{tab}\frac{1}{2}u}{r}$, folglich hier $\frac{cr}{2a} = \sin\text{tab}\frac{1}{2}u$. Nähme man $a = \frac{1}{2}r$: ſo wäre $c = \sin\text{tab}\frac{1}{2}u$.

§. 81.

§. 81. Zuſ. 4. Des △ ABC Inhalt iſt $T = \frac{1}{2}p.c = \frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}u.2a.\sin\frac{1}{2}u = \frac{1}{2}a^2.\sin u$.

§. 82. Zuſ. 5. Des Ausſchnitts AEBC Inhalt iſt $S = \frac{1}{2}a^2u$, wenn u in Decimaltheilen des Halbmeſſers ausgedrückt iſt. Vergl. Geom. §. 352.

§. 83. Zuſ. 6. Des Abſchnitts ABEA Inhalt iſt $V = AEBC - \triangle ABC = \frac{1}{2}a^2(u - \sin u)$.

Anmerk. Hat man u bis auf Zehnmillionen Theile; ſo iſt $u - \sin u$ ſo klein, daß man den Logarithmus davon ziemlich genau hat. Da man alſo V, und auch T mit Logarithmen berechnen kann, ſo hat man $S = T + V$.

§. 84. Zuſ. 7. Soll man den Bogen AEB = u aus ſeiner Sehne AB = c, und Höhe DE finden: ſo hat man

1) aus Geom. §. 283. $\frac{AD^2}{DE} + DE = 2CE$, d. i. $\frac{\frac{1}{4}c^2}{DE} + DE = 2a$, alſo $\frac{c^2 + 4DE^2}{4DE} = 2a$, folglich $\frac{c.4DE}{c^2 + 4DE^2} = \frac{c}{2a} = \sin\frac{1}{2}u$.

2) aus Geom. §. 170. $AEB = \frac{1}{2}(360° - u) = 180° - \frac{1}{2}u$, folglich $AEC = 90° - \frac{1}{4}u$. Nun iſt $AD : DE = 1 : \cot AEC = 1 : \tan\frac{1}{4}u$. Folglich iſt $\tan\frac{1}{4}u = \frac{DE}{AD} = \frac{2DE}{c}$.

§. 85. Zuſ. 8. Für ein reguläres Polygon iſt c ſeine Seite, u ſein Centriwinkel, und p des △ ABC Höhe. Hieraus läßt ſich jedes reguläre Polygon in den Kreis, oder über einer gegebenen Linie viel genauer, als durch die mechaniſchen Methoden, beſchreiben.

Z. E.

Z. E. Für das 9seitige Polygon ist $u = 40°$, folglich $c = a.2\sin 20°$, $p = a.\cos 20°$, $a = c.\frac{1}{2}\operatorname{cosec}. 20°$.

§. 86. Zus. 9. Für ein nseitiges Polygon sey der Centriwinkel u, der Halbmesser des umschriebenen Kreises a, so ist sein Inhalt $q = a^2.\frac{n}{2}\sin u$. Eben so ist von einem in denselben Kreis beschriebenen Nseitigen Polygon, dessen Centriwinkel v, der Inhalt $Q = a^2\frac{N}{2}\sin v$, folglich $q : Q = \sin u : N \sin v$.

§. 87. Zus. 10. Es sey die Seite eines um den Kreis beschriebenen ähnlichen Polygons $FG = e$, so ist $e = 2a.\operatorname{tang}\frac{1}{2}u = 2a.\frac{\sin\frac{1}{2}u}{\cos\frac{1}{2}u}$, folglich $c : e = \sin\frac{1}{2}u : \operatorname{tang}\frac{1}{2}u = \sin\frac{1}{2}u : \frac{\sin\frac{1}{2}u}{\cos\frac{1}{2}u} = 1 : \frac{1}{\cos\frac{1}{2}u} = 1 : \sec\frac{1}{2}u$.

Zweyter Theil.

Die sphärische Trigonometrie.

1. Von den sphärischen Triangeln überhaupt.

§. 88. Erkl. (Fig. 214.) Ein sphärischer Triangel ABC heißt der von drey Bogen größter Kreise auf einer Kugelfläche eingeschlossene Raum. Diese Bogen heißen seine Seiten, und die sphärischen Winkel, welche die Seiten machen, seine Winkel (vergl. Geom. §. 563.) Oder ein sphärischer Triangel entsteht, wenn man auf der Kugelfläche drey Punkte A, B, C, die nicht in einerley größten Kreise liegen, annimmt, und durch jede zwey derselben den Bogen eines größten Kreises legt.

§. 89. Zus. 1. (Fig. 214.) Zieht man von den Winkelspitzen des △ ABC gerade Linien nach der Kugel Mittelpunkte K, so erhält man drey ebene Winkel AKC, BKC, AKB, deren Maaße die Seiten des Triangels sind, und die an K eine Ecke machen. Diese ist die Spitze eines pyramidenartigen Körpers, dessen gekrümmte Grundfläche die Fläche des sphärischen Triangels ist.

§. 90.

§. 90. Anm. Bogen ſchlechthin, die nach Graden angegeben werden, ſollen die Seiten des Triangels anzeigen, aber Ebene eines Bogens ſoll die Ebene des größten Kreiſes bedeuten, von welchem der Bogen ein Stück, und der Winkel, den der Bogen mißt, ein Ausſchnitt iſt.

§. 91. Zuſ. 2. (Fig. 215.) Es ſey DBC ein ſphäriſcher Triangel, und K der zugehörige Mittelpunkt. Von einer ſeiner Seiten BC Endpunkte C falle ein Perpendikel CM auf die Ebene der andern Seite BD, und ein zweyter Perpendikel CN auf beider Ebenen Durchſchnitt BK, und man ziehe MN, die auch auf BK ſenkrecht iſt (Geom. §. 398.), ſo iſt CNM die Neigung der beiden Ebenen, und dem ſphäriſchen Winkel CBD gleich, (Geom. §. 563.)

Eben ſo, wenn man CQ auf DK ſenkrecht macht, und MK ziehet, iſt CQM dem ſphäriſchen Winkel CDB gleich.

Auf eben die Art iſt die Neigung der Ebenen BCK, DCK, dem ſphäriſchen Winkel BCD gleich.

§. 92. Anm. (Fig. 214.) Will man das Maaß eines ſphäriſchen Winkels ACB in Graden des größten Kreiſes, ſo nehme man auf ſeinen Schenkeln 90°, und ſetze durch die dadurch beſtimmten Punkte F, G, einen Bogen FG des größten Kreiſes, deſſen Pol des Winkels Scheitel C iſt. (Geom. §. 566.)

§. 93. Zuſ. 3. (Fig. 214.) Der Winkel ACB iſt, zugleich mit dem gegenüberſtehenden Bogen AB, kleiner oder größer als 180 Grad.

Denn da die Ebenen der Bogen AB, AC, einander halbiren (Geom. §. 557.), ſo iſt ABE = 180° = ACE. Iſt nun AB < 180°, ſo iſt ACB + BCE = 180°, folglich ACB < 180° ſo lange, bis B in E fällt. Rückte B alsdann noch über E hinaus, daß AB > 180° würde, ſo würde auch ACB > 180°. Man muß ſich hiebey vorſtellen, daß ſich der Winkel ACB immer weiter öffnete, indem die Ebene BKC immer weiter von der Ebene AKC fortrückt.

§. 94. Zuſ. 4. (Fig. 214.) Mit dem ſphäriſchen △ACB hat man noch zwey andre zuſammengehörige:

1) der eine BGE hat mit ihm die Seite BC gemein; die Seite BE iſt die Ergänzung von AB zu 180 Grad, und CE von AC; der Winkel bey E iſt dem bey A gleich, auch ſind bey B und C Nebenwinkel.

2) der andre BEA hat mit ihm zwey Seiten BC, AC gemein, und die Seite BEA iſt die Ergänzung von AB zu 360 Grad. Auf ähnliche Art ergänzen ſich auch die Winkel.

§. 95. Anm. Da es für die Betrachtung einerley iſt, welchen von dieſen 3 Triangeln §. 94. man nehmen will, indem man aus jedem derſelben die beiden übrigen erkennt, ſo iſt es eine große Erleichterung für die folgenden Unterſuchungen, nur ſolche Triangel zu betrachten, worin jede Seite, folglich nach §. 93. auch jeder Winkel, <180 Grad iſt. Blos von ſolchen iſt im Folgenden die Rede. In der Ausübung kann man ſelbſt unter dieſen immer denjenigen wählen, der die wenigſten ſtumpfen Winkel und Seiten hat, wie Fig. 214. der zuerſt betrachtete Triangel ABC.

Selbſt unter obiger Einſchränkung ſind doch noch Zweydeutigkeiten vorhanden, die mit dem größten Theile nach gehoben werden können, wie die Unterſuchungen in der Folge lehren werden.

§. 96. Lehrſ. (Fig. 214.) In einem ſphäriſchen Triangel ABC ſind jede zwey Seiten zuſammen größer als die dritte, und alle drey Seiten zuſammen kleiner als 360 Grad,

Bew. beruhet auf §. 89. 95. und Geom. §. 431.

§. 97. Aufg. (Fig. 216.) Auf der Kugelfläche iſt ein ſphäriſcher △BDC gegeben; man ſoll auf eben der Kugelfläche einen andern △bdc verzeichnen, deſſen Seiten die Winkel, und deſſen Winkel die Seiten des gegebenen zu 180 Grad ergänzen.

Auflöſ. Man verlängere jede Seite des gegebenen △BDC bis zu einem Quadranten, nämlich BC, BD, nach

nach E, F; CB, CD, nach G, H; DB, DC, nach M, N, und lege durch die ſo erhaltenen Punkte E, F, G, H, M, N gröſte Kreiſe, ſo ſchneiden dieſe einander in b, d, c, und geben den verlangten Triangel bdc.

Bew. Nach der Conſtruction ſind die Punkte B, D, C, die Pole der Bogen cd, cb, bd (Geom. §. 554.) Folglich ſind Bc, Dc, Quadranten, und c iſt der Pol des Bogens BD oder MF. (Geom. §. 554.) Eben ſo iſt b der Pol von NH, und d von GE. Demnach ſind die Bogen bH, bN; dG, dE; cF, cM Quadranten. Auch ſind nach der Conſtruction BE, BF; DM, DN; CG, CH, Quadranten.

Nun iſt NH das Maaß des Winkels b, und DN + CH = 180° = DN + HD + CD = HN + CD. Folglich iſt das Maaß des Winkels, b die Ergänzung des Bogens CD. Eben ſo wird bewieſen, daß die Maaße der Winkel d und c, die Ergänzungen der Bogen BC, BD ſind.

Ferner iſt EF das Maaß des Winkels B, und cF + Ed = 180° = cF + dF + EF = cd + EF. Folglich iſt cd die Ergänzung von EF, dem Maaße des Winkels B. Eben ſo ſind bc, bd, die Ergänzungen von MN, GH, den Maaßen der Winkel D, C.

§. 98. Lehrſ. (Fig. 216.) Die Winkel eines ſphäriſchen Triangels BDC ſind zuſammen gröſer als zwey, und kleiner als ſechs rechte Winkel.

Bew. Man verzeichne wie §. 97. den △ bdc, ſo iſt B = 2R − cd; D = 2R − bc; C = 2R − bd, folglich B + D + C = 6R − (cd + bc + bd), alſo < 6R. Nun iſt cd + bc + bd < 4R, §. 96. Folglich iſt B + D + C > 2R.

2. Von den rechtwinklichen sphärischen Triangeln.

§. 99. Erkl. (Fig. 217.) Ein **rechtwinklicher** sphärischer Triangel BAC ist, wenn die Ebenen zweyer Bogen CA, AB (folglich auch die Bogen Geom. §. 563.) senkrecht auf einander sind, da dann die Ebene des Bogens CA durch CM, den Perpendikel von C, auf die Ebene des Bogens AB liegt, und CA die **Höhe**, AB die **Grundlinie**, und BC die **Hypotenuse** des Triangels ist, auch CA, AB, die **Catheten** oder **Perpendikel** heißen.

Ein **schiefwinklicher sphärischer Triangel** BDC (Fig. 215.) ist, der keinen **rechten Winkel** hat; wo die Ebene des Bogens CD oder CB nicht durch den Perpendikel CM liegt.

Anm. Der rechtwinklichte soll gewöhnlich durch BAC oder DAC, der schiefwinklichte durch BDC bezeichnet werden, daß in beiden C die Spitze sey.

§. 100. Lehrs. (Fig. 217.) In dem rechtwinklichen sphärischen Triangel BAC ist:

I. r : sin BC = sin B : sin AC = sin C : sin AB.
d. i. sin tot zum Sinus der Hypotenuse, wie der Sinus eines schiefen Winkels zum Sinus der gegenüberliegenden Cathete.

II. r : sin AB = tang B : tang AC, oder
r : sin AC = tang C : tang AB.
d. i. sin tot zum Sinus einer Cathete, wie die Tangente des anliegenden Winkels zur Tangente der andern Cathete.

III. r : cos AC = cos AB : cos BC.
d. i. sin tot zum Cosinus einer Cathete, wie der Cosinus der andern Cathete zum Cosinus der Hypotenuse.

IV.

IV. r: cos AC = sin C: cos B.
d. i. sin tot zum Cosinus einer Cathete, wie der Sinus des anliegenden zum Cosinus des gegenüberliegenden Winkels.

V. r: cos B = cot AB: cot BC.
d. i. sin tot zum Cosinus eines schiefen Winkels, wie die Cotangente der anliegenden Cathete zur Cotangente der Hypotenuse.

VI. r: cos BC = tang C: cot B.
d. i. sin tot zum Cosinus der Hypotenuse, wie die Tangente des einen zur Cotangente des andern schiefen Winkels.

Beweis. 1) Für das erste Gesetz. Im rechtwinklichen △CMN ist r: CN = sin CNM: GM = sin MCN: NM, d. i.

I. r: sin BC = sin B: sin AC = sin C: sin AB.

2) für das zweyte Gesetz. In den beiden rechtwinklichen Triangeln KMC, CMN, ist

KM: MC = r: tang CKM
MC: NM = tang MNC: r
KM: NM = tang MNC: tang CKM,

und im rechtwinklichen △KNM
KM: NM = r: sin MKN.

r: sin MKN = tang MNC: tang CKM, d. i.

II. r: sin AB = tang B: tang AC.

Fiel nun ein Perpendikel von B auf die Ebene AC, wie vorher von C auf die Ebene AB, so würde auf eben die Art bewiesen:
r: sin AC = tang C: tang AB.

3) für die vier übrigen Gesetze. Man verlängere die Seiten BA, BC, bis BE, BF, Quadranten sind,

lege durch EF einen gröſsten Kreis, der den verlängerten Bogen AC in G schneidet, so ist G der Pol von BE, und B der Pol von EG, desgleichen bey E und F rechte Winkel. Auch sind CF, DC die Ergänzungen von BC, CA zum Quadranten, und G, DF von BA und B.

Nun ist im rechtwinklichen △GFC nach dem ersten Gesetze

r: sin CG = sin G: sin FC, d. i.

III. r: cos AC = cos AB: cos BC, desgleichen
r: sin CG = sin C: sin GF, d. i.

IV. r: cos CA = sin C: cos B.

Ferner nach dem zweyten Gesetze
r: sin GF = tang G: CF, d. i.

V. r: cos B = cot BA: cot BC, desgleichen
r: sin BF = tang C: tang GF, d. i.

VI. r: cos BC = tang C: cot B.

§. 101. Zus. 1. Diese 6 Proportionen, oder Gesetze, §. 100, enthalten alle Fälle für rechtwinkliche sphärische Triangel. Denn da hier der rechte Winkel schon bekannt ist, so brauchen nur zwey Dinge von dem Triangel gegeben zu werden, um ein drittes daraus zu finden. Daher sind immer drey Glieder der Frage, und zwar

1) drey Seiten, nach dem dritten Gesetze.

2) Zwey Seiten und ein Winkel, nämlich
a) Zwey Catheten und ein Winkel, nach dem zweyten Gesetze,
b) Hypotenuse, Cathete, und
α) der gegenüberliegende Winkel, nach dem ersten Gesetze,
β) der anliegende Winkel, nach dem 5ten Gesetze.

3) Eine Seite und zwey Winkel, nämlich

a) eine Cathete und zwey Winkel, nach dem vierten Gesetze,

b) die Hypotenuse und zwey Winkel, nach dem sechsten Gesetze.

§. 102. Zus. 2. Jede dieser sechs Proportionen läßt sich so ordnen, daß jedes von den drey Gliedern das letzte werde, und beantwortet daher drey, alle zusammen aber 18 Fragen, wovon aber zwey abgehen, weil in der dritten und sechsten Proportion, bey der Hypotenuse und zwey Cathe-ten, oder zwey Winkeln, es gleichgiltig ist, welches von den zweyen gesucht werde, daher jede dieser beiden Propor-tionen nur zwey Fragen beantwortet.

§. 103. Zus. 3. Bey jeder dieser 16 Fragen ist es nicht genug, die Proportion so zu ordnen, daß das Gesuchte das letzte Glied werde, sondern man hat zugleich mit darauf zu sehen, daß zur Bequemlichkeit der Rechnung der Halbmesser, soviel als möglich das erste Glied bleibe, wozu man aus §. 25. tang x : tang y = cot y : cot x, und tang x : r = r : cot x mit zu Hülfe nehmen muß.

Hienach wird nach dem 2ten Gesetze

r : sin AB = cot AC : cot B, oder

tang B : r, d. i. r : cot B = tang AC : sin AB.

Desgleichen nach dem 5ten Gesetze

r : cos B = tang BC : tang AB, oder

cot AB : r, d. i. tang AB = cot BC : cos B.

und nach dem sechsten Gesetze

tang C : r, d. i. r : cot C = cot B : cos BC.

(c

§. 104. Anm. Hieraus kann man sich leicht, wenn man es für nöthig findet, eine Tafel für alle Fälle machen, die bey Auflö-sung rechtwinklicher sphärischer Triangel vorkommen, so daß für jeden Fall die Proportion gehörig geordnet sey. Die Art der Rech-nung ist wie in der ebenen Trigonometrie; nur entstehen hier,

wenn man die erwiesenen Proportionen allgemein macht, wegen des Gleichen manche Zweydeutigkeiten, zu deren Hebung die nun noch folgenden Untersuchungen dienen.

§. 105. Erkl. Zwey Winkel, oder zwey Bogen, oder ein Winkel und ein Bogen, die beide unter, oder beide über 90 Grad sind, heißen gleichartig, sonst aber ungleichartig. Man nennt hiebey, nach Art der Winkel, einen Bogen unter 90 Grad spitz, und über 90 Grad stumpf.

§. 106. Aufg. (Fig. 218.) Die verschiednen Lagen der Kugelkreise in einem rechtwinklichen sphärischen Triangel zu verzeichnen.

Auflös. Die Ebene ABD sey mit AFD senkrecht, und werde von einer dritten geschnitten, entweder unter einem rechten Winkel, wie von FB, oder unter einem spitzen nach A, und stumpfen nach D zu, wie von GB, oder unter einem stumpfen nach A und spitzen nach D zu, wie von GB. Im ersten Falle ist BF, der Durchschnitt der Ebenen FB, AFD, senkrecht auf der Ebene ABD, also F der Pol von ABD, also FB, FA, FD, Quadranten. Folglich ist im zweyten Falle CB, AC kleiner, und im dritten GB, AG größer, als ein Quadrant. In allen drey Fällen kann auch AB entweder ein Quadrant, oder kleiner wie in der Zeichnung, oder größer seyn.

§. 107. Zus. 1. Von jedem rechtwinklichen sphärischen Triangel gelten folgende Verbindungen der Winkel und Seiten:

1) Jede Cathete ist mit dem gegenüberliegenden schiefen Winkel gleichartig.

2) Die Hypotenuse ist spitz oder stumpf, je nachdem die Catheten gleichartig oder ungleichartig sind.

3) Die Hypotenuse ist spitz oder stumpf, je nachdem ein schiefer Winkel mit der anliegenden Cathete gleichartig oder ungleichartig ist.

4) Je-

4) Jeder ſchiefe Winkel iſt ſpitz oder ſtumpf, je nachdem der andre mit der Hypotenuſe gleichartig oder ungleichartig iſt.

§. 108. Zuſ. 2. Die Proportionen §. 100. ſind zwar blos von ſolchen rechtwinklichen Triangeln bewieſen worden, worin, wie im △BAC, alle Seiten kleiner als Quadranten, und die ſchiefen Winkel ſpitz ſind; ſie ſind aber dennoch für alle übrigen Arten rechtwinklicher Triangel brauchbar, und können auch allgemein gemacht werden. Denn

1) kann man nach §. 95. ſtets einen ſolchen △BAC an die Stelle eines andern ſetzen. Z. E. hätte man den △BDC, worin beide Catheten DB, DC, größer als Quadranten ſind, ſo nehme man ihre Ergänzungen BA, CA, im △BAC. Oder hätte man den △BAG, worin eine Cathete AB kleiner, die andre AG größer, als ein Quadrant, ſo nehme man die Ergänzungen AH, BH, der ſtumpfen Cathete und der Hypotenuſe, im △BAH.

2) Die für den △BAC gefundenen Proportionen gelten auch vom △BDC, nur daß hier die Zeichen vorhanden, die den trigonometriſchen Linien in ſolchen Fällen zukommen, daß nämlich Coſinus, Tangente und Cotangente eines ſtumpfen Winkels oder Bogens negativ werden. Denn theils bleibt die Größe der trigonometriſchen Linien unverändert, wenn die Lage der Ebenen unverändert bleibt, durch was für Winkel man ſie auch beſtimmen möge; theils erhalten, weil immer zwey Glieder der Proportion zugleich ihr Zeichen ändern, die Producte aus den äußern und mittlern einerley Zeichen, ſo daß man alſo in der Rechnung ſelbſt auf die Zeichen nicht zu achten braucht.

§. 109. Zuſ. 3. Die Regeln §. 107. können aus den Zeichen der trigonometriſchen Linien auf folgende Art hergeleitet

geleitet werden, wobey man nach §. 95. annimmt, daß die Seiten und Winkel unter 180 Grad sind.

1) Jede Cathete ist mit dem gegenüberliegenden Winkel gleichartig.

Denn da nach der Voraussetzung der Sinus allemal bejahend ist, so heißt in §. 100. das zweyte Gesetz

$$+r : +\sin AB = \pm\tang B : \pm\tang AC$$
$$= \pm\tang C : \pm\tang AB.$$

Sind also beide Winkel spitz oder stumpf, so sind auch beide Catheten im ersten Falle spitz, im zweyten stumpf. Und ist der erste Winkel spitz, der andre stumpf, so ist auch die erste Cathete spitz, die andre stumpf.

2) Die Hypotenuse ist spitz oder stumpf, je nachdem die Catheten gleichartig oder ungleichartig sind.

Denn nach dem dritten Gesetze hat man

$$+r : \pm\cos AC = \pm\cos AB : +\cos BC$$
$$= \pm\cos AB : -\cos BC.$$

3) Die Hypotenuse ist spitz oder stumpf, je nachdem ein schiefer Winkel mit der anliegenden Cathete gleichartig oder ungleichartig ist, nach dem fünften Gesetze.

4) Jeder schiefe Winkel ist spitz oder stumpf, je nachdem der andre mit der Hypotenuse gleichartig oder ungleichartig ist, nach dem sechsten Gesetze.

§. 110. Zus. 4. Diese Regeln §. 109. 107. heben also auch für das Gesuchte alle Zweydeutigkeit, ausgenommen in drey Fällen:

$\sin B : \sin AC = r : \sin BC$ nach dem ersten Gesetze,

$r : \cot B = \tang AC : \sin BA$ nach dem 3ten Gesetze,

$\cos AC : r = \cos B : \sin BCA$ nach dem 4ten Gesetze.

Denn Fig. 219, sey im rechtwinklichen Triangel BAC der Bogen BA, BC, zweyter Durchschnitt b, und hier ba, bc, obgenanntem Bogen gleich gemacht, so ist auch ac = AC.

AC. Folglich kann bey völlig gleichen gegebenen Dingen das Gesuchte auch Bc, Ba, Bca seyn, und es verhält sich hiermit, wie mit dem dritten Falle in §. 58.

§. 111. Anm. (Fig. 220.) Wäre in einem schiefwinklichen Triangel BDC oder BdC, die eine Seite BC ein Quadrant, so läßt sich allemal ein rechtwinklicher Triangel bestimmen, woraus man jenen berechnen kann.

Denn macht man BA = 90°, daß folglich CA das Maaß von B ist, so ist AD = BD — 90°, ACD = BCD — 90°, und Ad = 90° — Bd, ACd = 90° — BCd.

Daher sind die nunmehr folgende Regeln für schiefwinklichte sphärische Triangel zwar ganz allgemein, aber nur alsdann nothwendig, wenn keine Seite ein Quadrant ist.

3. Von den schiefwinklichen sphärischen Triangeln.

§. 112. Aufg. (Fig. 223.) Die Umstände zu bestimmen, unter denen der Perpendikel von der Spitze auf die gegenüberliegende Seite eines schiefwinklichen Triangels innerhalb oder außerhalb desselben fällt.

Auflös. 1) Legt man auf einen ganzen Kreis ABaDA, welcher der Grund heißen soll, den Kreis ACa senkrecht, und durch einen willkührlichen Punct C desselben zwey schiefe Kreise BCb, DCd, welche nach A zu spitze, nach a zu stumpfe Winkel mit dem Grunde machen, so ist CA spitz, Ca stumpf, §. 109. 1.

d. i. „Eines senkrechten Kreises ACa spitzer Bogen CA „fällt zwischen die spitzen Winkel des schiefen BCb oder „DCd, der stumpfe aber zwischen die stumpfen.“

2) Hat man AB, AD, spitz angenommen, so sind auch BC, DC spitz, §. 109. 2. folglich Cb, Cd stumpf.

3) Die beiden schiefen Kreise BCb, DCd bilden viet schiefwinkliche Triangel.

α)

α) BDC mit zwey spitzen Winkeln B, D.
β) bdC, mit zwey stumpfen, b, d.
γ) DbC, wo D stumpf, b spitz ist.
δ) BdC, wo B stumpf, d spitz ist.

Nun fällt der spitze Perpendikel CA innerhalb α, außerhalb γ, und der stumpfe Perpendikel Ca innerhalb β, außerhalb δ.

d. i. „Sind die Winkel am Grunde gleichartig, so „fällt der Perpendikel innerhalb des Triangels, und ist mit „ihnen gleichartig, wie in den beiden ersten. Sind sie „aber ungleichartig, so fällt der Perpendikel außerhalb des „Triangels, und ist mit dem nächsten Winkel ungleichartig, „wie in den beiden letzten, z. E. CA mit CDb, und Ca „mit CdB.“

§. 113. Zus. 1. Im rechtwinklichen Triangel DAC ist, wenn r = 1, nach dem 2ten Gesetze, 1 : sin AD = tang ADC : tang AC = cot AC : cot ADC, folglich cot ADC = cot AC. sin AD, wo AC unverändert bleibt, folglich ADC auf die Größe des Bogens AD ankömmt.

1) Nun kann der Kreis DCd sich um C drehen, daß der Punkt D nach Q, D, b, fortrückt, und AD $\lessgtr$ 90° wird.

a) Es sey AD spitz, also sin AD bejaht, so muß, wenn AD wächst, auch cot ADC wachsen und bejaht seyn, folglich ADC abnehmen.

b) Es sey AD = 90°, wenn D in Q rückt, folglich sin AD = 1, so ist cot ADC = cot AC, folglich ADC = AC, weil beide gleichartig. §. 109. 1.

c) Es sey AD > 90°, wenn D in D' rückt, so nimmt sin AD ab, folglich auch cot ADC, d. i. ADG nimmt zu, bis D in b rückt, da dann sin Ab = sin AB, und AbC = ABC.

2) In-

5) Indem D nach b zurückt, so rückt im Triangel β §. 112. zugleich d nach B zu, und der stumpfe Winkel bdC, des vorigen ADC Ergänzung zu 180°, wächst bis d in q rückt, wo er = Ca wird, und von da an wieder abnimmt.

3) Der stumpfe Winkel bDC im Triangel γ §. 112. nimmt zu, bis D in Q rückt, nimmt von da an ab, und wird von Cba unendlich wenig unterschieden, wenn D unendlich nahe an b rückt.

§. 114. Zus. 2. Im rechtwinklichen Δ DAC ist ferner, wenn r = 1, nach dem dritten Gesetze, 1 : cos AD = cos AC : cos DC, folglich cos DC = cos AC . cos AD, wo also DC auf die Größe des Bogens AD, wie §. 113, ankömmt.

1) Indem der Punkt D von A wegrückt, ist cos AD anfangs bejaht und abnehmend, folglich cos DC auch bejaht und abnehmend, d. i. DC spitz und zunehmend. Rückt D in Q, so ist cos AD = 0, folglich DC = 90°, von da wird cos AD verneint, und wächst zugleich mit AD, folglich wächst auch der stumpfe Bogen DC bis D in b rückt.

2) Im Triangel β §. 112. nimmt also der Bogen Cd beständig ab, indem d von a durch q nach B rückt, ist anfangs stumpf bis an q, und wird von da an spitz.

3) Im Triangel γ §. 112. verändert sich DC, wie zuvor in (1) gewiesen worden.

4) Ist AD < AB, so sey AT = AD, folglich DC = TC nach dem dritten Gesetze, und ADC = ATC nach dem zweyten Gesetze, folglich BTC = 2R — ADC.

5) Alsdann aber ist TC oder DC < BC. Denn die rechtwinklichen Triangel BAC, DAC, haben den gemeinschaftlichen Perpendikel CA, und lauter spitze Seiten. Nun ist $\cos CA = \frac{\cos BC}{\cos AB} = \frac{\cos DC}{\cos AD}$, und zuvor in (4)

cos

$\cos AD > \cos AB$. Folglich ist $\cos DC > \cos BC$, d. i. $DC < BC$.

§. 115. Zuſ. 3. Hieraus fließen folgende Sätze:

1) Im Triangel α §. 112. können BC, B, DC, gegeben ſeyn, und es kann doch daraus ein Triangel BCT gemacht werden, wenn nämlich $DC < BC$ iſt, §. 114. 4. 5; ſonſt aber nicht, und es iſt im letzten Falle BDC allemal ſpitz. §. 113. 1.

2) Im Triangel β §. 112. können bC, b, dC gegeben ſeyn, und es kann daraus auch $\triangle bTC$ gemacht werden, wenn nämlich $dC > bC$ iſt, §. 114. 2. ſonſt aber nicht, und es iſt im letzten Falle bdC ſtumpf.

3) Im Triangel γ §. 112. können DbC, bC, DC gegeben ſeyn, und es läßt ſich daraus auch $\triangle bTC$ machen, wenn $DC < 2R - bC$ iſt, §. 114. 4. 5.

4) Im Triangel δ §. 112. können dBC, BC, dC gegeben ſeyn, und es läßt ſich daraus auch $\triangle BTC$ machen, wenn $2R - dC < BC$ iſt.

§. 116. Zuſ. 4. In einem ſchiefwinklichten Triangel (wie BDC) bedeute W einen Winkel (wie B), s die ihm anliegende Seite (wie BC), S die ihm gegenüberliegende (wie DC) und w den der Seite s gegenüberliegenden Winkel (wie D).

Iſt nun			ſo iſt nach §. 115.
W	s	S	w
ſpitz	ſpitz	$< s$	zweydeutig (1)
		$> s$	ſpitz (1)
ſtumpf	ſtumpf	$> s$	zweydeutig (2)
		$< s$	ſtumpf (2)
ſpitz	ſtumpf	$< 2R - s$	zweydeutig (3)
		$> 2R - s$	ſtumpf (3)
ſtumpf	ſpitz	$> 2R - s$	zweydeutig (4)
		$< 2R - s$	ſpitz (4)

§. 111.

§. 117. Zus. 5. Im △CAD oder CAD′ ist nach §. 113. cot D = cot AC . sin AD, und

cot D = cot AC . sin AD′

Nun sey AD′ = 2R − AD, folglich sin AD = sin AD′: so ist sin ADC = sin AD′C §. 113. auch − cos AD = cos AD′, folglich cos CD = − cos CD′ §. 114, 1. folglich CD + CD′ = 2R. Nun ist das gröſte AD′ = 2R − AB, weil D′ bis in b rücken kann. Folglich ist das kleinste AD, dessen D ein hier bestimmtes D zugehört, = AB. Aber für AD = AB ist ADC = ABC, §. 114, 4. folglich für AD > AB ist ADC > ABC §. 113, 1. weil AB spitz ist, §. 112, 2. und es also gröſsere spitze AD giebt. Solcher AD giebt es so viele, so viel es stumpfe AD′ giebt, weil jene sich innerhalb eines Bogens AQ − AB, und diese innerhalb des ihm gleichen Ab − AQ endigen. Zu jedem dieser AD gehört ein AD′, wobey AD′C = ADC, und AD + AD′ = 2R ist; aber zu jedem dieser AD gehört ein ADC < ABC, und jeder ADC > ABC gehört zu einem AD < AB, §. 113, 1.

§. 118. Zus. 6. Hieraus fliesen folgende Sätze:

1) Wenn im Triangel α §. 112. BC, DBC, BDC gegeben sind, und BDC < DBC ist, so giebt es dafür zwey Triangel, und der zweyten Seite ist CD′ = 2R − CD. Ist aber BDC ≥ DBC, so giebt es nur einen Triangel, dessen Seite CD spitz ist, §. 114, 1.

2) Wenn im Triangel β §. 112. bC, b, d gegeben sind, so kann die dritte Seite Cd oder Cd′ seyn, wofern im Triangel α §. 112 die dritte Seite wie zuvor in (1) CD oder CD′ seyn kann, d. i. wofern 2R − Cdb < 2R − Cbd, oder Cbd < Cdb ist. Ist aber dieses nicht, so giebt es nur eine stumpfe Seite Cd.

3) Wenn im Triangel γ §. 112. bC, b, D gegeben sind, so finden zwey Seiten statt, wenn 2R − CDb < CbD ist; sonst aber ist nur eine spitze Seite CD.

4) Wenn im Triangel ∂ §. 112. CB, B, d gegeben ſind, ſo finden zwey Seiten ſtatt, wenn CdB < R — CBd iſt; ſonſt aber iſt nur eine ſtumpfe Seite Cd.

§. 119. Zuſ. 7. Die Buchſtaben W, w, s, S haben die Bedeutung, die in §. 116. angezeigt worden.

Iſt nun			ſo iſt nach §. 118.	
W	s	w	S	
ſpiz	ſpiz	< W	zweydeutig	(1)
		> W	ſpiz	(1)
ſtumpf	ſtumpf	> W	zweydeutig	(2)
		< W	ſtumpf	(2)
ſpiz	ſtumpf	> 2R — W	zweydeutig	(3)
		< 2R — W	ſpiz	(3)
ſtumpf	ſpiz	< 2R — W	zweydeutig	(4)
		> 2R — W	ſtumpf	(4)

§. 120. Zuſ. 8. Da AD = ad, und AD' = ad', ſo iſt dieſer Bogen in den zweydeutigen Fällen §. 116. 119. zweydeutig, außerdem allemal ſpiz.

§. 121. Erkl. (Fig. 221. 222.) Wenn im ſphäriſchen ΔBDC der Perpendikel CA von dem Scheitel C auf den Grund BD fällt, ſo ſollen Abſchnitte des Grundes oder des Scheitels die Stücke heißen, welche der Perpendikel begränzt, wie AD, AB, ACD, ACB. Die Abſchnitte, wie AB, ACB, heißen dem Schenkel BC und dem Winkel B anliegend, aber dem Schenkel DC und dem Winkel D entgegengeſezt. Die Winkel B, D, am Grunde ſollen ſchlechthin Winkel heißen.

§. 122. Lehrſ. (Fig. 221. 222.) Im ſphäriſchen Triangel BDC iſt

VII. DC. ſin BC = ſin B : ſin D.

d. i. die Sinus der Schenkel, wie die Sinus der entgegengeſezten Winkel.

VIII.

VIII. cos DC : cos BC = cos AD : cos AB.

d. i. die Cosinus der Schenkel, wie die Cosinus der anliegenden Abschnitte des Grundes.

IX. tang DC : tang BC = ACB : cos ACD.

d. i. die Tangenten der Schenkel, wie die Cosinus der entgegengesetzten Abschnitte des Scheitels.

X. cos B : cos BD = sin ACB : sin ACD.

d. i. die Cosinus der Winkel, wie die Sinus der anliegenden Abschnitte des Scheitels.

XI. tang B : tang D = sin AD : sin AB.

d. i. die Tangenten der Winkel, wie die Sinus der entgegengesetzten Abschnitte des Grundes.

Bew. Im △BDC ist der Perpendikel CA auf den Grund, den beiden rechtwinklichen Triangeln BAC, DAC gemein, und es lassen sich immer zwey Gesetze aus §. 100, worin r und AC vorkömmt, mit einander verbinden, (wobey, da die Sinus immer bejaht bleiben, man blos noch zu bemerken hat, daß die Cosinus und Tangenten von den innern Winkeln der rechtwinklichen Triangel zu verstehen sind.) Es ist aber aus §. 100.

1) nach dem ersten Gesetze r . sin AC = sin BC . sin B = sin DC . sin D, folglich
VII. sin DC : sin BC = sin B : sin D.

2) nach dem 3ten Gesetze, cos AC : r = cos DC : cos AD = cos BC : cos AB, oder
VIII. cos DC : cos BC = cos AD : cos AB.

3) nach dem 5ten Gesetze r . tang AC = cos ACB . tang BC = cos ACD . tang DC, folglich
IX. tang DC : tang BC = cos ACB : cos ACD.

4) nach dem vierten Geſetze, cof AC : r = cof B : ſin ACB = cof D : ſin ACD, folglich

X. cof B : cof D = ſin ACB : ſin ACD.

5) nach dem zweyten Geſetze, r . tang AC = tang B . ſin AB = tang D : ſin AD, folglich

XI. tang B : tang D = ſin AD : ſin AB.

§. 123. Lehrſ. (Fig. 222. 223.) Im ſphäriſchen Triangel BDC iſt

XII. $\text{cof } B = \frac{\text{cof } DC - \text{cof } BD \cdot \text{cof } BC}{\text{ſin } BC \cdot \text{ſin } BD}$, oder $\text{ſin } \frac{1}{2}B^2 = \frac{\text{ſin } \frac{1}{2}(DC + BC - BD) \cdot \text{ſin } \frac{1}{2}(DC + BD - BC)}{\text{ſin } BC \cdot \text{ſin } BD}$

Bew. Nach dem achten Geſetze §. 122. hat man $\frac{\text{cof } DC \cdot \text{cof } AB}{\text{cof } BC} = \text{cof } AD = \text{cof}(BD - AB) = \text{cof } BD \cdot$ cof AB + ſin BD . ſin AB, §. 35. Folglich iſt, wenn man mit cof AB dividirt, $\frac{\text{cof } DC}{\text{cof } BC} = \text{cof } BD + \text{ſin } BD \cdot$ tang AB, folglich $\frac{\text{cof } DC - \text{cof } BC \cdot \text{cof } BD}{\text{cof } BC \cdot \text{ſin } BD} =$ tang AB = cof B . tang BC §. 100. V. $= \frac{\text{cof } B \cdot \text{ſin } BC}{\text{cof } BC}$, folglich $\frac{\text{cof } DC - \text{cof } BC \cdot \text{cof } BD}{\text{ſin } BD} = \text{cof } B \cdot \text{ſin } BC$, folglich $\frac{\text{cof } DC - \text{cof } BC \cdot \text{cof } BD}{\text{ſin } BC \cdot \text{ſin } BD} = \text{cof } B$.

Nun iſt $\text{ſin } \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{1 - \text{cof } B}{2}}$ §. 38, folglich iſt $2\text{ſin } \frac{1}{2}B^2 = 1$

$$= 1 - \cos B = \frac{\sin BC \cdot \sin BD - \cos DC + \cos BC \cdot \cos BD}{\sin BC \cdot \sin BD}$$

$$= \frac{\cos(BC - BD) - \cos DC}{\sin BC \cdot \sin BD}$$ §. 35. Setzt man nun $BC - BD = u$, und $DC = v$, so ist $2 \sin \frac{1}{2} B^2 = \frac{\cos u - \cos v}{\sin BC \cdot \sin BD}$, oder $\sin \frac{1}{2} B^2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(v+u) \cdot \sin \frac{1}{2}(v-u)}{\sin BC \cdot \sin BD}$ (1). §. 40, wo $v + u = DC + BC - BD$, und $v - u = DC - BC + BD$ ist.

§. 124. Lehrs. (Fig. 216.) Im sphärischen Triangel BDC ist

XIII. $\cos DC = \frac{\cos B + \cos D \cdot \cos C}{\sin D \cdot \sin C}$; oder

$$\cos \tfrac{1}{2} DC^2 = \frac{\cos \frac{1}{2}(B+D-C) \cdot \cos \frac{1}{2}(B+C-D)}{\sin D \cdot \sin C}.$$

Beweis. Man verzeichne nach §. 97, aus dem $\triangle DBC$ den $\triangle bdc$, dessen Seiten jenes Winkel, und dessen Winkel, jenes Seiten zu 2 Quadranten ergänzen, so ist nach §. 123.

$$\cos b = \frac{\cos dc + \cos bc \cdot \cos bd}{\sin bc \cdot \sin bd}.$$

Nun ist §. 97.			und daher		
$b + DC$	$=$	$180°$	$\cos b$	$=$	$-\cos DC$
$dc + B$	$=$	$180°$	$\cos dc$	$=$	$-\cos B$
$bc + D$	$=$	$180°$	$\cos bc$	$=$	$-\cos D$
			$\sin bc$	$=$	$+\sin D$
$bd + C$	$=$	$180°$	$\cos bd$	$=$	$-\cos C$
			$\sin bd$	$=$	$+\sin C$

Folglich ist $-\cos DC = -\frac{\cos B + \cos D \cdot \cos C}{\sin D \cdot \sin C}$, oder

$$\cos DC = \frac{\cos B + \cos D \cdot \cos C}{\sin D \cdot \sin C}.$$

Nun ist $\cos\frac{1}{2}DC = \sqrt{\frac{1+\cos DC}{2}}$ §. 38. Folglich ist

$$2\cos\tfrac{1}{2}DC^2 = 1+\cos DC = \frac{\sin D.\sin C+\cos B+\cos D.\cos C}{\sin D.\sin C}$$

$$= \frac{\cos(D-C)+\cos B}{\sin D.\sin C} \text{ §. 31.} = \frac{2\cos^2(B+D-C).\cos\frac{1}{2}(B+C-D)}{\sin D.\sin C}$$

§. 40. oder

$$\cos\tfrac{1}{2}DC^2 = \frac{\cos\frac{1}{2}(B+D-C).\cos\frac{1}{2}(B+C-D)}{\sin D.\sin C}.$$

§. 125. Aufg. (Fig. 221. 222.) Im sphärischen Triangel BDC sind drey Dinge gegeben; man soll die übrigen durch Rechnung finden.

Auflös. Aus einer solchen Winkelspitze C gehe der Perpendikel CA auf die gegenüberliegende Seite BD, daß einer der beiden rechtwinklichen Triangel, die dadurch entstehen, von den gegebenen Dingen zwey enthalte, um die übrigen Dinge in demselben durch die Gesetze §. 100. zu finden, und mittelst ihrer und der Gesetze §. 122. das Gesuchte zu berechnen. In einigen Fällen hat man keinen Perpendikel CA nöthig, sondern rechnet unmittelbar nach den Gesetzen §. 122. 123. 124. Die zweifelhaften Antworten suche man aus §. 112. und seinen Zusätzen. Insbesondere sind nun folgende Fälle:

1) Aus DC, BC, B, wird D gesucht, da dann nach §. 122. VII. $\sin DC : BC = \sin B : \sin D$.

Ob D stumpf oder spitz sey, entscheidet §. 116.

2) Aus BC, B, D, wird DC gesucht, da dann wiederum aus VII. $\sin D : \sin B = \sin BC : \sin DC$.

Ob DC stumpf oder spitz sey, entscheidet §. 119.

3) Aus BC, DC, B, wird BD gesucht, da dann aus

aus §. 100. V. r: cos B = tang BC: tang AB, und aus §. 122. VIII.
cos BC: cos DC = cos AB: cos AD.

Ob der Perpendikel CA innerhalb oder außerhalb des Triangels falle, entscheidet sich aus dem Winkel D §. 112, dessen Art man aus §. 116. erkennet, weil die gegebenen Dinge wie im 1ten Falle sind, und man hat BD = AB ± AD. Ist D zweydeutig, so ist es auch die Entscheidung dieser Frage.

4) Aus BC DC, B, wird C gesucht, da dann aus VI. r: cos BC = tang B: cot ACB, und aus IX.
tang DC: tang BC = cos ACB: cos ACD.

Die Frage und Entscheidung ist wie im 3ten Falle, und man hat C = ACB ± ACD.

5) Aus BC, B, D, wird C gesucht, da dann aus VI. r: cos BC = tang B: cot ACB, und aus X.
cos ABC: cos ADC = sin ACB: sin ACD.

Die Lage des Perpendikels ist aus den gegebenen Winkeln zu bestimmen, §. 112, die Art des Winkels ACD aus AD §. 109, die Art von AD aus §. 120, und man hat C = ACB ± ACD.

6) Aus BC, B, D, wird BD gesucht, da dann aus V. r: cos B = tang BC: tang AB, und aus XI.
tang ADC: tang ABC = sin AB: sin AD.

Die Lage des Perpendikels bestimmt sich wie im 5ten Falle, die Art von AD aus §. 120, und man hat BD = AB ± AD.

7) Aus BC, B, C, wird D gesucht, da dann aus VI. r: cos BC = tang B: cot ACB, und aus X.
sin ACB: sin ACD = cos ABC: cos ADC.

Die Lage des Perpendikels ergiebt sich aus dem Win-

kel ACB, den die erſte Proportion ohne Zweydeutigkeit beſtimmt, mit dem gegebenen BCD verglichen.

8) Aus BC, B, C, wird DC geſucht, da dann aus VI. r : cof BC = tang B : cot ACB, und aus IX. cof ACD : cof ACB = tang BC : tang DC.

Die Lage des Perpendikels beſtimmt ſich wie im 7ten Falle.

9) Aus BC, BD, B, wird DC geſucht, da dann aus V. r : cof B = tang BC : tang AB, und aus VIII. cof AB : cof AD = cof BC : cof DC.

Die Lage des Perpendikels beſtimmt AB mit BD verglichen, woraus man erſieht, ob AB > oder < BD iſt, d. i. ob A näher oder weiter von B iſt als D, wenn A und D auf einer Seite von B ſind. Nun iſt auch ACB gegeben, da dann A und D auf einer Seite von B ſind, wenn ACB ſpitz iſt, auf verſchiedenen Seiten aber, wenn ACB ſtumpf iſt.

10) Aus BC, BD, B, wird D geſucht, da dann aus V. r : cof B = tang BC : tang AB, und aus XI. ſin AD : ſin AB = tang ABC : tang ADC.

Die Frage und Entſcheidung iſt wie im 9ten Falle.

11) Aus BC, BD, DC, wird B geſucht, da dann aus §. 123. XII. (weil ſin tab $\frac{1}{2}B = r \cdot \sin \frac{1}{2}B$, und daher ſin tab $\frac{1}{2}B^2 = r^2 \sin \frac{1}{2}B^2$ iſt, wenn r den Halbmeſſer der Tafeln bedeutet)
$\sin BC \cdot \sin BD : \sin \frac{1}{2}(DC + BC - BD) \cdot \sin \frac{1}{2}(DC + BD - BC) = r^2 : \sin \frac{1}{2}B^2$, wodurch man log ſin $\frac{1}{2}B^2$, und hieraus log ſin $\frac{1}{2}B$ findet.

Da B niemals > 180°, §. 95, ſo iſt auch niemals $\frac{1}{2}B > 90°$, und man muß daher allemal den zu ſin $\frac{1}{2}B$ gehörigen ſpitzen Winkel nehmen.

12) Aus

12) Aus B, D, C, wird DC gesucht, da dann aus §. 124. XIII. wie im 11ten Falle
$\sin D . \sin C : \cos \frac{1}{2}(B + D - C) . \cos \frac{1}{2}(B + C - D) = r^2 : \cos \frac{1}{2} DC^2$, wodurch man log $\cos \frac{1}{2} DC^2$, und hieraus log $\cos \frac{1}{2} DC$ findet.

Da DC niemals $> 180°$ ist, so ist auch niemals $\frac{1}{2} DC > 90°$.

§. 126. Zus. Daß obige Fälle für alle möglichen Fragen von schiefwinklichen sphärischen Triangeln hinreichen, erhellet aus folgender Uebersicht:

Gegeben.	Gesucht.	Fall.
A. 3 Seiten	1 Winkel	11
B. 3 Winkel	1 Seite	12
C. 2 Seiten 1 Winkel		
a. Der eingeschlossene W.	3te Seite	9
	1 Winkel	10
b. Der opponirte Winkel	oppon. Winkel	1
	eingeschl. Winkel	4
	3te Seite	3
D. 2 Winkel, 1 Seite		
a. Die eingeschlossene S.	1 Winkel	7
	1 Seite	8
b. Die eingeschlossene S.	oppon. Seite	2
	anlieg. Seite	6
	3ter Winkel	5

V.

Die Analysis.

Der erste Abschnitt.

Ergänzung der allgemeinen Arithmetik.

1. Das Binomium.

§. 1. Aufg. Von der zweytheiligen Wurzel $1+x$ die Potenzen nach der Reihe zu machen.

Auflös. Jede vorhergehende Potenz mit der Wurzel multiplicirt, giebt die nächstfolgende. (Arithm. §. 221.) Hienach erhält man folgende Tafel, die man beliebig fortsetzen kann:

$1+x$

$1+x$
$1+2x+x^2$
$1+3x+3x^2+x^3$
$1+4x+6x^2+4x^3+x^4$
$1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$
$1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$
$1+7x+21x^2+35x^3+35x^4+21x^5+7x^6+x^7$.

§. 2. Zuſ. 1. Setzt man x^0 ſtatt 1, (Ar. §. 158.) ſo kömmt x in alle Glieder, und ſeine Exponenten ſind die natürlichen Zahlen von Null an bis zu der Zahl, von welcher die jedesmalige Potenz den Namen führt. Der Coefficient des erſten und letzten Gliedes in allen Potenzen iſt $=1$, die Zwiſchencoëfficienten ſollen nach der Ordnung A, B, C u. ſ. w. heißen, ſo wäre allgemein

$(1+x)^n = 1+Ax+Bx^2+Cx^3 \ldots +Vx^{n-1}+x^n$.

§. 3. Zuſ. 2. Nimmt man die Form §. 2. für irgend eine Potenz der $1+x$ an, und multiplicirt ſie mit $1+x$, ſo erhält man $(1+x)^{n+1} =$

$1+Ax+Bx^2+Cx^3 \ldots . +Vx^{n-1}+x^n$
$+1 \quad +A \quad +B \ldots . \ldots . \ldots . +V+x^{n+1}$.

§. 4. Zuſ. 3. Iſt das Geſetz der Exponenten §. 1. für irgend eine Potenz der $1+x$ richtig, ſo gilt es auch für ihre nächſtfolgende Potenz, §. 3. Nun iſt daſſelbe für die 7 erſten Potenzen ausgemacht, §. 1, folglich gilt es für die 8te, folglich für die 9te, 10te u. ſ. w. für alle folgende Potenzen ohne Ende, und iſt alſo allgemein.

§. 5. Zuſ. 4. Der Coëfficient eines jeden Gliedes der höhern Potenz iſt die Summe der Coëfficienten deſſelben und des nächſtvorhergehenden Gliedes der nächſtniedrigern Potenz, d. i. wären in der nten Potenz zwey benachbarte Glieder $Qx^{r-1}+Rx^r$, ſo iſt in der $n+1$ten Potenz das rte Glied $(R+Q)x^r$.

§. 6.

§. 6. Anm. Das ote, 1te, 2te .... rte Glied soll heißen, worin o, 1, 2 .... r der Exponent von x ist. Ebendch sollen auch die Coefficienten benennt werden, daß 1, A_1, B_2, ...R_r der ote, 1te, 2te ...rte Coefficient heiße.

§. 7. Zus. 5. Ist bey irgend einer Potenz der erste und letzte Coëfficient die Einheit, so findet dieses bey jeder folgenden ohne Ende, folglich bey allen statt, §. 5. 3. 1.

§. 8. Zus. 6. Ist in der nten Potenz der 1te Coëfficient $=n$, so ist in der $n+1$ten Potenz der 1te Coëfficient $=n+1$, §. 5. 3. 1. d. i. in jeder Potenz ist der 1te Coëfficient oder allgemein A, dem Exponenten der Potenz gleich.

§. 9. Zus. 7. Nach §. 5. 1. ist der 2te Coëfficient der 2ten Potenz $=1$, der 3ten $=1+2$, der 4ten $=1+2+3$, der 5ten $=1+2+3+4$ u. s. w. Oder allgemein ist der 2te Coëfficient der nten Potenz $=1+2+3....+(n-1)$ so entsteht der 3te Coëfficient der $n+1$ten Potenz, wenn man zum 2ten Coëfficienten der nten Potenz ihren ersten Coëfficienten, der n ist, addirt, und ist also $=1+2....+(n-1)+n$. Nun gilt dies Gesetz für die sieben ersten Potenzen §. 1, folglich auch für die 8te Potenz u. s. w. ohne Ende, also für alle; d. i. in jeder nten Potenz ist der 2te Coëfficient, oder allgemein $B=1+2+3...,+n-1=\frac{n.n-1}{1.2}$ (Arithm. §. 340.)

§. 10. Zus. 8. Da $A=\frac{n}{1}$, $B=\frac{n.n-1}{1.2}$, §. 8. 9. so ließe sich hieraus vermuthen $C=\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.}$, $D=\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4.}$ u. s. w. folglich der rte Coëfficient $R=\frac{n.n-1,...n-(r-1)}{1.2.\quad\quad r}$, und der $r-1$te Coëfficient

$Q=\frac{n.n-1\ldots n-(r-2)}{1.\ 2.\qquad r-1}$, folglich $R=Q.\frac{n-(r-1)}{r}$.

Demnach wäre nach §. 5. der rte Coëfficient der n+1ten Potenz $R+Q=Q.\frac{n-(r-1)}{r}+Q=\left(\frac{n-(r-1)}{r}+1\right)Q=$

$\frac{n-(r-1)+r}{r}.Q=\frac{n+1}{r}.Q=\frac{n+1.n.n-1\ldots n.(r-2)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ r}$,

welches, wenn man $n+1=m$ setzt, wieder eben dieselbe Form für R giebt. Gilt also obiges Gesetz der Coëfficienten für irgend eine Potenz, so gilt es auch für die nächsthöhere. Nun gilt es nach §. 8. für die 7 ersten Potenzen, folglich auch für die 8te Potenz u. s. w. für alle.

§. 11. Zus. 9. Da n eine ganze positive Zahl ist, so ist der nte Coëfficient der letzte,

Denn setzt man in der Formel für R §. 10. $r=n$, so ist der nächstfolgende Coëfficient $S=R.\frac{n-r}{r+1}$, wo des Factors Zähler $n-r=0$ ist. Folglich ist auch $S=0$, und so auch jeder folgende Coefficient $=0$, weil er $S=0$ zum Factor hat.

§. 12. Zus. 10. Zu Gliedern, die von den äußersten x^o und x^n gleichweit abstehen, gehören stets einerley Coefficienten.

Denn es war §. 10. der rte Coefficient, der also zum r+1ten Gliede vom Anfang x^o an gehört, $R=\frac{n.n-1,\ldots(n-r+1)}{1.\ 2.\qquad r}$. Setzt man hierin $n-r$ anstatt r, so wird der letzte Factor $\frac{n-n+r+1}{n-r}$, d. i. $\frac{r+1}{n-r}$. Folglich wird der $n-r$te Coefficient, der zum $r+1$ten Glie-

de

de vom Ende x^a an gehört, $V=\frac{n.n-1....r+1}{1.\ 2.\ \ \ n-r}$. Setzt man nun $n>2r$ (damit man bey $n-r$ nicht auf das mittelste Glied stoße) so ist $n-r>r$, folglich auch $n-r+1>r+1$. Dies giebt $V=\frac{n.n-1..(n-r+1).n-r....r+1}{1.\ 2.\ \ \ r.\ \ r+1.....n-r}=$ $\frac{n.n-1....(n-r+1)}{1.\ 2.....\ \ r}=R$. Vergl. §. 1.

§. 13. Lehrs. Von einer zweytheiligen Wurzel $a+b$ ist jede Potenz eines ganzen bejahten Exponenten n, (d. i. $(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n.n-1}{1.\ 2.}a^{n-2}b^2+\frac{n.n-1.n.2}{1.\ 2.\ 3.}$ $a^{n-3}b^3....+b^n$.

Bew. Aus §. 2, 4. 10. hat man $(1+x)^n=1+\frac{n}{1}x+$ $\frac{n.n-1}{1.\ 2}x^2+\frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3.}x^3....+x^n$, oder, wenn man die Coefficienten nach der Ordnung A, B, C u. s. w. nennt, $(1+x)^n=1+Ax+Bx^2+Cx^3...+x^n$. Nun ist $(a+b)^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$. Setzt man also in obige Formel $\frac{b}{a}$ anstatt x, und multiplicirt sie mit a_n, so hat man

$(a+b)^n=a^n+Aa^n.\frac{b}{a}+Ba^n.\frac{b^2}{a^2}+Ca^n.\frac{b^3}{a^3}.....+$ $a^n\frac{b^n}{a^n}=a^n+Aa^{n-1}b+Ba^{n-2}b^2+Ca^{n-3}b^3...+b_n$,

welches, wenn man für A, B, C u. s. w. wieder ihre Werthe setzt, die Formel des Satzes giebt.

§. 14.

§. 14. Anm. 1. Von der zweytheiligen Wurzel, oder dem Binomium a+c, heißt dieser Satz der binomische Lehrsatz, theorema binomiale. Der gegebene Beweis ist vom Hrn. Hofr. Käſtner, welcher zuerſt bey Unterſuchung der Geſetze für Differenzen, Summen, figurirte Zahlen und Combinationen, das Binomium zum Grunde gelegt hat, anſtatt daß man vor ihm umgekehrt dieſen Lehrſatz aus jenen Unterſuchungen ableitete. Vergl. Deſſen Anfangsgründe der Analyſis endlicher Größen §. 734.

§. 15. Anm. 2. Uebrigens iſt aus der Führung des Beweiſes klar, daß der binomiſche Lehrſatz ſo lange nur auf ganze bejahete Exponenten eingeſchränkt ſey, bis ſeine Allgemeinheit für jeden andern Exponenten in der Folge bewieſen werden kann.

§. 16. Zuſ. 1. Nennt man das rte Glied $\varkappa$, und das nächſtfolgende λ, ſo iſt aus §. 10. $\varkappa = Ra^{n-r}b^r$, und $\lambda = \frac{n-r}{r+1} R.a^{n-r-1}b^{r+1} = \frac{n-r}{r+1} R.a^{n-r}.\frac{b}{a} = \frac{n-r}{r+1}\varkappa.\frac{b}{a}$.

Setzt man hienach die Glieder in §. 13. nach der Ordnung α, β, γ u. ſ. w. und $\frac{b}{a} = e$, ſo iſt $(a+b)^n = \alpha + \frac{n}{1}\alpha e + \frac{n}{2}\frac{n-1}{2}\beta e + \frac{n}{3}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}\gamma e + \frac{n}{4}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}\frac{n-3}{4}\delta e$ u. ſ. w. welches dient, jedes vorgegebene Binomium bequem zu berechnen.

Z. E. für $(\frac{1}{2}p+2q)^5$ iſt $a = \frac{1}{2}p$, $b = 2q$, $e = \frac{b}{a} = \frac{4q}{p}$, und $n = 5$, folglich

$$\alpha = (\tfrac{1}{2}p)^5 = \tfrac{1}{32}p^5$$

$$\frac{n}{1}\alpha e = \tfrac{5}{32}p^5 \cdot \frac{4q}{p} = \tfrac{5}{8}p^4 \cdot q$$

$$\frac{n-1}{2}\beta e = \tfrac{10}{8}p^4 \cdot q \cdot \frac{4q}{p} = 5p^3 \cdot q^2$$

$$\frac{n-2}{3}\gamma e = 5p^3 \cdot q^2 \cdot \frac{4q}{p} = 20p^2 \cdot q^3$$

$\frac{n-3}{4}de = \frac{1}{2}.20p^2.q^3.\frac{4q}{p} = 40p.q^4$

$\frac{n-4}{5}ee = \frac{1}{2}40p.q^4.\frac{4q}{p} = 32q^5$

$\frac{n-5}{6}\zeta e = 0\,\zeta$

§. 17. Zuſ. 2. Iſt b negativ, ſo ſind alle ungerade Potenzen von b negativ, (Ar. §. 302.) folglich für $(a-b)^n$ in der Formel §. 13. alle gerade Glieder negativ, folglich, wenn $\frac{b}{a} = e$, $(a-b)^n = a^n(1-Ae+Be^2-Ce^3+)$. Setzt man $a=b$, folglich $\frac{b}{a}$, d. i. $e=1$, ſo muß die in Parentheſi eingeſchloſſene Größe $=0$, folglich die Summe der negativen Glieder (oder der ungeraden Coëfficienten) der poſitiven Glieder (oder der geraden Coefficienten und der Einheit) gleich ſeyn. Z. E. für die 7te Potenz §. 1. iſt $7+35+21+1 = 1+21+35+7$.

§. 18. Zuſ. 3. Bedeutet $\sqrt{h}$ eine Irrationalzahl, deren Quadrat rational iſt, a und b aber Rationalzahlen, ſo iſt in jeder Potenz von $a+\sqrt{h}$, oder $a+b\sqrt{h}$, jedes ungerade Glied rational, und jedes gerade irrational. (Ar. §. 301.)

§. 19. Zuſ. 4. In jeder Potenz von $a+\sqrt{-f}$, oder $a+b\sqrt{-f}$, ſind alle ungerade Glieder reell, alle gerade aber eingebildet. (Ar. §. 510.)

§. 20. Zuſ. 5. Setzt man $p+q=a$ und $r=b$, ſo iſt $(p+q+r)^n = (p+q)^n + A(p+q)^{n-1}r + B(p+q)^{n-2}r^2 \ldots$

Auf ſolche Art läßt ſich auch die Potenz einer vier- und mehrtheiligen Wurzel finden, wenigſtens die Berechnung der nöthigſten Glieder davon anſtellen. Ob aber auch hiebey

bey ein allgemeines Geſetz ſtattfinde, und welches daſſelbe ſey, läßt ſich hier noch nicht beſtimmen.

2. Von den figurirten Zahlen.

§. 21. Erkl. Hängt von einer Reihe A das Geſetz (Ar. §. 196.) ab, wonach die Glieder einer andern Reihe B beſtimmt werden, ſo heißt jene eine Hauptreihe, ſeries primitiva, dieſe eine abgeleitete Reihe, derivata.

Z. E. Ar. §. 236. 254. ſind die Reihen der Quadrate und Würfel Hauptreihen, und die Reihen ihrer Unterſchiede abgeleitete Reihen.

§. 22. Erkl. Wird in einer Reihe A jedes Glied von dem folgenden ſubtrahirt, ſo erhält man eine Differenzreihe, ſeries differentialis, der erſten, zweyten, dritten u. ſ. w. Ordnung, je nachdem A eine Hauptreihe, oder Differenzreihe der 1, 2. u. ſ. w. Ordnung war.

Z. E. Ar. §. 254. giebt die Reihe der Würfel die erſte Differenzreihe, oder der erſten Ordnung, dieſe die zweyte Differenzreihe, oder der zweyten Ordnung, dieſe die dritte Differenzreihe, die aus lauter gleichen Gliedern beſteht.

Anm. Iſt die Hauptreihe eine arithmetiſche Progreſſion (Ar. §. 330.), ſo giebt die erſte Differenzreihe lauter gleiche Glieder. Iſt die Hauptreihe eine geometriſche Progreſſion (Ar. §. 396.) ſo ſind es auch alle Differenzreihen (Ar. §. 400.), auch machen die erſten Glieder dieſer Differenzreihen eine geometriſche Progreſſion. (Ar. §. 403.)

§. 23. Erkl. Eine Hauptreihe, von welcher man auf eine Differenzreihe kömmt, deren Glieder alle einander gleich ſind, heißt eine arithmetiſche Reihe vom erſten, zweyten, dritten u. ſ. w. Range je nachdem die erſten, zweyten, dritten Differenzen gleich ſind.

Z. E. Die arithmetiſche Progreſſion iſt eine arithmetiſche Reihe vom erſten Range, und heißt daher auch ſchlechthin eine arithmetiſche Reihe. Die Reihe der Quadrate (Ar. §. 236.) iſt eine arithmetiſche Reihe vom zweyten Range. Die Reihe der Würfel (Ar. §. 254.) iſt eine arithmetiſche Reihe vom dritten Range.

§. 24. Anm. Die Formeln für Differenzreihen, und die Glieder der Hauptreihe, und ſtrenge Beweiſe ihrer Allgemeinheit, findet man in Hrn. Hofr. Käſtners Anal. endl. Größen §. 724. 725.

Bedeuten nämlich △n die nte Differenzreihe, 1△n, 2△n u. ſ. w. die Folge der Glieder in derſelben, A, B, C u. ſ. w. die Binomialcoefficienten §. 10. nach der Reihe, y, y1, y2, ... yn die Glieder einer jeden Hauptreihe, ſo iſt die allgemeine Form

1) für die erſten Glieder der Differenzreihen $1\Delta n = yn - A.yn - 1 + B.yn - 2 - C.yn - 3$.

2) für die Glieder der Hauptreihe, durch lauter erſte Glieder der Reihen nach der Ordnung ausgedrückt,
$yn = y + A:1\Delta 1 + B.1\Delta 2 \ldots + R.1\Delta r + S.1\Delta r + 1 \ldots$

§. 25. Erkl. Wenn [illegible] Reihe A alle vorhergehende Glieder ſummirt, ſo erhält man eine ſummirte Reihe, ſeries ſummatrix, der erſten, zweyten, dritten u. ſ. w. Ordnung, je nachdem A eine Hauptreihe, oder ſummirte Reihe der 1. 2. 3ten u. ſ. w. Ordnung war. Die Glieder in einer ſummirten Reihe heißen die ſummirten Glieder, und ein Ausdruck für das gemeinſchaftliche Geſetz ihrer Summirung das ſummatoriſche Glied, terminus ſummatorius.

Z. E. Iſt die gegebene Reihe a, b, c, d, e, ... ihre ſummirte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ..... ſo muß ſeyn $\alpha = a$, $\beta = a+b$, $\gamma = a+b+c$, $\delta = a+b+c+d$ u. ſ. w.

Iſt die erſte Reihe eine arithmetiſche, ſo iſt das ſummatoriſche Glied der zweyten $= (2a+nd-d)\frac{n}{2}$ (Ar. §. 339.)

§. 26.

§. 26. Zuſ. Macht man von einer ſummirten Reihe eine Differenzreihe, ſo erhält man die gegebene, wenn man deren erſtes Glied $a=o$ ſetzt. Denn $\beta-\alpha=b$, $\gamma-\beta=c$ u. ſ. w. Demnach muß die erſte Differenzreihe der gegebenen die zweyte Differenzreihe der ſummirten, und ſo auch die zweyte der gegebenen die dritte der ſummirten u. ſ. w. werden.

§. 27. Erkl. Iſt die gegebene Hauptreihe §. 45. eine arithmetiſche Reihe von der Einheit an, ſo heißen die Glieder der ſummirten Reihen von jeder Ordnung figurirte Zahlen, und zwar die der erſten Polygonalzahlen, die der zweyten und folgenden aber Pyramidalzahlen der 1. 2. 3. u. ſ. w. Ordnung.

§. 28. Zuſ. 1. Folgende Tafel enthält demnach die allgemeine Darſtellung der figurirten Zahlen und Reihen:

	I.	II.	III.	IV.	V.
1	1	o	o	o	o
2	$1+d$	1	o	o	o
3	$1+2d$	$2+d$	1	o	o
4	$1+3d$	$3+3d$	$3+d$	1	o
5	$1+4d$	$4+6d$	$6+4d$	$4+d$	1
6	$1+5d$	$5+10d$	$10+10d$	$10+5d$	$5+d$

Nämlich die I. Columne, wo d ſowohl Null, als jede ganze Zahl bedeuten kann, iſt die Hauptreihe, die übrigen ſind die ſummirten Reihen, II. der erſten, III. der zweyten, IV. der dritten u. ſ. w. Ordnung, welche nach dem beſtimmten Geſetze entſtehen, daß jedes $r$te Glied einer jeden Columne die Summe von $r-1$ Gliedern der nächſtvorhergehenden iſt, oder allgemein, daß r Glieder der $m$ten Columne das $r+1$te Glied der $m+1$ten Columne

geben. Die zur Linken beygesetzten Ziffern dienen, die Glieder in den Reihen zu zählen, so daß z. E. das 5te Glied der III. Columne 6 + 4d, die Summe von 4 Gliedern der II. Columne ist.

§. 29. Zus. 2. Die II. Columne, oder die summirte Reihe der ersten Ordnung, enthält die Polygonalzahlen, welche, je nachdem von d der Werth 1, 2, 3, 4 u. s. w. ist, Triangular- Tetragonal- Pentagonal- Hexagonalzahlen u. s. w. heißen. Z. E. für d=1 enthält die II. Columne die Triangularzahlen 1, 3, 6, 10 u. s. w.

§. 30. Zus. 3. Die folgenden Columnen enthalten die Pyramidalzahlen, welche in Absicht auf die II. Columne (je nachdem diese Triangular- Tetragonal- Pentagonalzahlen u. s. w. enthält) 3, 4, 5seitige Pyramidenzahlen heißen, und zwar enthält die III. Columne Pyramidalzahlen der ersten Ordnung, die IV. Columne Pyramidalzahlen der zweyten Ordnung u. s. w.

§. 31. Zus. 4. Hienach ist also die II. Columne die 1te figurirte Reihe, die III Columne die 2te u. s. w. Diese Zahlen 1, 2 u. s. w. welche die figurirten Reihen zählen, heißen ihre Zeiger, indices. Für die Pyramidalzahlen ist also der Exponent ihrer Ordnung allemal der Zeiger weniger Eins. Auch sind in jeder figurirten Reihe soviele Glieder=0, als ihr Zeiger Einheiten enthält, folglich der mten Columne mtes Glied=1.

§. 32. Zus. 5. Setzt man in der Hauptreihe d=0, so wird aus der unbestimmten Darstellung §. 28. folgende bestimmte:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0
5	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0
6	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0
7	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0
8	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0
9	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0
10	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Nämlich hier enthält die I. Columne, oder die Hauptreihe, lauter gleiche Glieder, die II. Columne die natürlichen Zahlen, die III. die Triangularzahlen §. 29. die IV. die dreyseitigen Pyramidalzahlen §. 30. der ersten Ordnung u. s. w.

Diese Reihen hätte man auch unmittelbar, aus der hier angenommenen Hauptreihe, nach dem allgemeinen Gesetze §. 28. ableiten können.

§ 33. Anm. Unter figurirten Zahlen werden gewöhnlich blos die Zahlen § 32. verstanden. Diese sind von besonders häufigem und vortheilhaften Gebrauche. Herr Hofr. Kästner Anal. endl. Gr. giebt für sie zwey allgemeine Formeln §. 733. aus §. 725. abgeleitet.

Bedeutet nämlich y_n das $n+1$te Glied der $m$ten Columne §. 32. so ist

$$y_n = \frac{n.n-1....(n-m+2)}{1.n. \quad .... \quad m+1}$$

Z. E. für $m=4$, und $n=9$, ist das 10te Glied der IV. Columne $= \frac{9.8.7.}{1.2.3.} = 84$.

In dieser Formel sind die Glieder vom Anfange an gezählt. Will man aber blos die wirklichen Glieder, d. i. solche, die wirkliche Zahlen enthalten, zählen, so ist das rte wirkliche Glied der mten Columne =

$$\frac{(m+r-2).m+r-3).....r}{1. \quad 2. \quad m-1.}$$

Setzt man in dieser Formel für m nach und nach die Zahlen 2, 3, 4 u. s. w. so giebt sie das rte wirkliche Glied der 1. 2. 3ten u. s. w figurirten Reihe. Z. E.

m	
2	r
3	$\frac{(r+1)r}{1. \quad 2}$
4	$\frac{(r+2)(r+1)r}{1. \quad 2 \quad 3}$
5	$\frac{(r+3)(r+2)(r+1)r}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4}$
6	$\frac{(r+4)(r+3)(r+2)(r+1)r}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5}$ u. s. w.

3. Von den Permutationen und Combinationen.

§. 34. Aufg. Die Zahl aller möglichen Versetzungen oder Permutationen einer gegebenen Menge von Dingen zu finden.

Auflös. 1) Kömmt zu einem Dinge a ein zweytes b hinzu, so kann es zwey Stellen (hinten und vorn) einnehmen; also haben 2 Dinge 2 Ordnungen ab, ba. Kömmt dazu das dritte c, so kann es in jeder der beiden Ordnungen 3 Stellen einnehmen (hinten, in der Mitte, und vorn), also haben 3 Dinge 3. 2=6 Ordnungen. Kömmt dazu das 4tes d, so kann es in jeder dieser 6 Ordnungen 4 Stellen einnehmen, (vorn zwischen den beiden ersten, zwischen

a.	
ab.	ba
abc.	acb. cab
bac.	bca. cba

den

den beiden letzten, und hinten), also haben 4 Dinge 4. 3. 2=24 Ordnungen, u. s. w.

2) Wäre dies allgemein, so wäre für n — 1 Dinge die Zahl der Ordnungen = n — 1. n — 2..... 3. 2. 1. Gesetzt dies wäre für n — 1 Dinge wahr, und es kömmt das ate Ding hinzu, so kann es in jeder dieser Ordnungen n — 2 Zwischenstellen und zwey äußere, also überhaupt n Stellen einnehmen, wodurch jene Zahl durch n vervielfältigt wird. Ist daher jene Zahl für n — 1 Dinge wahr, so ist für n Dinge die Zahl n. n — 1. n — 2..... 3. 2. 1. wahr, und giebt dasselbige Gesetz.

3) Nun gilt dieses Gesetz für 4 Dinge nach num. 1. Folglich gilt es auch für 5, folglich für 6 u. s. w. ohne Ende, folglich für jede gegebene Menge von Dingen.

Hienach ist z. E. die Zahl der Versetzungen für die 5 Vocalen = 5. 4. 3. 2. 1. = 120, für die 8 Töne in der Musik = 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1. = 40320.

§. 35. Zus. Wären unter diesen n Dingen m Dinge einerley, so würden unter der §. 34. berechneten Menge der Ordnungen so viele einerley seyn, als die Menge der Ordnungen für m Dinge beträgt. Daher muß jene Menge mit dieser dividirt werden. Dies giebt die Zahl der wirklich verschiedenen Ordnungen von n Dingen, worunter m Dinge einerley sind.

$$\frac{1.2.3.4.\ldots m.\ m+1.\ m+2.\ldots n}{1.2.3.4.\ldots m} = m+1.\ m+2.\ldots n$$

Nach eben den Gründen verfährt man, wenn unter den n Dingen ein Ding m mal, ein andres p mal, ein drittes t mal vorkömmt, da dann die Zahl der verschiedenen Ordnungen ist:

n.n — 1.n — 2 2. 1

m.m — 1.... 2. 1. p.p — 1.... 2. 1. t.t — 1.... 2. 1

Z. E. Das Wort ſtudioſus hat 9 Buchſtaben, worunter 3 ſ und 2 u. Demnach iſt die Zahl der Verſetzungen oder Anagrammen dieſes Wortes $= \frac{9.8.7.6.5.4.3.2.1.}{3.2.1.\ 2.1.} = 30240.$

§. 36. Erkl. Nimmt man aus einer gegebenen Menge von Dingen ſoviele Paare, Dreyen, Vieren, Fünfen u. ſ. w. als ſich thun läßt, ſo nennt man ſie Amben, Ternen, Quaternen, Quinen u. ſ. w. oder Combinationen, Conternationen, Conquaternationen, Conquinationen u. ſ. w. oder überhaupt Verbindungen, und gemeiniglich Combinationen nach 2, 3, 4, 5 u. ſ. w.

Anm. Hiebey ſetzen wir voraus, daß die gegebenen Dinge alle verſchieden ſind, und nehmen auch keine Rückſicht auf die verſchiedenen Verſetzungen der Dinge, ſo daß wir bey den Amben, ab und ba nur für eine anſehen. Der folgende Vortrag iſt aus Hrn. Hofr. Käſtners Anal. endl. Größen §. 735-740.

§. 37. Zuſ. Wären 5 Dinge abcde gegeben, ſo findet man für ſie folgende Verbindungen:

	A	B	C	D	E
1	a	o	o	o	o
2	b	ab	o	o	o
3	c	ac. bc	abc	o	o
4	d	ad. bd. cd	abd. acd. bcd	abcd	o
5	e	ae. be. ce. de	abe. ace. bce ade. bde. cde	abce. abde acde. bcde	abcde

Die Ziffern nämlich bedeuten die Menge der Dinge, die Columne A enthält die einzelnen Dinge, B die Amben, C die Ternen, D die Quaternen, E die Quinen.

1) die

1) die Amben. Ein Ding a giebt o Paare. Ein 2tes Ding b giebt mit dem vorigen 1 Paar. Ein 3tes c giebt mit jedem der beiden vorigen ein neues Paar, und so auch ein 4tes d mit jedem der 3 vorigen u. s. w. Folglich allgemein: Zu den Paaren, die n Dinge geben, kommen für ein neues Ding das n+1te Glied der Columne B noch n neue Paare, deren Zahl also der Zahl der n Dinge gleich ist.

Vergleicht man daher die Columnen A, B, mit den Columnen I, II. §. 32, so ist das nte und n+1te Glied in beiden einerley. Folglich ist die Menge der Amben aus n Dingen der Summe von n Gliedern der Columne II, d. i. dem n+1ten Gliede der Columne III gleich, folglich $= \frac{n.n-1}{1.2}$. §. 33.

	I	II	III	IV
1	1	0	0	0
2	1	1	0	0
3	1	2	1	0
4	1	3	3	1
5	1	4	6	4

2) die Ternen. Bringt man zu jeder Ambe aus 2 Dingen das 3te c, so hat man die Menge der Ternen aus 3 Dingen, oder das 3te Glied der Columne C, worin c zum erstenmale vorkömmt, (da es in den folgenden Ternen wieder mit vorkömmt). Bringt man zu jeder Ambe aus 3 Dingen das 4te d, so hat man die Menge der Ternen aus 4 Dingen, oder das 4te Glied der Columne C, worin d zum erstenmale vorkömmt. Bringt man zu jeder Ambe aus 4 Dingen das 5te e, so hat man die Menge der Ternen aus 5 Dingen, oder das 5te Glied der Columne C, worin e zum erstenmale vorkömmt.

Demnach ist die Menge im 3, 4, 5ten Gliede der Columne C und III. sich gleich. Und dies ist allgemein. Denn wenn man zu jeder der Amben aus n — 1 Dingen das nte bringt, so hat man die Menge der Ternen aus n Dingen, oder das nte Glied der Columne C, welches dem mten Gliede der Columne III. gleich ist. Folglich ist die Menge der

Menge der Ternen aus n Dingen ſo groß, als die Summe von n Gliedern der Columne III, oder als das n+1te Glied der Columne IV, folglich $\frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3.}$. §. 33.

Z. E. in den 5 Dingen (Ar. §. 342.) ſtecken $\frac{5.4.3}{1.2.3}$, d. i. 10 Ternen, die am angeführten Orte angegeben ſind.

3) die Quaternen. Nach ähnlichen Schlüſſen iſt ihre Menge $= \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$.

4) Der Quinen Menge iſt $= \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$

§. 38. **Aufg.** Es ſind n Dinge vorhanden; man ſoll die Menge ihrer Verbindungen nach der Zahl m finden.

Auflöſ. 1) Von n Dingen, abc.... gh, kommen, wenn man die Tafel §. 37. fortgeſetzt ſich gedenkt, die Verbindungen nach 2 in der 2ten Columne, nach 3 in der 3ten, und überhaupt nach m in der mten Columne vor. Demnach enthält der m—1ten Columne ntes Glied die Verbindungen nach m—1, worin das nte Ding h zuerſt vorkömmt, §. 37, oder überhaupt ihr unbeſtimmtes rtes Glied, die Verbindungen nach m—1, worin von den n Dingen das rte zuerſt vorkömmt.

2) Nun nehme man an, die Anzahl in dieſem rten Gliede ſey ſo groß, als das rte Glied der m—1ten Columne §. 32. Bringt man nun zu jeder der Verbindungen nach m—1 aus r Dingen noch das r+1te Ding, ſo erhält man die Verbindungen nach m aus r+1 Dingen, worin

das

das r+1te Ding zum erstenmale vorkömmt, folglich das r+1te Glied der mten Columne §. 37, und dieser Verbindungen sind so viele, als es zusammen Verbindungen nach m — 1 aus r Dingen in der vorhergehenden Columne gab, d. i. soviel die Summe von r Gliedern der m — 1ten Columne §. 32. beträgt, welche dem r+1ten Gliede der mten Columne §. 32. gleich ist.

3) Gilt also das angenommene Gesetz (daß die Menge von Verbindungen nach m in dem rten, d. i. in jedem Gliede der mten Columne §. 37. so groß ist, als das eben soviele Glied der mten Columne §. 32.) von irgend einer Columne, so gilt es auch von jeder zunächst folgenden.

Nun ist dieses Gesetz von der 3ten Columne, also für m=4 bewiesen worden, §. 37. Folglich gilt es auch für m=5 u. s. w. ohne Ende.

4) Demnach ist die Menge der Verbindungen nach m von n Dingen der Summe von n Gliedern der mten Columne §. 32, oder dem n+1ten Gliede der m+1ten Columne daselbst gleich, folglich, wenn man in der Formel für yn §. 33, m+1 anstatt m setzt, $= \frac{n.n-1.....(n-m+1)}{1.\ 2.\ \ \ \ m}$.

§. 39. Exempel. Beym Lombrespiel kann jeder der drey Spieler beym Chartengeben so viele verschiedene Spiele bekommen, als 40 Charten Combinationen nach 9 geben, d. i. $\frac{40.39.....32}{1.\ 2\ .....\ 9}$ = 273 438 880, so daß niemals alle 9, die er einmal bekömmt, mit allen 9, die er ein andermal bekömmt, einerley sind. Die gefundene Zahl muß noch mit 3 multiplicirt werden, weil eben die Charten ein andres Spiel geben, nachdem es in der 1. 2. 3. Hand ist.

Die Wahrscheinlichkeit, ob unter den gegebenen Charten beide Aß sind, findet man aus Vergleichung der Ambey, welche alle 40 Charten, und derer, welche 9 Charten, die man in Hän-

den

ben hat, geben. Diese sind $\frac{9.8}{1.2}=36$, jene $\frac{40.39}{1.2}=780$. Hienach ist die Wahrscheinlichkeit 36:780 oder 1:21$\frac{1}{3}$, also etwa $\frac{1}{21}$.

Hat man die beiden Aß nicht bekommen, und verlangt sie zu kaufen, so beruhet dies

a) auf der Wahrscheinlichkeit, daß sie sich unter den 13 liegenden Blättern befinden. Da man sie nicht unter den 9 in der Hand hat, so müssen sie unter den übrigen 40−9 oder 31 Charten seyn, wovon 13 liegen geblieben. Nun ist $\frac{31.30}{1.2}=465$, und $\frac{13.12}{1.2}=78$. Folglich ist obige Wahrscheinlichkeit $=\frac{78}{465}$.

b) auf der Wahrscheinlichkeit, daß sie sich unter den n obern Charten, die man kauft, befinden. Nun ist die Menge der Amben in den n obern Charten $\frac{n.n-1}{1.2}$ und in den 13 liegenden $\frac{13.12}{1.2}=78$. Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{n.n-1}{1.2}$. Z. E. wenn man 6 Charten kauft, $\frac{6.5}{1.2}$ oder höchstens 9 Charten, $\frac{9.8}{1.2}$.

c) auf der Zusammensetzung beider, da dann die ganze Wahrscheinlichkeit $=\frac{n.n-1}{1.2}\cdot\frac{78}{465}$ ist. Jedoch geht diese Rechnung blos auf den Fall, wenn man zuerst kauft.

§. 40. Anm. Combinationen, worin nicht nur Versetzungen stattfinden, sondern auch einerley Buchstabe mehreremal vorkommen soll, (nämlich in den Amben doppelt, in den Ternen doppelt und dreyfach, u. s. w.) sollen hier blos durch ein Paar Exempel erläutert werden.

1) Die Zahl der Schlußarten, modi syllogismorum. Nämlich die 4 Arten der Sätze, a, e, i, o, geben 16 Amben zu Prämissen,

missen, welche man erhält, wenn man jeden der 4 Buchstaben mit allen vieren paart. Von diesen Prämissen sind ee, eo, ii, io, oe, oi, oo untauglich, weil sie entweder blos particulär, oder blos verneinend sind. Die übrigen geben, weil sich die Conclusion nach dem schwächern Theile richtet, die Schlußarten: aaa, aee, aii, aoo, eae, eio, iai, ieo, oao, wozu noch aeo, aai, eao kommen.

aa, ae, ai, ao
ea, ee, ei, eo
ia, ie, ii, io
oa, oe, oi, oo

2) In dem decadischen Zahlsysteme werden von den 10 Zahlzeichen, die Null mitgerechnet, alle mögliche Combinationen gemacht. Vergl. Hrn. Prof. Hindenburg novi systematis permutationum, combinationum ac variationum primae lineae etc. Lipsiae 1781. 4. Einfache Zahlen sind nur 9, weil 0 nichts gilt. Für die Amben setze man den 10 Zahlzeichen ein jedes vor, dies giebt 10. 10 Amben, und weil die Null vorn nichts gilt, nur 9. 10 = 90. Für die Ternen setze man den 100 Amben jedes Zahlzeichen vor; dies giebt 10. 100 Ternen, und weil die 0 vorn nichts gilt, nur 9. 100 = 900. Für die Quaternen setze man den 1000 Ternen jedes Zahlzeichen vor; dies giebt 10. 1000, und wegen der 0, nur 9. 1000 = 9000 u. s. w.

Der

Der zweyte Abschnitt.

Von den Gleichungen.

1. Ordnungen der Gleichungen.

§. 41. Aufg. Eine rationale bestimmte Gleichung (Alg. §. 33.) zu ordnen, und sie unter den kürzesten Ausdruck, ihre allgemeine Form, zu bringen.

Aufl. 1) Man bringe die Gleichung auf Null. (Alg. §. 8.)

2) Ist die unbekannte Größe ein Divisor, so bringe man sie aus dieser Stelle, (Alg. §. 9.)

3) Alle Glieder, die einerley Potenz der unbekannten Größe enthalten, setze man zusammen, und bringe ihre Coefficienten in eine Summe, (Ar. §. 147.) Eben so setze man die Summe aller bekannten Glieder als ein Glied an, oder betrachte es als den Coefficienten von x^0.

4) Das Glied mit der höchsten Potenz setze man voran, und lasse die andern nach der Ordnung der Exponenten folgen.

5) Hat das höchste Glied einen Coefficienten als Factor (oder Divisor), so dividire (oder multiplicire) man die Gleichung mit solchem Coefficienten, (Alg. §. 5.)

6) Hat

6) Hat das höchſte Glied das Zeichen —, ſo verändere man die Zeichen aller Glieder in die entgegengeſetzten, (Alg. §. 7.)

7) Sind nach dieſer Anordnung zuſammengeſetzte Coefficienten vorhanden, ſo ſetze man für jeden einen einzelnen Buchſtaben, der poſitiv oder negativ genommen wird, je nachdem der zugehörige Coefficient poſitiv oder negativ iſt.

Z. E. Aus der Gleichung $\frac{n}{x} - c = 5ax + \frac{dh}{x}$, wird $\frac{n}{x} - c - 5ax - \frac{dh}{x} = o$, oder $n - cx - 5ax^2 - dh = o$, oder $-5ax^2 - cx + n - dh = o$, oder $-x^2 - \frac{c}{5a}x + \frac{n-dh}{5a} = o$, oder $x^2 + \frac{c}{5a}x + \frac{dh-n}{5a} = o$, oder $x^2 + px + q = o$.

§. 42. Erkl. Eine rationale beſtimmte Gleichung heißt von demjenigen Grade oder der Ordnung, wovon nach geordneter Gleichung der höchſte Exponent der unbekannten Größe iſt; insbeſondere aber vom 2, 3, 4ten und höhern Grade, oder eine quadratiſche, cubiſche, biquadratiſche und höhere Gleichung, wenn 2, 3, 4 u. ſ. w. der höchſte Exponent der unbekannten Größe iſt.

§. 43. Zuſ. 1. Die allgemeine Form der quadratiſchen Gleichung iſt $x^2 + px + q = o$, der cubiſchen $x^3 + px^2 + qx + r = o$, der biquadratiſchen $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + t = o$, der von der nten Ordnung $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots + Q = o$.

§. 44.

§. 44. Zuſ. 2. Iſt einer der Coëfficienten Null, ſo heißt die Gleichung **unvollſtändig**, ſonſt aber **vollſtändig**, completa. Im erſten Falle, wo ein ſolches Glied wegfällt, pflegt man es durch ein (*) zu bezeichnen, um die Zahl der Glieder nicht zu ändern. Hienach hat alſo jede Gleichung von der nten Ordnung $n+1$ Glieder, weil alle Exponenten von n bis auf o genommen oder gedacht werden müſſen.

§. 45. Anm. 1. Eine Gleichung, die mehrere unbekannte Größen enthält, erhält ihre Benennung nicht blos von den Exponenten dieſer Größen, ſondern auch von den Dimenſionen, zu denen ihre Producte ſteigen. Z. E. $ax+by+xy+c=o$ iſt eine Gleichung vom zweyten Grade oder Dimenſion. Solche Gleichungen werden nach einer der unbekannten Größen geordnet, indem man die übrigen als bloße Coefficienten betrachtet. Z. E. $x^2+byx+cy=o$.

§. 46. Anm. 2. Bey einer Gleichung, die auf ihre allgemeine Form gebracht iſt, kommen zwey Stücke in Betracht: theils die Coefficienten, theils die Exponenten der unbekannten Größe, welche insbeſondere die Form oder Geſtalt der Gleichung ausmachen. Der höchſte Exponent der unbekannten Größe heißt der Exponent der Ordnung, oder der Grad einer Gleichung. Eine Gleichung heißt niedriger als die andre, wenn ihr Grad kleiner iſt, wonach ſie dann auch um 1, 2, 3 u. ſ. w. Grad niedriger genannt wird.

§. 47. Aufg. Aus zwey rationalen höhern Gleichungen, deren jede zwey unbekannte Größen x, y, enthält, eine dritte zu machen, die wenigſtens um einen Grad niedriger ſey.

Auflöſ. I. Wenn beide nach x oder y §. 45. geordnete Gleichungen von gleichem Grade ſind. Z. E.

$$x^5-y^2x^4+y^3x=o, \text{ und } \frac{x^5}{y^2}-y^2x^3+p=o.$$

Man ſuche die Werthe der höchſten Potenz aus beiden

den Gleichungen, ſetze ſie einander gleich, und ordne die neue Gleichung.

Hienach iſt $x^5 = y^2x^4 - y^3x = y^4x^3 - py^2$, folglich $x^4 - y^2x^3 - y^3 + py^2 = o$, wo x um einen Grad niedriger iſt.

II. Wenn ſie von ungleichem Grade ſind, z. E.

$\frac{y^3}{x} - xy + x = o$, und $y^5 - x^3y^4 + q = o$.

Man multiplicire die erſte Gleichung mit derjenigen Potenz von y, wodurch ſie ſo hoch als die zweyte wird, $y^5 - x^2y^3 + xy = o$, und verfahre nunmehr wie im erſten Falle.

Hienach iſt $y^5 = x^3y^4 - q = x^2y^3 - xy$, folglich $y^4 - \frac{y^3}{x} + \frac{y}{x^2} - q = o$, wo y um einen Grad niedriger iſt.

Anm. Man ſieht leicht ein, daß es auf die nach dem erſten folgenden Glieder der gegebenen Gleichungen ankomme, um wie viel die neue Gleichung niedriger werde.

§. 48. Aufg. Aus zwey rationalen Gleichungen, deren jede zwey unbekannte Größen x, y, mit beliebigen Exponenten enthält, die eine zu eliminiren. (Vergl. Alg. §. 23.)

Auflöſ. I. Wenn in beiden Gleichungen die zu eliminirende Größe nur in der erſten Potenz iſt.

Z. E. $x + y = a$; $cx + dy = b$.

Man multiplicire mit dem Coefficienten, den die zu eliminirende Größe in der zweyten Gleichung hat, die erſte Gleichung, und ſubtrahire davon die zweyte. Hienach iſt

$dx + dy = da$	$cx + cy = ca$
$cx + dy = b$	$cx + dy = b$
$dx - cx = da - b$	$cy - dy = ca - b$

Hat aber die zu eliminirende Größe in beiden Gleichungen einen Coefficienten, so multiplicire man jede Gleichung mit dem Coefficienten, den solche Größe in der andern Gleichung hat. Z. E. Es sey $mx+ny=a$; $cx+dy=b$: so erhält man

$mdx+ndy=da$	$mcx+ncy=ac$
$cnx+ndy=nb$	$mcx+mdy=mby$
$(md-cn)x=da-nb$	$(nc-md)y=ac-mbx$

II. Wenn blos in der einen Gleichung voriges statt findet. Z. E. $ax+by+c=o$ und $dx^2+ex+fy^2+gy+hxy+m=o$.

Aus der ersten Gleichung suche man den Werth von $y=\frac{-ax-c}{b}$, und setze ihn anstatt y in die zweyte Gleichung, so erhält man

$$dx^2+ex+f\left(\frac{-ax-c}{b}\right)^2+(g+hx)\left(\frac{-ax-c}{b}\right)+m=o.$$

III. Wenn in beiden Gleichungen A, B, die zu eliminirende Größe y, nach welcher die Gleichungen geordnet sind, die erste Potenz beliebig übersteigt.

Die Gleichungen A, B, mögen gleich hoch oder die eine A höher seyn, so erhält man nach §. 47. eine dritte Gleichung C, die wenigstens um einen Grad niedriger als A ist. Aus C und der niedrigsten B mache man wiederum nach §. 47. eine vierte Gleichung D, und setze dies so lange fort, bis man auf eine Gleichung P vom ersten Grade kömmt, aus der man mit B verglichen, nach dem zweyten Falle, eine Gleichung Q herleitet, worin nur die andre unbekannte Größe x befindlich ist.

§. 49. Anm. 1. Hiebey ist es am bequemsten, die Gleichungen so zu ordnen, daß immer die höchste Potenz positiv und ohne

Coefficienten allein auf einer Seite der Gleichung stehe. Exempel und allgemeine Formeln hievon findet man in Newtoni arithmetica vniuersali ed. Greavesiande p. 60 63. ed. Castilionei p. 99 106. Hier mag ein Exempel zur Erläuterung genügen.

Es sey A) $y^2 = xy^2 + 3x$. B) $y^2 = x^2 - xy - 3$. Letztere Gleichung mit y multiplicirt, giebt $y^3 = x^2y - xy^2 - 3y$, folglich $xy^2 + 3x = x^2y - xy^2 - 3y$, oder C) $y^2 = \frac{x^2y - 3y - 3x}{2x}$.

Aus B und C erhält man P) $x^2 - xy - 3 = \frac{x^2y - 3y - 3x}{2x}$, folglich $2x^3 - 2x^2y - 6x = x^2y - 3y - 3x$, oder $2x^3 - 3x = (2x^2 - 3)y$, woraus man den Werth von y bestimmt, der in die Gleichung B gebracht, die Gleichung Q) $x^6 + 18x^4 - 45x^2 + 27 = 0$ giebt, die nur x enthält.

§. 50 Anm. 2. Hat man zwey höhere Gleichungen für eine unbekannte Größe, so kann man sie gleichfalls nach obiger Methode finden. Z. E. Es sey

A) $x^3 = dx^2 + bx + a$. B) $x^3 = ex^2 + fx + c$. Hieraus folgt $ax^2 + bx + a = dx^2 + ex + f$, d. i. C) $x^2 = \frac{ex + f - bx - a}{a - d}$, folglich

D) $x^3 = \frac{ex^2 - bx^2 + fx - cx}{a - d}$. Diese mit A verglichen, giebt

E) $ax^2 + bx + c = \frac{ex^2 - bx^2 + fx - cx}{a - d}$. Hieraus findet man den Werth von x^2, welchen man dem Werthe von x^2 in C verglichen, eine einfache Gleichung für x giebt.

§. 51. Zuſ. 1. Hat man drey Gleichungen A, B, C, deren jede drey unbekannte Größen x, y, z enthält, so kann man aus A und B eine neue D, und aus A und C eine neue E machen, die nur x, y enthalten, und hierauf aus D, E eine neue F, die nur x enthält. Demnach lassen sich aus drey Gleichungen zwey unbekannte Größen wegschaffen, daß man nur eine bestimmte Gleichung erhält.

§. 52. Zuſ. 1. Hat man vier Gleichungen mit vier unbekannten Größen, so kann man die erste nach und nach

mit jeder der drey übrigen verbinden, und dadurch drey Gleichungen erhalten, worin nur drey unbekannte Größen sind, welches wieder den vorigen Fall §. 51. giebt.

§. 53. Zuſ. 3. Allgemein lassen sich also aus n Gleichungen n — 1 unbekannte Größen wegschaffen. Denn wenn dergleichen von der um 1 mindern Zahl von Gleichungen wahr ist, so muß es auch von n Gleichungen wahr seyn, weil sich dieser Fall immer auf den vorigen bringen läßt, §. 52. Nun ist es von drey Gleichungen wahr, §. 51, folglich auch von 4, 5 u. s. w. ohne Ende.

§. 54. Zuſ. 4. Sind für n unbekannte Größen eben so viele verschiedene Gleichungen gegeben, so lassen sich n bestimmte Gleichungen finden, deren jede eine dieser unbekannten Größen, welche man will, enthält, und für sie einen oder mehrere gewisse Werthe in sich schließt (Alg. §. 70.) Solche Werthe giebt es also für alle diese unbekannten Größen, und man kann so viele Größen als unbekannt annehmen, als Gleichungen für sie gegeben sind.

§. 55. Aufg. Die Wurzelgrößen aus einer Gleichung wegzuschaffen, oder die Gleichung rational zu machen.

Auflös. 1. Ist nur ein Wurzelzeichen vorhanden, so erhebe man die Gleichung, nachdem das Glied mit dem Wurzelzeichen allein auf eine Seite gebracht worden ist, auf die Potenz des Wurzelexponenten. In einigen Fällen kann durch Wiederholung dieser Operation auch mehr als ein Wurzelzeichen weggeschafft werden. Z. E.

1) $a\sqrt[m]{x} = q$, auf die mte Potenz erhoben, giebt $a^m x = q^m$.

2) $a\sqrt[m]{x} = b\sqrt[n]{y}$, auf die mte Potenz gebracht, giebt $a^m x = b^m \sqrt[n]{y^m}$, und diese zur nten Potenz, $a^{mn} x^n = b^m y^m$.

3) x

3) $x-a=\sqrt{(y\sqrt{c}+b)}$ giebt $(x-a)^2=b+y\sqrt{c}$, oder $(x-a)^2-b=y\sqrt{c}$, folglich $[(x-a)^2-b]^2=y^2c$.

4) $x-m=\sqrt[3]{[a+c\sqrt{(x+\sqrt{ex})}]}$ giebt $(x-m)^3=a+c\sqrt{(x+\sqrt{ex})}$ oder $(x-m)^3-a=c\sqrt{(x+\sqrt{ex})}$, folglich $[(x-m)^3-a]^2=c^2(x+\sqrt{ex})$ oder $[(x-m)^3-a]^2-c^2x=c^2\sqrt{ex}$, da dann durch Erhebung der Gleichung in die 2te Potenz auch das letzte Wurzelzeichen wegfällt.

5) $\sqrt[3]{x}=a+\sqrt{y}$ giebt $x=a^3+3a^2\sqrt{y}+3ay+y\sqrt{y}$, oder $x-a^3-3ay=(3a-y)\sqrt{y}$, folglich $(x-a^3-3ay)^2=(3a-y)^2.y$.

II. In allen Fällen setze man jedes Glied, welches eine Wurzelgröße enthält, einer unbekannten Größe gleich, und mache jede dieser Gleichungen nach der ersten Auflösung rational. Aus dem Erhaltenen eliminire man nach §. 48. die eingeführten unbekannten Größen, um auf eine einzige Gleichung zu kommen, welche die verlangte ist.

Z. E. Ist $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=x$ gegeben, so setze man $\sqrt[3]{a}=y$, und $\sqrt[3]{b}=z$, da man dann die drey Gleichungen hat: A) $y+z=x$, B) $a=y^3$, C) $b=z^3$. Aus A erhält man $y=x-z$. Dieser Werth in B gesetzt giebt D) $a=x^3-3x^2z+3xz^2-z^3$, oder, wenn man aus C den Werth für z^3 setzt, $z^3-\frac{3x^2z+x^3+b-a}{3x}=0$, oder E) $z^2=xz-\frac{1}{3}x^2+\frac{b+a}{3x}$, und mit z multiplicirt, $z^3=xz^2-\frac{1}{3}x^2z+\frac{b+a}{3x}z=b$, wegen C. Folglich $z^2=\frac{1}{2}xz-\frac{b+a}{3x^2}z-\frac{b}{x}=xz-\frac{1}{3}x^2+\frac{b+a}{3x}$, wegen E. Hieraus wird $z=$

$\left(\frac{b}{3}-\frac{1}{3}x+\frac{b+a}{3x}\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{b+a}{3x^2}=x\right)$. Setzt man diesen Werth von z in eine der vorigen Gleichungen, z. E. in D, so erhält man eine Finalgleichung, welche nur die Größen der anfangs gegebenen Gleichungen, und zwar ohne Wurzelzeichen enthält.

§. 56. Anm. 1. Man nennt zwar eine bestimmte Gleichung schon rational, wenn nur die unbekannte Größe x vom Wurzelzeichen frey gemacht ist (Alg. §. 332.) z. E. $x^2-2x\sqrt{3}+4=0$, und benennt sie auch wohl nach der höchsten Potenz von x, weil sie auch so behandelt werden kann; aber im Grunde ist sie von einem höhern Grade, den man findet, wenn man auch die bekannten Größen vom Wurzelzeichen befreyet. Denn vorige Gleichung giebt $x^2+4=2x\sqrt{3}$, folglich $(x^2+4)^2=4x^2.3$, d. i. $x^4+8x^2+16=12x^2$, oder $x^4-4x^2+16=0$.

§. 57. Anm. 2. Aus Obigem erhellet also, wenn man so viele Gleichungen als unbekannte Größen hat, daß man daraus allemal eine bestimmte rationale Gleichung erhalten könne. Demnach ist es verstattet, die folgenden Untersuchungen blos auf bestimmte rationale Gleichungen einzuschränken.

2. Zergliederung der Gleichungen.

§. 58. Erkl. Eine Größe, wie $x-a=P$, $x-b=Q$, $x-c=R$, $x-d=S$, u. s. w. die nur x von der ersten Abmessung und mit dem Coefficienten 1 enthält, heißt ein einfacher Factor.

§. 59. Aufg. Die Producte aus 2, 3, 4 u. s. w. einfachen Factoren (§. 58.) darzustellen.

Auflös. Man multiplicire P mit Q, das Product PQ mit R, das Product PQR mit S u. s. w. so hat man

x^2

$$\left.\begin{matrix} x^2 \\ \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -a \\ -b \end{matrix}\right\} x + ab = PQ$$

$$\left.\begin{matrix} x^3 \\ \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -a \\ -b \\ -c \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x^2 \\ \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} +ab \\ +ac \\ +bc \end{matrix}\right\} x - abc = PQR$$

$$\left.\begin{matrix} x^4 \\ \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -a \\ -b \\ -c \\ -d \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x^3 \\ \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} +ab \\ +ac \\ +bc \\ +ad \\ +bd \\ +cd \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x^2 \\ \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -abc \\ -abd \\ -acd \\ -bcd \end{matrix}\right\} x + abcd = PQRS \text{ u. s. w.}$$

§. 60. Zus. 1. So wie jedes dieser Producte mit einem neuen Factor multiplicirt wird, so steigt x auch um einen Grad höher, daß also der Exponent von x in jedem Producte der Zahl seiner Abmessungen gleich ist.

§. 61. Zus. 2. Eine Gleichung wie $x^2 + Ax + B = V$, oder $x^3 + Cx^2 + Dx + E = W$, kann als ein Product von so vielen einfachen Factoren, als Einheiten der höchste Exponent von x hat, angesehen werden. Denn vergleicht man sie mit PQ und PQR §. 59, so ist

1) $A = -a - b$, $B = ab$, da man dann nur zwey Gleichungen, also nur zwey Größen bestimmen kann.

2) $C = -a - b - c$, $D = ab + ac + bc$, $E = -abc$, wo nur drey Gleichungen sind, also nur drey Größen bestimmt werden können.

§. 62. Zus. 3. Wird von diesen einfachen Factoren einer $= 0$, so wird auch das Product $= 0$, und giebt eine auf Null gebrachte Gleichung, von dem Grade, von dem das Product ist. Nämlich ein solches Product $= 0$ gesetzt, wird eine quadratische, cubische u. s. w. Gleichung, je nachdem es 2, 3 u. s. w. Abmessungen hat.

§. 63. Anm. Daß ein Product wie ABC = o werde, dazu iſt genug, daß nur einer ſeiner Factoren, welcher es auch ſey, = o wird. Aber alsdann ſind die übrigen Factoren nicht auch = o. Denn wenn z. E. x − a = P = o, folglich x = a iſt, ſo muß Q = x − b = a − b, und R = x − c = a − c ſeyn. Wäre Q = o, folglich x = b, ſo wäre P = b − a, und R = b − c.

§ 64. Zuſ. 4. Setzt man eine Größe, ſie mag poſitiv oder negativ, möglich oder unmöglich, rational oder irrational ſeyn, die ein ſolches Product = o macht, anſtatt x, ſo macht ſie auch die Gleichung = o, und iſt folglich die **Wurzel** der Gleichung (Alg. §. 38.), da dann ein ſolcher Factor, x − a = o, eine **Wurzelgleichung** genannt werden kann. Nur kann man nach einander jeden der Factoren = o ſetzen. Folglich hat eine ſolche Gleichung ſoviel **Wurzeln** und **Wurzelgleichungen**, ſoviel der Exponent ihrer Ordnung Einheiten hat.

§. 65. Zuſ. 5. Nimmt man die Wurzeln + a + b u. ſ. w. mit den entgegengeſetzten Zeichen, ſo iſt z. E. in der biquadratiſchen Gleichung §. 59. der Coëfficient

1) des zweyten Gliedes die Summe ſolcher Wurzeln.
2) des dritten Gliedes die Summe aller ihrer Amben.
3) des vierten Gliedes die Summe aller ihrer Ternen.
4) des letzten Gliedes das Product aus allen, oder ihre Quaterne.

§. 66. Zuſ. 6. Wäre §. 61. 65. allgemein, ſo könnte die Gleichung, $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots \pi + x^{n-m} + \varrho x^{n-(m+1)} \ldots + \Phi x^{n-n} \ldots = Z$, als ein Product aus n einfachen Factoren angeſehen werden, und es wäre der Coëfficient des 2ten Gliedes A, die Summe ſolcher Wurzeln, des 3ten Gliedes B die Summe aller ihrer Amben, oder der Verbindung nach 2 u. ſ. w.; des m + 1ten Gliedes π, die Summe aller Verbindungen nach m; des m + 2ten Gliedes ϱ, die Summe aller Verbindungen nach m + 1; des letzten oder n + 1ten Gliedes Φ, das Product

aus

aus allen Wurzeln, oder die Summe ihrer Verbindungen nach n.

§. 67. Lehrs. Jede quadratische Gleichung $x^2 + Ax + B = 0$ ist ein Product aus zwey einfachen Gleichungen $x - a$ und $x - b$, und hat daher die beiden Wurzeln a und b, außer diesen aber keine andre.

Bew. Setzt man in §. 59. das Product $PQ = 0$, so hat man eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln a, b sind, §. 62, und es läßt sich für jedes A und B auch a und b finden, indem man allemal $A = -a - b$, und $B = +ab$ annehmen, d. i. die beiden unbekannten Größen a, b, aber auch nur diese beiden daraus finden kann, §. 54. Vergl. Hrn. Hofr. Kästners Anal. endl. Größen §. 214.

§. 68. Zus. In jeder quadratischen Gleichung ist des zweyten Gliedes Coëfficient die Summe, und das dritte Glied das Product der Wurzeln mit ihren entgegengesetzten Zeichen genommen, §. 59. Es sind nämlich hier vier Fälle:

1) beide Wurzeln positiv. Z. E. $a = +5, b = +7$, da dann $(x-5)(x-7) = x^2 - 12x + 35$.

2) beide negativ. Z. E. $a = -5, b = -7$, da dann $(x+5)(x+7) = x^2 + 12x + 35$.

3) die positive Wurzel größer. Z. E. $a = -5, b = +7$, da dann $(x+5)(x-7) = x^2 - 2x - 35$.

4) die negative größer. Z. E. $a = +5, b = -7$, da dann $(x-5)(x+7) = x^2 + 2x - 35$.

§. 69. Lehrs. Die Gleichung für Z §. 66. läßt sich allemal als ein Product aus n einfachen Factoren betrachten, welches auch weiter keine von den vorigen verschiedene Factoren haben kann.

Beyw. I. Das Product in §. 59 von so vielen einfachen Factoren, als n beträgt, enthält eben so wie hier das Product Z, theils x^n in 1 multiplicirt, theils alle niedrigere Potenzen von x (von n — 1 bis 0) mit Coefficienten an der Zahl n.

Setzt man also zwey gleichnamige Glieder aus jenem und aus diesem Producte einander gleich, so hebt sich die Potenz von x, die darin vorkömmt, auf beiden Seiten, und man erhält eine Gleichung zwischen den beiderseitigen Coefficienten. Nun sind n Glieder, bey deren jedem solches stattfindet. Folglich sind n solcher Gleichungen, wie man deren zwey in §. 67. hatte, und man kann also soviele solcher Größen a, b, c u. s. w. annehmen, §. 54. d. i. Z als Product aus so vielen einfachen Factoren A, B, C u. s. w. ansehen.

II. Ist Z aus n einfachen Factoren A, B, C u. s. w. entstanden, so setze man $Z=(x-\alpha)Q$, ohne noch zu bestimmen, ob der Factor $x-\alpha$ unter den vorhergenannten befindlich sey. Nun wird für $x-\alpha=0$, auch $Z=ABC\ldots=0$, folglich einer von den Factoren, etwa A, $=0$. Demnach ist $x-\alpha=0$, und zugleich $x-a=0$, folglich $\alpha=a$, d. i. jeder einfache Factor von Z ist unter den vorhergenannten enthalten, außer denen er also keine andre davon verschiedene haben kann. —

§. 70. Lehrs. Eine Gleichung von der nten Ordnung hat auch n Wurzeln, weder mehr noch weniger.

Bew. Man setze in der Gleichung §. 66. $Z=0$, und nenne die so erhaltene Gleichung Y. Nun ist Z ein Product aus n einfachen Factoren, deren jeder für sich allein $=0$ gesetzt, dieses Product $=0$ macht, und eine Wurzelgleichung §. 63. ist, woraus der Werth von x eine Wurzel der Gleichung Y wird. Solchergestalt erhält man n Wurzeln von Y, aber auch nicht mehrere, weil das Product Z nur n einfache Factoren haben kann.

§. 71. Lehrs. Der Satz für die Coefficienten der Gleichung §. 66. iſt allgemein.

Beww. Sondert man in der Gleichung für Z §. 66. x^m ab, und zählt blos die folgenden Glieder, ſo heißt das allgemeine Geſetz, daß jeder $m$te Coëfficient die Summe aller Verbindungen der entgegengeſetzten Wurzeln nach m ſeyn müſſe. Nun nehme man das Geſetz für ein Product aus n Factoren, und multiplicire die Gleichung für Z §. 66 mit einem neuen Factor $x-\alpha$, ſo erhält man

$$\left.\begin{matrix} x^{n+1} \\ -\alpha \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} +A \\ -\alpha A \end{matrix}\right\} x^{n-1} \left.\begin{matrix} +B \\ -\alpha B \end{matrix}\right\} x^{n-2} \ldots \left.\begin{matrix} +\varrho \\ -\alpha\pi \end{matrix}\right\} x^{n-m} \ldots = Z.(x-\alpha).$$

Setzt man dies Product $=0$, und nennt die ſo erhaltene Gleichung Y, ſo enthält dieſe alle Wurzeln jener Gleichung Z, und außer dieſen noch die $n+1$te Wurzel α, da dann zu beweiſen, daß obiges Geſetz der Coëfficienten auch für Y gelte. Nun erhellet aus der Lehre von den Verbindungen §. 38. Folgendes: Iſt π die Summe der Verbindungen nach m von den entgegengeſetzten Wurzeln der Gleichung Z, ſo kömmt zu jeder dieſer Verbindungen noch $-\alpha$ in $+\alpha\pi$, (weil ſolche Summe mit $-\alpha$, welches $+n\alpha$ entgegengeſetzt iſt, multiplicirt wird) da dann $\alpha\pi$ alle Verbindungen nach $m+1$ von $n+1$ entgegengeſetzten Wurzeln der Gleichung Y enthält, worin die letzte Wurzel α vorkömmt. Aber ϱ enthält alle Verbindungen nach $m+1$ von obgedachten n Wurzeln, worin die letzte α noch nicht vorkömmt. Folglich machen ϱ und $\alpha\pi$ zuſammen die Summe aller Verbindungen nach $m+1$ von $n+1$ ſolcher Wurzeln, daß alſo $\varrho-\alpha\pi$ in Y, und π in Z, welche zu einerley Potenz $n-m$ gehören, völlig nach einerley Geſetze, wenn man es in Worten ausdrückt, beſtimmt werden. Iſt alſo dieſes Geſetz von irgend einer Gleichung wahr, ſo gilt es auch von der nächſt höhern. Nun iſt es von der quadratiſchen Gleichung wahr, wie die Rechnung §. 68. zeiget, folglich gilt es auch von der cubiſchen u. ſ. w. ohne Ende.

Z. E.

Z. E. die vierte Gleichung in §. 68. mit $x-3$ multiplicirt giebt $x^3-x^2-41x+105=0$. Diese mit $x-2$ multiplicirt giebt $x^4-3x^3-39x^2+187x-210=0$, deren Wurzeln $+2, +3, +5, -7$ sind, womit man die Probe machen kann.

§. 72. Zus. 1. Die Coefficienten einer Gleichung könnte man auch als die Bedingungen einer Aufgabe betrachten, welche mit der Gleichung zugleich aufgelöst wird. Z. E. die Gleichung $x^3+px^2+qx+r=0$ enthält die Aufgabe: Man soll drey Zahlen finden, daß ihre Summe $=p$, ihr Product $=r$, und die Summe ihrer Amben $=q$ sey.

§. 73. Zus. 2. Der erste Coëfficient einer Gleichung ist bejaht, oder verneint, oder Null, je nachdem die Summe der bejahten Wurzeln größer oder kleiner, als die Summe der verneinten ist, oder beider Summen gleich sind.

Letzteres findet also allemal statt, wenn in einer Gleichung das zweyte Glied fehlet. Aus eben dem Grunde muß, wenn das dritte Glied fehlet, die Summe der Producte aus Paaren der Wurzeln $=0$ seyn, u. s. w.

§. 74. Zus. 3. Fehlet das letzte Glied der Gleichung, so muß eine ihrer Wurzeln $=0$ seyn, da dann die Gleichung sich mit x dividiren, und dadurch auf den nächstniedrigern Grad bringen läßt.

Ueberhaupt müssen soviele Wurzeln $=0$ seyn, als letzte Glieder fehlen. Denn das vorletzte Glied ist nun das letzte in der Gleichung, die man durch obige Division mit x erhalten hat, und es gelten die nämlichen Schlüsse.

§. 75. Zus. 4. Aus dem Verfahren §. 52. erhellet, daß in den Gliedern der Gleichung die Zeichen $+$ und $-$ abwechseln, wenn alle Wurzeln positiv sind, und daß alle Glieder das Zeichen $+$ haben, wenn alle Wurzeln negativ sind.

Hier-

Hieraus hat man überhaupt geſchloſſen, daß eine Gleichung, worin lauter reelle Wurzeln ſind, ſo viele poſitive Wurzeln habe, ſo viele Uebergänge von einem Zeichen zum entgegengeſetzten in den Gliedern ſind, und ſo viele negative Wurzeln, ſo viele Fortſetzungen ebenderſelben Zeichen vorhanden ſind. Vergl. Segneri cursus mathematici P. II. §. 506-527.

Durch Veränderung der Zeichen kann man daher aus poſitiven Wurzeln negative machen, und umgekehrt. Z. E. die Gleichung $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$, hat die Wurzeln $+1, +2, +5$. Setzt man $x^3 + 8x^2 + 17x + 10 = 0$, ſo ſind die Wurzeln $-1, -2, -5$. Oder die Gleichung $x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0$ hat die Wurzeln $+1, +2, -5$. Setzt man $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$, ſo ſind die Wurzeln $-1, -2, +5$.

Bey allen dergleichen Unterſuchungen muß man dem etwa fehlenden Gliede der Gleichung beide Zeichen geben, um zu ſehen, ob in beiden Vorausſetzungen dieſelben Kennzeichen bleiben oder nicht. Z. E. $x^3 + 0x^2 - 3x + 30 = 0$ giebt zwey Verwechſelungen der Zeichen, und eine Fortſetzung, und hat daher zwey poſitive Wurzeln und eine negative; hingegen in $x^3 + 0x^2 + qx - r = 0$ giebt $+0x^2$ eine Wurzel poſitiv und zwey negativ, aber $-0x^2$ drey poſitive Wurzeln. Daher ſind zwey Wurzeln, die ſich dort negativ, hier aber poſitiv zeigen, imaginär.

§. 76. Zuſ. 5. Wird eine Gleichung durch eine ihrer Wurzelgleichungen §. 63. dividirt, ſo geht dieſe in jener auf, und giebt zum Quotienten die nächſtniedrigere Gleichung.

Iſt nun unter den Wurzeln einer Gleichung ein Bruch $\frac{e}{c}$, daß ſich alſo die Gleichung durch $x - \frac{e}{c} = 0$ dividiren

läßt,

lößt, so wird sie auch durch $cx - e = 0$ dividirt werden können. Und dies wird eine allgemeine Form jeder Wurzelgleichung §. 69. für ganze sowohl als gebrochene Wurzeln, wenn man darin $c = 0$ oder $= 1$ setzt. Für $c = 1$ hat man $x = e$ bis p, für $c = 1$ hat man $cx - 1 = 0$, oder $x - \frac{1}{c} = 0$. Vergl. Segneri cursus mathematicus P. II. §. 500. 501.

§. 77. Zus. 6. Aus eben dem Grunde muß eine Gleichung, die ein Product aus jeder gegebenen Gleichungen ist, mit einer derselben dividirt, die andre zum Quotienten geben.

Wie man eine Gleichung in dergleichen Factoren auflösen, oder sie reduciren, desgleichen wie man mittelst eben dieser Methode die gleichen Wurzeln einer Gleichung finden könne, darüber vergl. man Segner. l. c. §. 544. 550.

§. 78. Zus. 7. Eine Gleichung heißt reducibel, wenn sie durch eine andre Gleichung, die von niedrigerm Grade und ohne Wurzelzeichen ist, genau dividirt werden kann, sonst aber heißt sie irreducibel. Z. E. die Gleichung $x^3 - 10x^2 + 34x - 40 = 0$, durch $x - 4 = 0$ dividirt, giebt die Gleichung $x^2 - 6x + 10 = 0$, welche irreducibel ist.

§. 79. Zus. 8. In letzterer Gleichung §. 78, deren Glieder nichts irrationales enthalten, können doch die Wurzeln irrational, ja selbst imaginär seyn. Dies findet überhaupt bey Gleichungen statt, deren Exponent eine gerade Zahl ist, indem hier die Irrationalität durch die Multiplication gehoben wird. Enthalten also die Glieder einer Gleichung keine imaginäre Größe, so sind ihre Wurzeln entweder alle reel, oder die imaginären blos von gerader Anzahl, so daß je zwey einander gleich und entgegengesetzt sind, weil sonst das zweyte Glied nicht fehlen könnte,

oder,

oder, wenn es vorhanden ist, eine imaginäre Größe enthalten müßte, gegen die Voraussetzung.

Von den irrationalen und unmöglichen Wurzeln der Gleichungen handelt Hr. Hofr. Kästner Anal. end. Größ. §. 228--272.

§. 80. Zus. 9. Gleichungen von ungerader Ordnung müssen wenigstens eine reelle Wurzel haben, aber die von gerader Ordnung können lauter imaginäre haben.

§. 81. Zus. 10. Die Zahl der reellen Wurzeln ist bey ungerader Ordnung der Gleichung allemal gerade, bey gerader Ordnung allemal ungerade.

3. Transformation der Gleichungen.

§. 82. Erkl. Wird eine gegebene Gleichung in eine andre verwandelt, worin die Wurzeln der erstern um eine gegebene Größe durch die gemeinen Rechnungsarten verändert sind, so nennt man dies die Transformation der Gleichung.

§. 83. Satz. Kennt man die Wurzeln der abgeleiteten Gleichung, so weiß man auch die Wurzeln der gegebenen, indem die Verhältniß der beiderseitigen Wurzeln gegeben ist. Da sich nun die Wurzeln der abgeleiteten Gleichung oft leichter finden lassen, so kann die Transformation zur Auflösung der Gleichungen von großem Nutzen seyn.

§. 84. Aufg. Die Wurzeln einer Gleichung durch Addition oder Subtraction zu verändern. Z. E. der Gleichung $x^3 - px + qx - r = 0$ Wurzeln sollen um einen gegebenen Unterschied d größer oder kleiner werden.

Auf-

Auflöſ. I. Es ſey $x + d = y$, folglich $x = y - d$, und man ſetze dieſen Werth anſtatt x in die gegebene Gleichung, ſo erhält man

$$\begin{array}{rrrrr} +x^3 = & y^3 & -3dy^2 & +3d^2y & -d^3 \\ +px = & & -py & +pd & \\ +q = & & & +q & \\ \hline -r = & & & & -r \\ \hline 0 = & y^3 & +(-3d+p)y^2 & +(3d^2-2pd+q)y & -(d^3-pd^2+qd+r) \end{array}$$

Z. E. Man ſoll aus §. 72. die Gleichung $x^3 - x^2 - 41x + 105 = 0$, deren Wurzeln $+3, +5, -7$ ſind, transformiren, daß $d = 6$ ſey, d. i. die Wurzeln der transformirten Gleichung $+9, +11, -1$ werden.

II. Es ſey $x - d = y$, folglich $x = y + d$, ſo verfahre man wie im erſten Falle, oder man ſetze in der transformirten Gleichung des erſten Falles d negativ.

§. 85. Zuſ. 1. Da d in dem Ausdrucke $+d$ bejaht oder verneint ſeyn kann, ſo kömmt zu den bejahten ſowohl als zu den verneinten Wurzeln der zu transformirenden Gleichung im erſten Falle eine bejahte, im zweyten eine verneinte Größe hinzu. Hiedurch werden alſo im erſten Falle die bejahten Wurzeln vermehrt, und die verneinten vermindert, im zweyten Falle aber die bejahten vermindert, und die verneinten vermehrt.

Sieht man nun eine kleinere verneinte Größe für größer an, als die größere verneinte (Ar. §. 127.), ſo werden beiderley Wurzeln durch ein bejahtes d vermehrt, und durch ein verneintes d vermindert.

§. 86. Zuſ. 2. Durch die Vermehrung können aus verneinten Wurzeln bejahte, und durch die Verminderung aus bejahten verneinte werden.

Denn iſt a eine Wurzel der zu transformirenden Gleichung,

chung, und ist $d > a$, so wird $y = -a + d$ bejaht, und $y = +a - d$ verneint.

§. 87. Zus. 3. Ist a absolute genommen die größte Wurzel der zu transformirenden Gleichung, und man kennet eine Zahl $d > a$, so wird, wenn man die zu transformirende Gleichung um d vermindert oder vermehrt, die transformirte im ersten Falle lauter verneinte, im zweyten lauter bejahte Wurzeln haben.

Aehnliche Schlüsse macht man, wenn b absolute genommen die kleinste Wurzel der gegebenen Gleichung und $f < b$ ist.

§. 88. Zus. 4. Ist a eine Wurzel der zu transformirenden Gleichung, und $d = a$, so wird $y = +a - d = o$, und auch $y = -a + d = o$. Daher hat die transformirte Gleichung eine Wurzel weniger, und ist also um einen Grad niedriger.

§. 89. Aufg. Die Wurzeln einer Gleichung durch Multiplication oder Division zu verändern.

Z. E. Der Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = o$ Wurzeln sollen mit einer gegebenen Zahl e multiplicirt oder dividirt werden.

Auflös. I. Es sey $ex = y$, folglich $x = \frac{y}{e}$, und man setze diesen Werth anstatt x in die gegebene Gleichung, so erhält man

$\frac{y^3}{e^3} - \frac{py^2}{e^2} + \frac{qy}{e} - r = o$, und mit e^3 multiplicirt,

$y^3 - epy^2 + e^2qy - e^3r = o$.

Z. E. Man soll aus §. 71. die Gleichung $x^4 - 3x^3 - 39x^2 + 187x - 210 = o$, deren Wurzeln $+2$, $+3$, $+5$, -7 sind, transformiren, daß $e = 1$ sey, d. i. daß die Wurzeln der transformirten Gleichung $+4$, $+6$, $+10$, -14 werden.

II. Es sey $\frac{x}{e}=y$, folglich $x=ey$, so verfahre man wie im ersten Falle, oder man setze in der transformirten Gleichung des ersten Falles $\frac{1}{e}$ anstatt e.

§. 90. Zus. 1. Die transformirte Gleichung entsteht unmittelbar, wenn man in der zu transformirenden Gleichung y anstatt x setzt, und ihre Glieder, aber nach der Ordnung, mit der Progression $1, e, e^2, e^3 \ldots e^n$ multiplicirt, wo e auch einen Bruch bedeuten kann.

Z. E. Der Gleichung $x^3 * -7x+6=0$ Wurzeln $+1, +2, -3$, sollen mit 2 multiplicirt werden, also die Glieder der Gleichung mit $1, 2, 4, 8$, so erhält man $y^3 * -28y+48=0$, deren Wurzeln $+2, +4, -6$ sind.

§. 91. Zus. 2. Nach eben den Methoden kann man den beiderseitigen Wurzeln eine beliebige Verhältniß geben. Z. E. es soll seyn $g:h=x:y$, so ist $y=\frac{h}{g}x$, folglich obiges $e=\frac{h}{g}$.

§. 92. Zus. 3. Jede Gleichung von der Form $x^{2n}+Ax^n=C=0$ wird in eine quadratische, und die von der Form $x^{3n}+Ax^{3n}+Bx^n+C=0$ in eine cubische Gleichung transformirt, wenn man $y=x^n$ setzt.

§. 93. Anm. 1. Setzt man in der Gleichung $x^3 \mp px \pm q=0$, $x=y \pm \frac{p}{3y}$, so erhält man nach §. 84.

$$x^3=y^3+py+\frac{p^2}{3y}+\frac{p^3}{27y^3}$$
$$-px=\quad -py-\frac{p^2}{3y}$$
$$\pm q=\qquad\qquad \pm q$$
$$0=y^3 \quad * \quad * \pm q+\frac{p^3}{27y^3}$$

Die

Diese mit y^3 multiplicirt, giebt $y^6 + qy^3 + \frac{p^3}{27} = 0$, woraus man eine quadratische Gleichung machen kann, § 92.

Hiedurch läßt sich jede cubische Gleichung, in welcher das zweyte Glied fehlet, in eine quadratische transformiren.

§. 94. Anm. 2. Setzt man in der Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, $x = \frac{y}{z}$, so erhält man $y^3 - pzy^2 + qz^2y - rz^3 = 0$. Will man nun einen Coefficienten, z. E. des 2ten Gliedes, einer gewissen Größe a gleich machen, so setze man $pz = a$, wodurch $z = \frac{a}{p}$ bestimmt wird, u. s. w.

§. 95. Aufg. Die Brüche aus den Coëfficienten einer Gleichung wegzuschaffen.

Auflös. Man multiplicire die Wurzeln der gegebenen Gleichung mit dem Nenner, oder mit dem Producte aus allen Nennern der Brüche, nach §. 89 oder 90.

Denn da jeder Coëfficient durch eine Potenz des Multiplicans multiplicirt wird, §. 89. 90, so gehen darin die Nenner der Brüche auf. Auch ist es bequemer, anstatt des Products aus den Nennern ihren kleinsten Dividuus zu gebrauchen. (Ar. §. 369.)

Z. E. Für die gegebene Gleichung $x^3 + \frac{3}{10}x^2 - \frac{7}{6}x + 8 = 0$, wäre der Multiplicans 10. 6, oder bequemer 30.

§. 96. Anm. 1. Hat in einer Gleichung $ax^3 - bx^2 + cx - d = 0$, das erste Glied einen Coefficienten a, so multiplicire man mit diesem Coëfficienten.

§. 97. Anm. 2. Zuweilen lassen sich durch obige Methode Irrationalgrößen aus den Coëfficienten wegschaffen, wenn nämlich alle vorhandene Irrationalgrößen Potenzen einer einzigen sind, und sich nur in solchen Gliedern befinden, auf welche die gehörigen Potenzen des gebrauchten Multiplicans nach der Methode §. 90. fallen.

Z. E. $x^3+4x^2\sqrt{2}-6x-\frac{18}{\sqrt{2}}=0$, multiplicire

mit $1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad 2\sqrt{2}$

oder $x^3-ax^2\sqrt[3]{2}+bx\sqrt[3]{32}-c=0$, dividirt

mit $1 \quad \sqrt[3]{2} \quad \sqrt[3]{4} \quad 2$

§. 98. Aufg. Eine gegebene Gleichung in eine andere zu transformiren, worin das letzte Glied weniger Divisoren habe.

Auflös. Man setze eine willkührliche Zahl a anstatt x in die gegebene Gleichung, und sehe, ob die Zahl, welche die Summe aller Glieder giebt, kleiner als das letzte Glied sey. Ist dies, so setze man $x=y+a$.

Bew. Die Gleichung $x^3+px^2+qx+r=0$ giebt, $x=a$ gesetzt, $a^3+pa^2+qa+r=D$, und, $x=y+a$ gesetzt, $y^3+(3a+p)y^2+(3a^2+2px+q)y+D=0$, wo $D<r$, nach der Voraussetzung.

Exempel. Es sey die Gleichung $x^3-3x^2-10x+24=0$. Setzt man hier $a=+1$, so erhält man $1-3-10+24=12<24$. Nun setze man $x=y+1$, so erhält man $y^3-13y+12=0$.

Anm. Zuweilen lassen sich die Glieder der gegebenen Gleichung, z. E. $x^3-6x^2-4x+24=0$, durch die Glieder einer geometrischen Progression, hier 1, 2, 4, 8, dividiren, wodurch man $x^3-3x^2-x+3=0$ erhält, worin die Wurzeln mit 2 multiplicirt sind.

Auch läßt sich hier die Methode §. 94. anbringen.

§. 99. Aufg. Eine gegebene unvollständige Gleichung vollständig zu machen.

Auflös. In der Gleichung $x^n+Ax^{n-1}\ldots+u=0$ mögen so viele Glieder fehlen als man will. Setzt man darin $x=y+d$, so erhält man eine Gleichung von gleichem Grade für y, welche gewiß vollständig ist, da schon $x^n=(y+d)^n$ alle Potenzen von n bis 0 giebt.

Z. E.

Z. E. $x^3+5x-8=0$, wenn man darin $x=y+3$ setzt, wird $y^3+9y^2+32y+34=0$.

Anmerk. Sollte man hiebey auf eine Zahl d gefallen seyn, wodurch §. 82. eintrifft, so läßt sich dafür leicht eine andere Zahl erwählen. Vergl. Hrn. Hofr. Kästners Anal. endl. Gr. §. 281.

§. 100. Aufg. Aus einer gegebenen Gleichung das zweyte Glied wegzuschaffen.

Auflös. Den Coëfficienten des zweyten Gliedes der Gleichung dividire man mit dem Exponenten der Ordnung, und mit dem dadurch erhaltenen positiven oder negativen Quotienten vermehre man die Wurzeln der Gleichung nach §. 84.

Z. E. In der Gleichung $x^3-12x^2+4x-48=0$ ist $=\frac{-12}{3}=-4$, folglich $x=y+4$ zu setzen. Demnach ist

$$\begin{array}{rrrrr} x^3 & = & y^3 & +12y^2 & +48y+64 \\ -12x^2 & = & -12y^2 & -96y & -192 \\ +4x & = & & +4y & +16 \\ -48 & = & & & -48 \\ \hline 0 & = & y^3 & * & -44y-160 \end{array}$$

Anm. In der Gleichung $x^3-2x^2+4x-8=0$, wo 3 in den Coefficienten des 2ten Gliedes nicht aufgeht, multiplicire man zuvor die Wurzeln mit 3, welches $x^3-6x^2+36x-216=0$ giebt.

Beww. Wenn man §. 99. der Gleichung $x^n+Ax^{n-1}\ldots+u=0$ Wurzeln mit d vermehrt, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} y^n-nd \\ +A \end{array}\right\} y^{n-1}+\left.\begin{array}{l} \frac{n.n-1.d^2}{1.2.} \\ -A(m-1)d \\ +B \end{array}\right\} y^{n-2}\ldots.$$

Soll nun hier das zweyte Glied fehlen, so muß $A-nd=0$, folglich $\frac{A}{n}=d$, seyn, wodurch man also die Zahl d findet, welche der Aufgabe eine Genüge leistet.

$= x$. §. 101. Zuſ. 1. Hieraus erhellet, daß durch die Veränderung der Wurzeln §. 100. wenigſtens eine verneint werden müſſe, damit ihrer aller Summe $= 0$ ſeyn könne.

§. 102. Zuſ. 2. Wenn in der gegebenen Gleichung das zweyte Glied vorhanden wäre, aber andre fehlten, ſo würde dieſes Verfahren ſolche erſetzen §. 99. Demnach läßt ſich auf dieſe Art nicht mehr als ein Glied wegſchaffen.

§. 103. Zuſ. 3. Wollte man das dritte Glied wegſchaffen, ſo müßte man den Coëfficienten des dritten Gliedes in der neuen Gleichung des Beweiſes §. 100. $= 0$ ſetzen, alſo d aus einer quadratiſchen Gleichung entwickeln. (Fände man hiebey beide Werthe von d unmöglich, ſo ließe ſich die Auflöſung nicht bewerkſtelligen.)

§. 104. Zuſ. 4. Auf ähnliche Art ließe ſich das vierte, 5te, und überhaupt jedes Glied einer Gleichung, aber nur eins allein, wegſchaffen, wenn man d aus höhern Gleichungen entwickeln kann.

§. 105. Anm. Den vorzüglichſten Nutzen hat die Wegſchaffung des zweyten Gliedes, weil die Rechnung mit den Wurzeln der Gleichung dadurch am meiſten verkürzt wird. Denn z. E. in der neuen Gleichung, die man dadurch erhält, kann man leichter als in der gegebenen prüfen, was für Zahlen Wurzeln der Gleichung ſind. Dieſe Erleichterung iſt beym zweyten Gliede beträchtlicher als bey den übrigen Gliedern, worin x in niedrigern Potenzen vorkömmt. Ueber die Unmöglichkeit einer Methode, die Herr von Tſchirnhauſen Acta Erud. 1683. p. 204. angegeben zu haben vermeinte, aus jeder Gleichung alle Glieder bis auf das höchſte und das letzte wegzuſchaffen, desgleichen über die Aufgabe aus einer Gleichung, worin das zweyte Glied fehlt, das vorletzte wegzuſchaffen, vergl. man Hrn. Hofr. Käſtners Anal. endl. Gr. §. 290. f.

4. Auflöſung der Gleichungen.

§. 106. Aufg. Die Wurzeln der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ zu finden.

Auf-

Auflöſ. I. Man verſetze das letzte Glied, und ergänze das unvollſtändige Quadrat, wie Alg. §. 43. Hiedurch erhält man $x^2+px+\frac{1}{4}p^2=-q+\frac{1}{4}p^2$, folglich $x+\frac{1}{2}p=\pm\sqrt{(-q+\frac{1}{4}p^2)}$, und $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(-q+\frac{1}{4}p^2)}$.

II. Oder: Man ſchaffe das zweyte Glied weg, in dem man nach §. 100. $x=y-\frac{1}{2}p$ ſetzt, und hiedurch erhält §. 84. $y^2-\frac{1}{4}p^2+q=0$, oder $y^2=\frac{1}{4}p^2-q$, folglich $y=\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$, folglich $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$ wie zuvor.

Exempel. $x^2+3x-28=0$; $x^2+x-56=0$; $x^2-6x-16=0$.

§. 107. Zuſ. 1. Die Wurzeln der quadratiſchen Gleichung ſind entweder beide reel, oder beide imaginär. Vergl. §. 79, und Alg. §. 43. Anm.

§. 108. Zuſ. 2. Jede Gleichung von der Form $x^{2n}+ax^n+b=0$ kann nach Art einer quadratiſchen $y^2+ay+b=0$ aufgelöſt werden, §. 92, wo $x^n=y=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-b)}$ iſt, folglich $x=\sqrt[n]{(-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-b)}}$.

Z. E. $x^4-6x^2+1=0$, wo $a=-6$ $b=+1$, folglich $x=\pm\sqrt{(3\pm\sqrt{(9-1)})}=\pm\sqrt{3\pm\sqrt{8}}$.

§. 109. Anm. 1. Ein merkwürdiges Beyſpiel von quadratiſchen Gleichungen aus Regiomontan hat Herr geh. Rath Mönnich Lehrbuch der Mathematik 1. Theil S. 442 angeführt.

§. 110. Anm. 2. Ueber Anwendung quadratiſcher Gleichungen auf die Form $\sqrt{(a\pm\sqrt{b})}$ vergleiche man Segneri curſ. mathem. II. §. 416. f.

§. 111. Aufg. Die Wurzeln der Gleichung $x^3+ax^2+bx+c=0$ zu finden.

Auflöſ. 1) Man habe durch die Elimination des 2ten Gliedes §. 100. erhalten: $x^3-fx-g=0$, oder $x^3=fx+g$.

2) Man ſetze $x = a + b$, ſo iſt $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ (Arithm. §. 253.)

3) Man ſetze $a^3 = p$, $b^3 = q$, folglich $a = \sqrt[3]{p}$, $b = \sqrt[3]{q}$, und $ab = \sqrt[3]{pq}$.

4) Demnach iſt $x^3 = fx + g = 3\sqrt[3]{pq} \cdot x + p + q$, folglich

$f = 3\sqrt[3]{pq}$	$g = p + q$
$f^3 = 27pq$	$g^2 = p^2 + 2pq + q^2$
$\frac{4}{27}f^3 = pq$	$g^2 - \frac{4}{27}f^3 = p^2 - 2pq + q^2$
$\frac{4}{27}f^3 = 4pq$	$\sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)} = p - q$

5) Nun war $g = p + q$

Folglich iſt $g + \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)} = 2p$

$g - \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)} = 2q$

folglich $\sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}}{2}} = \sqrt[3]{p} = a$,

$$\sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}}{2}} = \sqrt[3]{q} = b.$$

6) Demnach iſt $x = a + b$ gefunden. Z. E. für $x^3 = 6x + 9$ iſt $f = 6$, und $g = 9$, folglich $g^2 = 81$, und $f^3 = 216$, alſo $\frac{4}{27}f^3 = 32$, und $\sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)} = 7$. Folglich iſt $x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 3$, eine Wurzel der gegebenen Gleichung.

§. 112. Anm. 1. Dieſe Auflöſung iſt von Tartaglia, und unter dem Namen von Cardans Regel bekannt. Eine genauere und ſehr lehrreiche Entwickelung dieſer Regel giebt Herr Hofr. Käſtner, Anal. endl. Größen §. 699-723.

§. 113.

§. 113. Anm. 2. Jede Gleichung von der Form $x^{3n} + ax^{2n} + bx^2 + c = o$ kann nach Art einer cubischen aufgelöst werden. §. 92. vergl. §. 108.

§. 114. Anm. 3. Das Aehnliche von §. 111. findet in der Form $\sqrt[3]{(a \pm \sqrt{b})}$ statt.

§. 115 Anm. 4. Für reine cubische Gleichungen, die Alg. §. 39. unvollständig behandelt worden, z. E. $x^3 - a^3 = o$, ist $x = a$, oder $x - a = o$, welches in die gegebene Gleichung dividirt, die Gleichung $x^2 + ax + a^2 = o$ giebt, deren Wurzel $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{-\frac{3}{4}a^2} = \frac{a(-1 \pm \sqrt{-3})}{2}$.

Z. E. die Gleichung $x^3 - 8 = o$ hat die Wurzeln: 2; $-1 + \sqrt{-3}$; $-1 - \sqrt{-3}$, deren jede zur dritten Potenz erhoben, die Zahl 8 giebt.

§. 116. Anm. 5. Von reinen biquadratischen und höhern Gleichungen gilt das Aehnliche von §. 115. Z. E. $x^4 - e^4 = o$, giebt $x = \pm e$. Dividirt man die gegebene Gleichung mit $(x + e)$ $(x - e)$ oder mit $x^2 - e^2 = o$, so erhält man $x^2 + e^2 = o$, folglich $x = \pm \sqrt{-e^2}$. Z. E. $x^4 - 81 = o$.

§. 117. Aufg. Die Wurzeln der Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = o$ zu finden.

Auflös. 1) Durch Elimination des zweyten Gliedes §. 100. habe man erhalten $x^4 = -px^2 - qx - r$.

2) Man addire zu beiden Seiten $2x^2y + y^2$, so erhält man $x^4 + 2x^2y + y^2 = (2y - p)x^2 - qx + y^2 - r$.

$$= (2y - p)\left(x^2 - \frac{qx}{2y - p} = \frac{y^2 - r}{2y - p}\right).$$

3) Was linker Hand steht, ist das Quadrat von $x^2 + y$. Von dem Producte rechter Hand kann der eine Factor auch zu einem Quadrate gemacht werden, wenn man $\frac{y^2 - r}{2y - p} = \frac{1}{4}\left(\frac{-q}{2y - p}\right)^2$ setzt, (Alg. §. 43.) folglich, wenn man y so nimmt, daß $4(y^2 - r)(2y - p) = q^2$ sey.

4) Dieſe letztere Gleichung wird, wenn man der Kürze wegen $2y-p=z$, folglich auch $y=\frac{z+p}{2}$ ſetzt, $z^3+2pz^2+(pp-4r)z-q^2=0$, woraus man nach Cardans Regel z beſtimmt, und nun die biquadratiſche Gleichung auflöſen kann.

§. 118. Anm. Dieſe Auflöſung iſt von Ferrari, und unter dem Namen von Bombelli's Regel bekannt, auch ſo wie Cardans Regel §. 111. nur der Geſchichte wegen hier angegeben worden. Für höhere Gleichungen hat man bis jetzt keine allgemeinen Auflöſungen, die auch nur für die Theorie intereſſant ſeyn würden, welches auch von Cardans und Bombelli's Regeln gilt. Für die Praxis ſind alle allgemeine Auflöſungen, nur die für quadratiſche Gleichungen ausgenommen, ganz entbehrlich, indem man ſolche bequemer durch ganz andre Mittel bewerkſtelligen kann. Die hiezu gehörigen ziemlich verwickelten Theorien und mannichfaltigen Methoden müſſen aus vollſtändigen beſondern Anweiſungen zur Algebra erlernt werden, daher wir uns hier nur auf etwas Weniges von dieſer Materie einſchränken müſſen, um doch wenigſtens einigen Begriff von der Sache zu geben.

§. 119. Erkl. Gränzen einer Wurzel heißen die Zahlen, zwiſchen welche eine Wurzel der Gleichung fällt. Gränzen der Wurzeln heißen die Zahlen, zwiſchen welche alle Wurzeln der Gleichung fallen.

§. 120. Zuſ. Die Gränzen aller poſitiven oder aller negativen Wurzeln ſind zwey poſitive oder negative Zahlen, deren eine größer als die größte, die andre kleiner als die kleinſte poſitive oder negative Wurzel iſt, da dann die gröſſere Zahl die größte, und die kleinere die kleinſte Gränze heißt. Nimmt man aber eine kleinere negative Größe wie §. 85. und Ar. §. 127, ſo iſt die größere negative Zahl die kleinſte, und die größere poſitive Zahl die größte Gränze aller Wurzeln.

§. 121. Aufg. Die Gränzen der Wurzeln einer Gleichung zu finden.

Auf-

Auflöſ. Man kann zu dieſem Zwecke auf mehrern Wegen gelangen, wovon hier blos einer, nämlich die Verſetzung der Glieder, angezeigt werden ſoll. Da es aber hiebey auf die beſtimmten Zeichen der Coëfficienten ankömmt, wonach man verſchiedentlich zu verfahren hat, ſo mag es genügen, an einem Beyſpiele den Geiſt dieſer Methode kenntlich zu machen.

Es ſey z. E. die Gleichung $x^5 + 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 4 = 0$ gegeben, man ſoll die Gränzen ihrer Wurzel finden.

Man verſetze das negative Glied, ſo iſt
$x^5 + 2x^4 + 2x^2 + 4 = 10x^3$, folglich

1) $x^5 < 10x^3$, oder $x^2 < 10$, folglich $x < \sqrt{10}$, d. i. $x < 3,2$.

2) $2x^4 < 10x^3$, folglich $x < 5$, welche Gränze aber entfernter als die vorige iſt.

3) $10x^3 > 2x^2$, folglich $x > \frac{2}{10}$, d. i. $x > 0,2$.

4) $10x^3 > 4$, folglich $x^3 > 0,4$, folglich $x > \sqrt[3]{0,4}$, d. i. $x > 0,7$, welche Gränze näher als die vorige iſt.

Demnach ſind die poſitiven Wurzeln der gegebenen Gleichung zwiſchen den Gränzen 3, 2 und 0, 7.

§. 122. Aufg. Einfache Wurzelgleichungen von der Form $x \pm a = 0$ zu ſuchen, wodurch ſich eine gegebene Gleichung dividiren laſſe.

Auflöſ. Man ſetzt hiebey voraus, daß alle Coëfficienten der gegebenen Gleichung ganze Zahlen ſind, oder darauf gebracht worden, §. 95. Da nun das letzte Glied der Gleichung das Product aus allen Wurzeln iſt, ſo zerlege man daſſelbe in ſeine einfachen Factoren, formire daraus Wurzelgleichungen, und verſuche damit die Diviſion, ob ſie aufgehe. Oder man ſetze einen Factor nach dem andern anſtatt der unbekannten Größe in die Gleichung, und ſehe, ob er der Gleichung Werth $= 0$ mache. In beiden

Fällen

Fällen ist der Factor, bey dem obiges zutrifft, eine Wurzel der Gleichung.

Z. E. Der Gleichung $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ letztes Glied hat die Factoren 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, von denen $+2$, -3, $+4$ die Wurzeln sind.

§. 123. Anm. 1. Bey dieser Operation kann man sich die Arbeit auf mancherley Art abkürzen. Z. E.

1) wenn man zuvor das zweyte Glied der gegebenen Gleichung wegschafft, §. 100.

2) wenn man die Gleichung in eine andere transformirt, worin das letzte Glied weniger Divisoren hat, §. 98.

3) wenn man die Gränzen der Wurzeln sucht, §. 121.

§. 124. Anm. 2. Dies Verfahren dient oft, mehrere Wurzeln der Gleichung zu entdecken, wenn man eine gefunden hat, indem die gegebene Gleichung mit der Wurzelgleichung dividirt, die nächstniedrigere Gleichung giebt, mit der man, wenn sie nicht schon quadratisch ist, obige Operation von neuem wiederholen kann, u. s. w.

Z. E. Die Gleichung $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, mit $x - 2 = 0$ dividirt, giebt zum Quotienten $x^3 - 2x^2 - 23x + 60 = 0$, und diese mit $x - 3$ dividirt, den Quotienten $x^2 - x - 20 = 0$, deren Wurzeln man nach §. 106. findet.

§. 125. Lehrs. Erhält die unbekannte Größe x in der Gleichung $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} \ldots + u = y$ zwey verschiedene Werthe, deren einer die Gleichung y positiv, der andre aber negativ macht, so ist wenigstens eine reelle Wurzel zwischen diesen beiden Werthen.

Bew. Jeder bestimmte Werth von x giebt ein bestimmtes y, weil die Gleichung alsdann einfach und bestimmt ist. Man setze also, $x = r$ gebe $y + \varrho$, und $x = s$ gebe $y = -\sigma$, indem die Coefficienten a, b, c ..... u bejahte und verneinte Zahlen bedeuten können, so wird, indem x von r bis s zu- oder abnimmt, auch y von $+\varrho$ bis

$-\sigma$

$-q$ zu- oder abnehmen. Da nun y von dem bestimmten $+\varrho$ zu dem bestimmten $-\sigma$ nicht anders als durch o übergehen kann, so giebt es zwischen r und s einen bestimmten Werth, welcher $y=0$ macht, folglich eine Wurzel der Gleichung ist.

§. 126. Zus. 1. Ist für y zwischen r und s nur ein Durchgang ins entgegengesetzte, so wird es nur einmal $=o$. Es können aber mehrere Durchgänge seyn, wenn z. E. p und q zwischen r und s liegen, und y bejaht ist, für $x=r$, verneint für $x=p$, bejaht für $x=q$, verneint für $x=s$, da dann y dreymal $=o$ wird. Z. E. $x^4-16x^2+7x+87$, wird $=+3$ für $x=2$, und $=+5$ für $x=3$, und $=+65$ für $x=4$, und $=-25$ für $x=-2$, wo also drey Uebergänge sind.

§. 127. Zus. 2. Sind r und s ganze um die Einheit unterschiedene Zahlen, so fällt gewiß eine Wurzel dazwischen, wo nicht mehrere. So ist in dem Exempel §. 126, zwischen 2 und 3, desgleichen zwischen 3 und 4 gewiß eine Wurzel.

§. 128. Aufg. Man weiß, zwischen welche ganze Zahlen eine Wurzel fällt, und soll diese bis auf ein Zehntheilchen finden.

Auflös. Da die Wurzel offenbar derjenigen Zahl näher liegen muß, deren y weniger von Null unterschieden ist, so vermehre man solche nach und nach um 1, 2, 3 ꝛc. Zehntheilchen, und suche die zugehörigen Werthe von y, wodurch man also die beiden Brüche findet, zwischen welche die Wurzel fällt.

Z. E. Die Gleichung $x^3-50x-120=y$ giebt $y=-8$ für $x=8$, und $y=+159$ für $x=9$. Folglich die Wurzel zwischen 8 und 9, und zwar viel näher bey 8. Setzt man nun $x=8,1$: so kömmt $y=+6,441$, da-

daher die Wurzel zwischen 8 und 8,1 fällt, und man sie also vorerst 8,0 nehmen muß.

§. 129. Aufg. Man hat eine Wurzel in Zehntheilchen, und soll sich ihrem Werthe beliebig nähern.

Z. E. Man weiß, daß für die Gleichung $x^3 - 50x - 120 = 0$, eine Wurzel $x = 8,0 + p$ sey, §. 128.

Auflös. 1) Man setze $x = 8,0 + p$, da dann

$$\begin{array}{rl} x^3 = & 512 + 192 \\ -50x = & -400 - 50 \\ -120 = & -120 \end{array}\Big\}p + 24p^2 + p^3$$

$$0 = -8 + 142p + 24p^2 + p^3 \quad (A)$$

2) Da p ein ächter Bruch, so sind in der erhaltenen Gleichung (A) die Glieder, worin höhere Potenzen von p vorkommen, nur unbeträchtlich, und es ist beynahe $0 = -8 + 142p$, folglich beynahe $p = \frac{8}{142} = 0,0563\ldots$.

3) Da der gefundene Werth von p nicht genau ist, so sind nur die erstern Ziffern davon gültig, und zwar nur bis auf die Ordnung $= (2n-2)$ d. i. $= n+2$, wenn seine höchste Ziffer von der Ordnung $-n$ ist. Z. E. Da hier $n = -2$, so ist $-2n+2 = -4+2 = -2$, folglich $p = 0,05$.

4) Nun setze man in (A) $p = 0,05 + q$, so ist

$$\begin{array}{rll} p^3 = & 0,000125 & + 0,0075 \\ +24p^2 = & 0,06 & + 2,4 \\ +142p = & 7,1 & +142,0 \\ -8 = & -8,0 & \end{array}\Big\}\begin{array}{l} q \\ +0,15 \\ +24,0 \end{array}\Big\}q^2 + q^3$$

$$0 = -0,839875 + 144,4075 \cdot q + 24,15 \cdot q^2 + q^3 \quad (B)$$

In dieser Gleichung (B) lasse man wieder die höhern Potenzen von q weg und setze $q = \frac{0,839875}{144,4075} = 0,0058$, wovon beide Ziffern gültig sind, weil hier $n = 3$ ist.

5) Nun setze man in (B) $q = 0,0058 + r$, wodurch man die Gleichung (C) erhält, und hieraus, wie vorher,

$r =$

$r = 0,00001038$. So könnte man die Arbeit immer weiter fortsetzen, aber man kann sich mit Obigem schon begnügen, daß man also die gefundenen Theile der Wurzel nur noch zu addiren hat, nämlich

$$\begin{aligned} x &= 8 = 8,0 \\ +p &= 0,05 \\ +q &= 0,0058 \\ +r &= 0,00001038 \\ x &= 8,05581038 \end{aligned}$$

Anm. Diese Auflösung ist aus Hrn. Hofr. Kästners Anal. endlicher Größen §. 321. genommen, woselbst man auch ihren Beweis findet, den wir hier übergehen müssen. Die Probe der Operation ist, wenn man das gefundene a ohne die Ergänzungen, und nochmals das a mit den gefundenen Ergänzungen, anstatt x in die gegebene Gleichung setzt, da dann der Gleichung Werthe, die man in beiden Annahmen erhält, einerley Zeichen haben müssen, aber der zweyte Werth der Null näher seyn muß, als der erste.

§. 130. Zus. Nach eben der Methode §. 129. lassen sich aus Zahlen die Wurzeln ziehen. Z. E. Man weiß, daß $\sqrt[3]{30}$ zwischen 3 und 4 ist, und setze daher $\sqrt[3]{30} = 3 + p$, folglich $30 = (3+p)^3 = 27 + 27p + 9p^2 + p^3$, und wenn man das letzte Glied als sehr klein wegläßt, $0 = -3 + 27p + 9p^2$, woraus man findet $p = \frac{3}{27+9} = 0,1071$. Demnach ist zunächst $\sqrt[3]{30} = 3,1071$.

Der

Der dritte Abschnitt.

Von den Functionen.

1. Hauptarten der Functionen.

§. 131. Erkl. Eine Größe heißt veränderlich, variabilis, der man alle bestimmten Werthe ohne Ausnahme nach einander geben kann, zum Unterschiede von einer beständigen, constans, die immer ihren einmaligen Werth unveränderlich beybehält, was auch für Werthe auf jene kommen.

Gewöhnlich werden die veränderlichen Größen durch die letzten Buchstaben des Alphabets z, y, x u. s. w. bezeichnet, die beständigen aber durch die erstern a, b, c u. s. w.

§. 132. Zus. 1. Die Verbindung veränderlicher Größen mit beständigen, z. E. $a + x = y$, oder $ax - x^2 = y^2$, bestimmt für jeden Werth von x einen oder etliche Werthe von y.

§. 133. Zus. 2. Jede Gleichung zwischen zwey unbekannten Größen, z. E. $x + y = a$ (Alg. §. 70.) drückt das Gesetz aus, nach welchem die eine von der andern abhängt, und welches man aus der Gleichung erkennet, ohne bestimmte Werthe der unbekannten Größen anzugeben; auch erfodern oft die wichtigsten Untersuchungen diese gar nicht, son-

ſondern nur jenes. Von dieſer Art ſind z. E. die Formeln für die Summe der arithmetiſchen und geometriſchen Progreſſionen (Ar. §. 339. 406.) und überhaupt alle allgemeine Formeln, dergleichen im erſten Abſchnitte der Analyſis mehrere gegeben worden ſind. Die in ſolchen allgemeinen Geſetzen vorkommende Größen ſind unzählig vielen Veränderungen unterworfen, ohne daß dadurch die allgemeinen Geſetze ſelbſt im geringſten geändert würden.

§. 134. Erkl. Eine Function, functio, einer veränderlichen Größe x, heißt jeder Ausdruck, der auf irgend eine Art aus dieſer veränderlichen x und aus beſtändigen Größen beſteht. Z. E. $a+x$; x^n; $ax-x^2$; $ax+bx^2+cx^3$, u. ſ. w. ſind Functionen von x.

§. 135. Anm. Iſt die Function ein zuſammengeſetzter Ausdruck, der mehrere Potenzen der veränderlichen Größe x enthält, ſo muß er eben ſo, wie eine zuſammengeſetzte Gleichung §. 41. geordnet werden.

§. 136. Zuſ. 1. Setzt man die Gleichung $ax+bx^2+cx^3=y$, ſo iſt y die Function der veränderlichen Größe x, ſelbſt eine veränderliche Größe, weil ſie dadurch, daß man der x unzählig viele beſtimmte Werthe giebt, ſelbſt unzählig viele beſtimmte Werthe erhalten kann.

§. 137. Anm. Jeder Ausdruck in Form einer Function, der aber eine beſtändige Größe anzeigt, hat blos den Schein einer Function. Dergleichen iſt $x^0=1$; $1^x=1$; $\frac{a^2-ax}{a-x}=a$ u. ſ. w.

§. 138. Zuſ. 2. Iſt y eine Function von x, ſo iſt auch wiederum x eine Function von y.

Denn aus der Gleichung, welche y durch x und beſtändige Größen beſtimmt, kann allemal eine andre Gleichung hergeleitet werden, welche x durch y und beſtändige Größen beſtimmt, folglich x zu einer Function von y macht.

Z. E. Die Gleichung $ax+by+c=o$, zwischen zwey veränderlichen Größen x, y, giebt $y=\frac{-ax-c}{b}$ sowohl als auch $x=\frac{-by-c}{a}$. Oder: setzt man $by+c=A$, und $ax+c=B$, wo also A eine Function von y, und B eine Function von x ist, so hat man $ax+A=o$, und $by+B=o$.

§. 139. Anm. Die Art, wie in dem Beyspiele §. 138. der Ausdruck abgekürzt worden, ist zu bemerken. Ein andres Beyspiel hievon gebe die Gleichung $ax^2+bx+cy^2+dy+exy+f=o$. Setzt man hier $d+ex=P$ und $ax^2+bx+f=Q$ so erhält man $cy^2+Py+Q=o$, wo P und Q Functionen von x bedeuten, d. i. Ausdrücke, die aus x und bekannten Größen verschiedentlich zusammengesetzt sind.

§. 140. Zus. 3. Sind y und x Functionen von z, so sind sie auch Functionen von einander. Denn aus dem ersten folgt, daß auch z eine Function von y und von x sey, wodurch eine Gleichung zwischen y und x gegeben wird, aus welcher sich der Werth von y durch x, und der Werth von x durch y bestimmen läßt.

§. 141. Erkl. Aehnliche Functionen sind, die völlig auf einerley Art bestimmt werden. Z. E. $Z=a+bz+cz^2$, und $Y=a+by+cy^2$; oder $Z'=az^2Z+b$, und $Y'=ay^2Y+b$; wobey man sagt, Z sey eine solche Function von z, als Y von y ist, da sich dann die erste in die zweyte verwandeln muß, wenn man in jener y statt z setzt.

§. 142. Erkl. Functionen sind von einerley Form, wenn sie einerley Potenzen derselben veränderlichen Größe x in einerley Gliedern enthalten. Z. E. $M=1+ax+bx^2+bx^3\ldots+lx^m$; $N=1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3\ldots+\lambda x^n$.

§. 143.

§. 143. Erkl. Eine Function ist einförmig, uniformis, oder vielförmig, multiformis, je nachdem sie für jeden Werth der veränderlichen Größe auch nur einen oder mehrere bestimmte Werthe erhält, da sie dann hienach zwey, drey, vier u. s. w. förmig heißt. Z. E. $ax+bx^2+cx^3=y$ ist einförmig; aber $ax-x^2=y^2$ zweyförmig, weil $y=\pm\sqrt{(ax-x^2}$ ist, folglich für jeden bestimmten Werth von x einen doppelten Werth von y giebt.

§. 144. Erkl. Die Function Z einer veränderlichen Größe heißt entwickelt, explicita, oder verwickelt, implicita, je nachdem Z durch eine reine, oder durch eine gemischte Gleichung angegeben wird. Z. E. $Z=gz^n$ oder $Z^2=az^m+bz^n$ sind entwickelt, aber $Z^2=az^2Z-bz^3$ ist verwickelt.

§. 145. Zus. 1. Kann man die Gleichung, worin die Function Z verwickelt ist, auflösen, d. i. ihre Wurzel Z finden, so wird dadurch die Function Z entwickelt. Z. E. für die dritte Function §. 144. setze man $az^2=P$, und $bz^3=Q$, daß $Z^2=PZ-Q$, oder $Z^3-PZ+Q=0$ wird, wo P, Q, entwickelte Functionen von Z bedeuten, so hat man $Z=\frac{1}{2}P\pm\sqrt{(\frac{1}{4}P^2-Q)}$.

§. 146. Zus. 2. Hienach bleiben nur noch diejenigen Functionen verwickelt, die durch Gleichungen gegeben sind, welche sich nicht auflösen lassen.

§. 147. Zus. 3. Bedeuten in der Function Z §. 145, P, Q, einförmige Functionen von z, so erhält Z zwey bestimmte Werthe für jeden bestimmten Werth, den man z giebt, und ist also zweyförmig, §. 143. Solchergestalt entstehen 2, 3, 4 ꝛc. förmige Functionen aus der Entwickelung quadratischer, cubischer, biquadratischer Gleichungen, daß überhaupt die Function so vielförmig ist, als ihre Gleichung Wurzeln hat. Die allgemeine Form einer

aförmigen Function von z, wenn n eine ganze Zahl ist, und P, Q, R, ... T einförmige Functionen von z bedeuten, ist also

$$Z^n + PZ^{n-1} + QZ^{n-2} + TZ^{n-n} = 0$$

§. 148. Erkl. Wird eine veränderliche Größe Z durch eine andre z so bestimmt, daß jeder bestimmte Werth von z einen bestimmten Werth, oder auch eine gewisse Anzahl bestimmter Werthe von Z giebt, so heißt die Function Z algebraisch, welche durch eine algebraische Gleichung, d. i. durch eine Gleichung von bestimmter Ordnung von der Form §. 147. angegeben werden kann. Jede andre Function heißt transcendent, welche sich, da jedem z eine unzählige Menge von Z zugehört, durch keine algebraische Gleichung angeben läßt, sondern allemal eine Gleichung von unzähligen Abmessungen erfodert. Z. E. $Z = a + bz + cz^2 \ldots$ in infin.

§. 149. Anm. Zwar muß auch wohl eine algebraische Function $\frac{a}{1-x} = q$, (d. i. $1 = q - qx$) durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden, (Ar. §. 189.) wenn man sie nämlich durch lauter Potenzen von x mit ganzen b jahten Exponenten ausdrücken will; aber eine transcendente Function erfodert allemal eine unendliche Reihe. Auf ähnliche Art erfodern manche Brüche eine unendliche Theilung der Einheit, wenn man sie in Decimaltheilchen ausdrücken will, ohne deshalb irrational zu seyn, da Irrationalzahlen eine solche Theilung allemal erfodern.

§. 150. Erkl. Eine algebraische Function heißt rational, wenn die veränderliche Größe unter keinem Wurzelzeichen vorkömmt, sonst aber irrational. Z. E. $ax^3 - bx^5$ ist rational; aber $a + \sqrt{(a^2 - x^2)}$ oder $\sqrt[3]{(a - 2x + x^2)}$ irrational. Jene wird in eine gebrochene und ganze eingetheilt, je nachdem die veränderliche Größe als Divisor darin vorkömmt, oder nicht.

Z. E.

z. E. $M = a + bx + cx^2 \ldots + lx^n$, und $N = \alpha + \beta x + \gamma x \ldots \lambda x^n$ sind ganze rationale Functionen, aber $\frac{M}{N}$ ist eine gebrochene.

§. 151. Anm. Die Lehre von den Functionen ist durch die ganze Mathematik von grosser Wichtigkeit. Man findet sie in L. Eulleri introduct. in analysin infinitor. Tom. I. deutlich und vollständig abgehandelt. Hier genüge es, einen vorläufigen Begriff von den Functionen gegeben zu haben, und nur noch ihrer Auflösung in unendliche Reihen in etwas zu gedenken.

2. Auflösung der Functionen in Reihen.

§. 152. Lehrs. Wird eine Function, $a + bz + cz^2 + dz^3 \ldots$ für jeden Werth von z allemal $= 0$, so muß jeder ihrer Coefficienten $= 0$ seyn.

Bew. Wären die Coefficienten nicht $= 0$, so hätte die unbekannte Größe z nicht jeden Werth, sondern je nachdem die Gleichung entweder wo abbricht, oder ohne Ende fortgeht, im ersten Falle nur eine gewisse Anzahl, im zweyten eine unzählige Menge von bestimmten Werthen, vergl. §. 150. Soll also die Gleichung für jeden Werth von z stattfinden, so kann dies nicht in den Werthen von z gegründet seyn, sondern muß an den Coefficienten liegen, d. i. von diesen muß jeder $= 0$ seyn.

Denn kann man für z alle möglichen Größen, wenigstens so kleine als man will, annehmen, also auch $z = 0$ setzen, so ist offenbar $a = 0$, und muß, da es von z gar nicht abhängt, auch für jeden andern Werth von z noch $= 0$ bleiben, daß also auch für jeden Werth von z die Function $bz + cz^2 + dz^3 \ldots = 0$, oder mit z dividirt, $b + cz + dz^2 \ldots = 0$ ist. Hieraus schließt man wieder eben so, daß $b = 0$, u. s. w. von jedem folgenden Coefficienten.

§. 153. Zuſ. Der Satz §. 152. gilt auch von der allgemeinſten Form $o = Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} \ldots$ wo die Expoſitionen auch verneinte und gebrochene Zahlen ſeyn können.

Denn dividirt man mit x^m, ſo hat man $o = A + Bx^d + Cx^{2d} \ldots$ Wäre nun hier d eine bejahte ganze oder gebrochene Zahl, ſo ſetze man $x^d = y$, welches eine Function wie §. 152. giebt. Wäre d verneint, etwa $= -e$, ſo ſetze man $\frac{1}{x^e} = y$, folglich $x^{-e} = y^e$, alſo $o = A + By^e + Cy^{2e} \ldots$ wo man x ſo groß als man will, folglich y ſo klein als man will annehmen kann, da dann der Beweis §. 152 wieder ſtattfindet.

§. 154. Anm. Auf dieſen Lehrſatz gründet ſich die Methode, gebrochene oder irrationale Functionen unter die Form ganzer und rationaler Functionen $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 \ldots$ in inf. zu bringen, d. i. ſie in ohne Ende fortlaufende Reihen aufzulöſen, bey welchen es uns nicht ſowohl um die einzelnen Glieder ſelbſt, ſondern blos um das allen Gliedern gemeinſchaftliche Geſetz zu thun iſt. In der hiezu angenommenen Reihe laſſen ſich die Coëfficienten A, B, C u. ſ. w. gar leicht beſtimmen, daher es auf die Potenzen der x in den Gliedern, welche die Geſtalt der Reihe, forma ſerici, geben, hauptſächlich ankömmt. Sollte man indeß die Geſtalt der Reihe nicht richtig angenommen haben, ſo müßte ſich in der Rechnung gar bald ein Widerſpruch zeigen, weil alsdann die angenommene Gleichung nicht ſtattfinden könnte.

§. 155. Aufg. Die gebrochene Function $\frac{1}{a+x}$ in eine unendliche Reihe aufzulöſen.

Auflöſ. Man ſetze $\frac{1}{a+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots$ Denn da die Gleichung für jeden Werth von x ſtattfinden ſoll, ſo muß die Reihe aus den Potenzen von x nach der Ordnung beſtehen; nur darf x nicht im erſten

Gliede

Glieder der Reihe seyn, weil sonst für $x=o$ die Reihe verschwinden müßte, ohne daß der gegebene Bruch, dem die Reihe gleich seyn soll, verschwindet. Demnach ist die Gestalt der Reihe richtig angenommen, und man hat nur noch die Coëfficienten zu bestimmen.

Hiezu multiplicire man beide Seiten der Gleichung mit $a+x$, so erhält man

$$1 = aA + aBx + aCx^2 + aDx^3 \ldots$$
$$+A \quad +B \quad +C$$

folglich, wenn man die 1 von beiden Seiten subtrahirt,

$$o = (aA-1) + (aB+A)x + (aC+B)x^2 + (aD+C)x^3 \ldots$$

Nun ist nach §. 152. $aA-1=o$, folglich $A=\frac{1}{a}$; $aB+A=o$, folglich $B=-\frac{A}{a}=-\frac{1}{a^2}$; $aC+B=o$, folglich $C=-\frac{B}{a}=+\frac{1}{a^3}$; $aD+C=o$, folglich $D=-\frac{C}{a}=-\frac{1}{a^4}$ u. s. w.

Demnach ist $\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}\ldots$, wo das allgemeine Glied $\pm\frac{x^{n-1}}{a^n}$, und n eine Function von n ist.

§. 156. Anm. 1. Durch diese Methode erhält man eben die Reihe für den gegebenen Bruch, die man erhält, wenn man den Zähler mit dem Nenner dividirt. (Ar §. 189.) Mit der Function $\frac{1}{a-x}$ verfährt man auf eben die Art. Für $\frac{c-x}{a+x}$ d. i. $(c-x)\frac{1}{a+x}$ multiplicirt man die gefundene Reihe mit $c+x$.

§. 157. Anm. 2. Da in dieſer Reihe jedes folgende Coefficient aus dem nächſtvorhergehenden beſtimmt wird, daß man ſie alſo alle weiß, wenn man nur den erſten kennet, ſo heißt ſie, und jede andre von ähnlicher Beſchaffenheit, eine zurückkehrende Reihe, ſeries reverſa, weil man bey Beſtimmung der folgenden Glieder immer zu dem vorhergehenden zurückkehrt.

§. 158. Anm. 3. Man könnte auch für die gegebene Function $\frac{1}{a-x}$ §. 155. die Reihe ſetzen $A+Bx^{-1}+Cx^{-2}\ldots$ oder auch $A+Ba+Ca^2\ldots$ oder $A+Ba^{-1}+Ca^{-2}\ldots$

§. 159. Anm. 4. Allemal muß die Reihe aus der Folge der Potenzen eines Gliedes des Nenners beſtehen. Z. E. $\frac{1}{a-x^2}=A+Bx^2+Cx^4+Dx^6$, und $\frac{1}{a-\sqrt{x}}=A+Bx^{\frac{1}{2}}+Cx+Dx^{\frac{3}{2}}+Ex^2+Fx^{\frac{5}{2}}\ldots$

§. 160. Anm. 5. In der Function $\frac{1-x}{1+x+x^2}$ ſetze man $x+x^3=y$, ſo findet man $\frac{1}{1+y}=1-y+y^2-y^3\ldots$ und ſetzet nun anſtatt y, y^2, y^3 u. ſ. w. ihre Werthe.

§. 161. Aufg. Die irrationale Function $\sqrt{(a+x)}$ in eine unendliche Reihe aufzulöſen.

Auflöſ. Man ſetze $\sqrt{(a+x)}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4\ldots$ weil die Reihe aus der Folge der Potenzen eines Gliedes der Wurzelgröße beſtehen, und für $x=0$, $\sqrt{a}=A$ ſeyn muß. Erhebt man nun beide Seiten der Gleichung ins Quadrat, ſo erhält man

$$a+x=A^2+2ABx+B^2x^2+2BCx^3+C^2x^4 \\ +2AC+2AD+2BD \\ +2AE$$

Subtrahirt man $a+x$, ſo kommt

$$0=(A^2-a)+(2AB-1)x+(B^2+2AC)x^2\ldots$$

Dem-

Demnach ist nach §. 152.

$A^2 - a = 0$, folglich $A = a^{\frac{1}{2}}$

$2AB - 1 = 0$, folglich $B = \frac{1}{2A} = + \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}$

$B^2 + 2AC = 0$, folglich $C = -\frac{B^2}{2A} = -\frac{1}{4a} : 2a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2.4.a^{\frac{3}{2}}}$

$2BC + 2AD = 0$, folglich $D = -\frac{2BC}{2A} = \frac{1.3}{2.4.6.a^{\frac{5}{2}}}$

$C^2 + 2BD + 2AE = 0$, folglich $E = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8.a^{\frac{7}{2}}}$

Demnach ist $\sqrt{(a+x)} =$

$$a^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{2.4.a^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3.x^3}{2.4.6.a^{\frac{5}{2}}} - \frac{1.3.5.x^4}{2.4.6.8.a^{\frac{7}{2}}} \ldots$$

§. 162. Anm. 1. Man erhält eben diese Reihe, wenn man aus $a+x$ die Quadratwurzel auszieht (Ar. §. 51.), oder wenn man in §. 13. x anstatt b, und $\frac{1}{2}$ anstatt n setzt.

§. 163. Anm. 2. Ist x gegen a sehr klein, z. E. $a = 100$, $x = 1$, so ist die Reihe sehr schnell convergent, daß man nur wenige von den ersten Gliedern gebraucht. Wäre aber $x > a$, so setze man $\sqrt{(a+x)} = A + Ba + Ca^2 \ldots$

§. 164. Anm. 3. Sollte man $\sqrt{(a^2+x)}$ in eine unendliche Reihe auflösen, so setze man diese Function $= A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 \ldots$

§. 165. Aufg. Aus einer Gleichung zwischen zwey veränderlichen Größen, die eine y durch eine Reihe, deren Glieder nach Potenzen der andern x geordnet sind, und deren Gestalt gegeben ist, zu finden.

Auflöſ. Man ſetze die angenommene Reihe anſtatt y in die gegebene Gleichung, und beſtimme die Coëfficienten wie §. 155.

Exempel. Es ſey die Gleichung $y^3 + a^2y + \frac{1}{2}axy - 2a^3 - x^3 = 0$ gegeben, und die angenommene Reihe $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots$ ſo iſt

$$\left.\begin{array}{llll} y^3 = A^3 & +3A^2B & +3AB^2 & +B^3 \\ & & +3A^2C & +6ACB \\ & & & +3A^2D \\ a^2y = a^2A & +a^2B & +a^2C & +a^2D \\ axy = & +aA & +aB & +aC \\ -2a^3 = & -2a^3 & & \\ -x^3 = & & & -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ x \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ x^2 \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ x^3 \ldots \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}$$

Hierdurch erhält man nach §. 152.

1) $A^3 + a^2A - 2a^3 = 0$, worin ſich, wie der Verſuch zeigt, $A = a$, folglich $A - a = 0$, ſetzen läßt. Hiemit die cubiſche Gleichung dividirt, giebt $A^2 + aA + 2a^2 = 0$, folglich $A = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(-2a^2 + \frac{1}{4}a^2)} = -\frac{1}{2}a \pm \frac{a}{2}\sqrt{-7} = (-1 \pm \sqrt{-7})\frac{a}{2}$, wo beide Werthe unmöglich ſind, daher nur der vorige $A = a$ bleibt.

2) $3A^2B + a^2B + aA = 0$, oder wenn man a anſtatt A ſetzt, $(3a^2 + a^2)B + a^2$, d. i. $4a^2B + a^2$, oder $4B + 1 = 0$, folglich $B = -\frac{1}{4}$.

3) $3AB^2 + 3A^2C + a^2C + aB = 0$. Setzt man hierin die bereits gefundenen Werthe für A und B, ſo erhält man $C = -\frac{1}{24}a$.

4) Auf eben die Art findet man $D = \frac{131}{5128^2}$ u. ſ. w. ſo viele

viele Coëfficienten der angenommenen Reihe, als man will.

§. 166. Anm. Bey dergleichen Rechnungen kömmt die ganze Schwierigkeit auf die richtige Gestalt der Reihe an, §. 154. vergl. §. 165. Hiezu dient unter andern das Newtonische Parallelogramm, worüber man befriedigende Entwickelungen in Herrn Hofr. Kästners Analysis endlicher Gröſsen §. 624 — 698 findet, welche auch in Pfeifferi aequationum speciosorum resolutio per series ope parallelogrammi Newtoniani. Tub. 1765. 4. vortreflich vorgetragen sind.

Der vierte Abschnitt.

Von den krummen Linien.

1. Gleichungen für Linien.

§. 167. Erkl. Die Gleichung für eine Linie in einer Ebene heißt eine Gleichung zwischen zwey veränderlichen Größen, und wird also durch eine Function, §. 134, gegeben.

§. 168. Exempel 1. (Fig. 225.) Von allen Punkten der Peripherie eines Kreises um C, lassen sich Linien, wie DEd, FGf, senkrecht auf den Durchmesser AB ziehen. Setzt man AB=a, jedes von A an abgeschnittne Stück AE =x, also das übrige EB=a—x, und jeden Perpendikel wie ED=y, da dann jedem x ein gewisses y zugehöret: so ist, weil vermöge der Natur des Kreises allemal $\frac{y}{x}=\frac{x}{AE}$. ED. EB, allgemein $y^2=ax-x^2$, eine Gleichung für den Kreis, die durch die zweyförmige Function von x gegeben wird.

§. 169. Exempel 2. (Fig. 224.) Es werde die gerade Linie VN von einer andern CD beliebig in O geschnitten, und in CD ein beliebiger Punkt A angenommen,

so

so daß also die Länge OA und der Winkel O gegeben sey. Von jedem beliebigen Punkte M der Linie VN ziehe man MP, welche die CD unter einem gegebenen Winkel MPO treffe. Mit dieser ziehe man durch A die AB parallel, welche auch gegeben ist, weil man im △AOB die Seite OA und die beiden anliegenden Winkel kennet. Nun ist vermöge der Natur gerader Linien für jeden angenommenen Punkt, dergleichen M ist, OA : AB = OP : PM. Setzt man also AO = m, AB = n, AP = x, PM = y, so ist allemal m : n = x : y, folglich $y = \frac{n}{m}x + n$, eine Gleichung für die gerade Linie, und wird durch die einförmige Function von x gegeben.

§. 170. Erkl. (Fig. 225.) Eine Linie, wie AB, auf welcher die Werthe von x genommen werden, §. 168, heißt die Abscissenlinie, die Stücken von ihr, wie AE, die Abscissen, und der Punkt, wie A, der Anfang der Abscissen. Die den Abscissen, wie AE, zugehörigen Linien, wie ED, heißen die Ordinaten, ordinatim applicatae; beide gemeinschaftlich Coordinaten, und zwar rechtwinkliche, wenn der Winkel AED, den sie einschließen, der Ordinatenwinkel, ein rechter ist.

§. 171. Zus. 1. Will man die Lage der Punkte in der Peripherie des Kreises bestimmen, so ist es zwar hinreichend, wenn sein Mittelpunkt C und sein Halbmesser CA gegeben ist; denn jede aus C gezogene und der CA gleichgemachte Linie, wie CM, bestimmt allemal einen Punkt M des Umkreises. Da aber dieses blos auf die Kreislinie eingeschränkt ist, so verlangt man allgemeinere Methoden, die bey jeder Art von Linien tauglich sind. Hiezu muß eine Linie AB, die Abscissenlinie, gegeben oder willkührlich angenommen werden, um zu bestimmen, welche Lage jeder

der Punkt einer gewiſſen Linie, dergleichen hier die Kreislinie iſt, gegen ſolche Linie habe, indem man für jeden Punkt E der Abſciſſenlinie eine Linie ED unter dem gegebenen oder angenommenen Ordinatenwinkel zieht. Kann man nun die Größe dieſer Linie beſtimmen, ſo hat man allemal einen Punkt D der Curve. Zu dieſer Beſtimmung aber dient die Gleichung für die Curve, die aus der Natur der Curve hergeleitet wird, §. 168.

§. 172. Zuſ. 2. Es wird nämlich in der Gleichung für eine Linie, §. 168. 169. durch einen beſtimmten Werth der Abſciſſe x, auch der Werth der Ordinate y, d. i. der Punkt der Linie beſtimmt, welcher dieſer Abſciſſe zugehört, ſo daß alle Endpunkte der y für alle x in ſolcher Linie liegen, oder man durch die ſo gefundenen Punkte aus freyer Hand die Linie, und zwar deſto genauer ziehen kann, je mehrere ſolcher Punkte man geſucht hat.

§. 173. Zuſ. 3. Die Ordinaten, die auf entgegengeſetzte Seiten der Abſciſſenlinie, ſo wie die Abſciſſen, die auf entgegengeſetzte Seiten ihres Anfangs fallen, ſind einander entgegengeſetzt. Nennt man daher (Fig. 224.) die Ordinaten über CD, und die Abſciſſen von A nach D bejaht, ſo ſind die Ordinaten wie RV, und die Abſciſſen wie AR, verneint.

§. 174. Zuſ. 4 (Fig. 225.) Da beym Kreiſe §. 168. die Ordinate eine zweyförmige Function der Abſciſſe, folglich $y = \pm r(ax - x^2)$ iſt, ſo kommen jeder Abſciſſen zwey gleiche einander entgegengeſetzte Ordinaten zu.

§. 175. Zuſ. 5. Da jeder Punkt der Linie in einer Ordinate iſt, welcher eine Abſciſſe zugehöret, durch die ſie mittelſt der Function beſtimmt wird, ſo iſt kein Punkt in der Linie, der ſich nicht durch die Gleichung beſtimmen ließe, und die Gleichung iſt alſo eine Definition der Linie,

aus

aus der sich alles, was der Linie zukömmt, herleiten lassen muß.

Hienach kann man z. E. sagen: der Kreis ist diejenige Linie, für die bey rechtwinklichen Coordinaten $y^2 = ax - x^2$ ist.

§. 176. Zus. 6. Da die Gleichungen für Linien die Lage ihrer Punkte gegen die Abscissenlinie bestimmen sollen, so ist es willkührlich, was für eine Abscissenlinie man annehmen will, wo der Anfang der Abscissen sey, und welchen Winkel die Coordinaten machen. Da aber Aenderungen in diesen Dingen auch Aenderungen in der Gleichung bewirken, so giebt es für eine und dieselbe Linie mehrere Definitionen, von denen sich aber eine auf die andere zurückführen läßt.

§. 177. Exempel 1. (Fig. 225.) Nimmt man den Anfang der Abscissen im Mittelpunkte C, und zieht für eine Abscisse CP die Ordinate PM, so ist CM der Halbmesser $= r$, und $y^2 = r^2 - x^2$ eine andere Definition des Kreises. Will man diese auf die vorige, wo A der Anfang der Abscissen war, bringen, so ist hier $CP = AP - AC = x - r$. Setzt man daher in die neue Gleichung $x - r$ anstatt x, so erhält man $y^2 = r^2 - (x^2 - 2rx + r^2) = 2rx - x^2$, wie §. 168.

§. 178. Exempel 2. (Fig. 224.) Es sey BT mit CD parallel, und in dieser $BS = AP = x$ genommen, daß $SM = y - n = z$ sey, so ist $z = \frac{m}{n}x$ eine andre Gleichung für dieselbe gerade Linie. Setzt man hierin $z = y - n$, so hat man $y - n = \frac{m}{n}x$, oder $y = \frac{m}{n}x + n$, wieder die vorige Gleichung §. 169.

§. 179.

§. 179. Aufg. (Fig. 226.) Es sey CAB der Durchschnitt eines Kegels durch die Axe, und werde von einer auf ihn senkrechten Ebene in DE geschnitten; man verlangt eine Gleichung für die Figur DFEG, worin die Ebene die Oberfläche des Kegels schneidet.

Auflös. 1) In DE nehme man einen beliebigen Punkt H, durch den ein Schnitt KFLG der Grundfläche parallel gehe, und die Ebene CAB in KL, die Ebene DFEG aber in FG schneide, daß also F und G in beiden Durchschnittsfiguren sind.

2) Da beide Ebenen auf CAB senkrecht sind, so ist auch ihr Durchschnitt FG auf CAB, folglich auch auf DE und KL senkrecht.

3) Da KFLG ein Kreis ist, und dessen Durchmesser KL, so ist, wegen des rechten Winkels bey H, $HK \cdot HL = HF^2$.

4) Zieht man DM, EN, mit KL parallel, so ist $DE : EN = DH : HK$, und $DE : DM = EH : HL$.

5) Setzt man nun die unveränderlichen Linien, $DE = a$, $EN = b$, $DM = c$, und die veränderlichen, $DH = x$, $HE = a - x$, $HF = y$, so ist in (4) $a : b = x : \frac{bx}{a}$, und $a : a - x = c : \frac{c(a-x)}{a}$, folglich in (3) $\frac{bcx(a-x)}{a^2} = y^2$, oder $\frac{bc}{a}x - \frac{bc}{a^2}x^2 = y^2$, die gesuchte Gleichung für die Durchschnittsfigur DFEG.

§. 180. Zus. 1. Man gedenke sich, daß die Linie DE um D gegen A gedrehet werde, bis sie mit CB parallel sey, so wird DE oder a sowohl, als EN oder b unendlich groß, und die Verhältniß a:b verwandelt sich in die Verhält-

hältniß CM : DM, oder wenn man CM = d ſetzt, in die Verhältniß d : c. Hierdurch erhält man die Gleichung $\frac{c^2x}{d} = y^2$ für den neuen Durchſchnitt, oder eine Linie mit zwey ins Unendliche fortlaufenden Schenkeln.

§. 181. Zuſ. 2. Drehet ſich die Linie DE um D noch weiter, ſo ſchneidet ſie die verlängerte BC auf der andern Seite, und es werden alsdann a und b verneint, weil ſie auf die entgegengeſetzte Seite fallen. Hierdurch wird die Gleichung $-\frac{bc}{a}x + \frac{bc}{a^2}x^2 = y^2$ für dieſen neuen Durchſchnitt, oder eine Linie mit vier ins Unendliche fortlaufenden Schenkeln.

§. 182. Anmerk. Man nennt dieſe drey Linien Kegelſchnitte, lectiones coni, weil ſie, wie der Kreis, durch Schnitte des Kegels erhalten werden können. Dieſe Benennung kömmt von den Alten, und wird von den Neuern beybehalten, ob dieſe gleich ſolche Linien, ſo wie den Kreis, außer der Beziehung auf den Kegel, als blos in einer Ebene gezogen betrachten. Es heißt aber insbeſondere die Linie §. 180 die Parabel, weil das Quadrat der Ordinate der mit einer beſtändigen Linie multiplicirten Abſciſſe gleich iſt: die Linie §. 179 die Ellipſe, weil jenes Quadrat kleiner iſt, und die Linie §. 181 die Hyperbel, weil jenes Quadrat größer iſt. Dieſe beſtändige Linie heißt der Parameter, und iſt für die Parabel $\frac{c^2}{d}$, für die Ellipſe und Hyperbel aber $\frac{bc}{a}$. Außer dieſen drey Linien aber geben die Schnitte des Kegels, die nicht mit der Grundfläche parallel geſchehen, keine andre. Denn die Linie DE iſt entweder mit der Seite CB parallel oder nicht, und ſchneidet im letztern Falle die Seite CB entweder dieſſeits C, oder jenſeits.

§. 183. Aufg. Die der Gleichung $y = \frac{b}{a}x + c$ zugehörige Linie zu finden.

Auflöſ. Es ſey (Fig. 224.) CD die Abſciſſenlinie und A der Anfang der Abſciſſen.

1) Für $x=o$ iſt $y=c$. Zieht man alſo AB unter beliebigem Winkel, und macht ſie der c gleich, ſo muß der Punkt B in der geſuchten Linie ſeyn.

2) Für $y=o$ iſt $-c=\frac{bx}{a}$, folglich $\frac{-ac}{b}=x$. Macht man alſo $AO=\frac{ac}{b}$, ſo iſt der Punkt O auch in der Linie.

3) Da $y-c=\frac{bx}{a}$, folglich $a(y-c)=bx$: ſo iſt $y-c:x=b:a=\frac{bc}{b}:\frac{ac}{b}=AB:AO$. Setzt man alſo $x=AP$, ziehet PM mit AB parallel, ſo findet man nach obiger Proportion SM, folglich jeden dritten Punkt M in der geſuchten Linie, welcher mit den zuvor gefundenen Punkten B, O, in gerader Linie ſeyn muß, wenn obgedachte Proportion ſtattfinden ſoll. Demnach muß die gegebene Gleichung einer geraden Linie zugehören.

§. 184. Zuſ. Da die gegebene Gleichung alle andern in ſich begreift, worin x und y in der erſten Potenz, und ohne mit einander multiplicirt zu ſeyn, vorkommen, alſo eine allgemeine Gleichung vom erſten Grade iſt, ſo muß jeder Gleichung vom erſten Grade die gerade Linie zugehören.

§. 185. Anm. Aus den Beyſpielen §. 168. 169. 179. ſieht man, wie ſich für eine Linie, deren Eigenſchaften man kennet, eine Gleichung machen, oder für ſolche Linie eine Function finden laſſe. Das Beyſpiel aber §. 183. zeigt die Möglichkeit, aus einer gegebenen Function auf die ihr zugehörige Linie zu kommen. Letzteres eröffnet ein weites Feld zu Unterſuchungen, da überhaupt jeder Function eine Linie zugehört, und ſich daraus herleiten läßt, welches auch der vorzüglichſte Gegenſtand der nun folgenden Lehren ſeyn wird, die aber nur auf Gleichungen zwiſchen zwey veränderlichen

lichen Gränzen eingeschränkt sind, und nur Betrachtungen einzelner besonders merkwürdiger Curven enthalten können. Denn die allgemeine Lehre von den Curven ist von gar großem Umfange, und muß aus besonders hiezu verfaßten Büchern erlernt werden, dergleichen L. Euleri introductio in analysin infinitor. Tom. II. ist. Nur einige allgemeine Begriffe hier vorläufig noch anzuzeigen, möchte doch wohl den Anfängern dienlich seyn.

§. 186. Erkl. Eine Linie heißt algebraisch (auch geometrisch) oder transcendens (auch mechanisch), je nachdem für sie eine algebraische Gleichung gegeben werden kann, oder nicht. Vergl. §. 148.

Bey jener kann die Lage ihrer Punkte blos durch gerade Linien bestimmt werden, bey dieser nicht.

§. 187. Erkl. Eine algebraische Linie ist von der nten Ordnung, wenn ihre Gleichung n Abmessungen hat. Auch nennt man eine Curve vom nten Geschlechte, wenn ihre Gleichung $n+1$ Abmessungen hat.

Hienach ist z. E. die gerade Linie eine Linie der ersten Ordnung §. 183, der Kreis aber eine Linie der zweiten Ordnung, oder eine Curve des ersten Geschlechts, §. 168. Höhere Geschlechter sind, welche das erste, oder höhere Ordnungen, welche die zweyte übersteigen.

§. 188. Erkl. Die Linien der zweyten Ordnung, oder die Curven des ersten Geschlechts, heißen Kegelschnitte, sectiones coni, weil man sie auch durch Schneidung des Kegels erhalten kann. Insbesondere heißen sie Apollonische Kegelschnitte, (von denen Apollonius handelt) um sie von den höhern Kegelschnitten zu unterscheiden, für welche die gemeinen Gleichungen allgemeiner gemacht werden. Z. E. $y^{m+1} = ax^m - x^{m-1}$, und $y^m = a^{m-1}x$, geben den gemeinen Kreis, und die Apollonische Parabel, wenn man $m=1$ setzt. Und $ay^{m+1} = bx^m(a \mp x)^n$ geben die Apollonische

Ellipse und Hyperbel, wenn man m und n = 1 setzt. Setzt man in einer dieser allgemeinen Gleichungen für m und n andre Werthe, so bezeichnen sie andre Curven, die aber zusammen eine Familie ausmachen.

§. 189. Erkl. Ein Durchmesser der Curve heißt jede gerade Linie, welche die parallelen Sehnen der Curve halbirt, und insbesondere die Axe, wenn dieselbe auf diesen Sehnen senkrecht ist. Der Scheitel der Curve heißt der Punkt, worin sie den Durchmesser schneidet. Schenkel, rami, der Curve sind die vom Scheitel zu beiden Seiten ausgehenden Theile der Curve.

2. Von der Parabel.

§. 190. Erkl. Parabel heißt diejenige Linie, für die bey rechtwinklichten Coordinaten $y^2 = px$ ist. Die beständige Linie p, heißt der Parameter.

§. 191. Zus. 1. Da $x : y = y : p$, d. i. die Ordinate die mittlere Proportionallinie zwischen Parameter und Abscisse ist, so läßt sich für jedes x die Ordinate y, folglich jeder Punkt der Parabel durch die gemeine Geometrie bestimmen. (Geom. §. 265.)

Z. E. (Fig. 227.) sey AE der Parameter, AP eine beliebige Abscisse, und PM, AG senkrecht, so bestimmt ein halber Kreis über EP die Größe von AG, folglich von PM.

§. 192. Zus. 2. Da $y = \pm\sqrt{px}$, so sind jeder Abscisse wie AP, zwey entgegengesetzte gleiche Ordinaten PM Pm, zugehörig. Die Alten nannten daher die Sehnen der Parabel wie Mm, ordinatas, und ihre Hälften semiordinatas.

§. 193. Zus. 3. Für $x = 0$ ist auch $y = 0$, d. i. die Pa-

Parabel schneidet die Axe im Anfange der Abscissen A, welcher also der Scheitel der Parabel ist.

§. 194. Zus. 4. Für jedes positive x ist auch px positiv, und wächst mit x zugleich, folglich auch $\sqrt{px}$ oder $\pm y$ ohne Ende, d. i. die Schenkel der Parabel gehen zu beiden Seiten der Axe ohne Ende fort, und immer weiter aus einander.

§. 195. Zus. 5. Für jedes negative x ist auch px negativ, folglich unmöglich, d. i. es giebt jenseits keine Ordinate, und die ganze Parabel liegt blos diesseits des Perpendikels GH.

§. 196. Zus. 6. Sind für zwey beliebige Abscissen AP, AQ, die Ordinaten PM, QN, so ist $PM^2 = p.AP$, und $QN^2 = p.AQ$, folglich $AP : AQ = PM^2 : QN^2$, und $PM : QN = \sqrt{AP} : \sqrt{AQ}$, d. i. die Abscissen verhalten sich wie die Quadrate der Ordinaten, und die Ordinaten wie die Quadratwurzeln aus den Abscissen.

§. 197. Erkl. Der Brennpunkt, focus, heißt der Ort der Axe, wo die Ordinate dem halben Parameter gleich ist, d. i. wo $FI = \frac{1}{2}p$.

§. 198. Zus. 1. Da $p : AF = FI^2 = \frac{1}{4}p^2$, so ist $AF = \frac{1}{4}p$, d. i. der Brennpunkt steht vom Scheitel um den vierten Theil des Parameters ab.

§. 199. Zus. 2. Da $FM^2 = PM^2 + PF^2 = PM^2 + (AP - AF)^2$, d. i. $FM^2 = px + x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2 = x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$: so ist $FM = x + \frac{1}{4}p$ der Abstand jedes Punkts der Parabel vom Brennpunkte.

Hiernach lassen sich Punkte der Parabel für jede Abscisse auf folgende Art finden. Auf einer geraden Linie AQ mache man $AF = \frac{1}{4}p$ für den Brennpunkt F §. 198. Für eine beliebige Abscisse AP ziehe man durch P ein Perpendikel Mm, und aus F mit dem Halbmesser $AP + \frac{1}{4}p$ die Durchschnitte M, m.

3. Von der Ellipse.

§. 200. Erkl. Ellipse heißt diejenige Linie, für die bey rechtwinklichten Coordinaten $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ ist. Von den beständigen Größen heißt p der Parameter, und a die große Axe, axis transversus.

§. 201. Zus. 1. Für $y = 0$ ist $x = 0$, aber auch $\frac{px^2}{a} = px$, d. i. $\frac{x}{a} = 1$, folglich $x = a$.

Ist demnach (Fig. 229.) A der Anfang der Abscissen, und $AB = a$, so sind A und B in der Ellipse, folglich ihre Scheitel, und deren Abstand ist die große Axe.

§. 202. Zus. 2. Da $y = \pm\sqrt{\left(px - \frac{px^2}{a}\right)}$ ist, so sind jeder Abscisse zwey entgegengesetzte gleiche Ordinaten zugehörig, und die große Axe theilt die Ellipse in zwey congruente Theile.

§. 203. Zus. 3. Für $x = \frac{1}{2}a$ ist $y^2 = \frac{1}{2}ap - \frac{1}{4}ap = \frac{ap}{4}$, folglich $y = \pm\frac{\sqrt{ap}}{2}$.

§. 204. Erkl. Die Mitte der großen Axe C heißt der Mittelpunkt der Ellipse, und der Perpendikel Dd durch solchen Mittelpunkt die kleine Axe, axis conjugatus.

§. 205. Zus. 1. Setzt man die kleine Axe $Dd = c$, so ist $c^2 = ap$ §. 203, folglich $\frac{c^2}{a} = p$, oder $a : c = c : p$, d. i. der Parameter ist die dritte Proportionallinie zu der großen und kleinen Axe.

§. 206.

§. 206. Zuſ. 2. Setzt man anſtatt p ſeinen Werth aus §. 205 in die Gleichung §. 200: ſo erhält man $y^2 = \frac{c^2x}{a} - \frac{c^2x^2}{a^2}$, eine Gleichung für die Ellipſe aus der groſſen und kleinen Axe.

§. 207. Zuſ. 3. Nimmt man den Anfang der Abſciſſen im Mittelpunkte C, daß CP $= \pm u$, folglich $x = \frac{1}{2}a - u$, und ſetzt dieſen Werth anſtatt x in die Gleichung §. 206, ſo erhält man $y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}$, eine Gleichung für die Ellipſe aus dem Mittelpunkte.

§. 208. Zuſ. 4. Iſt $u = 0$, ſo iſt $y = \frac{1}{2}c$; je gröſſer u iſt, deſto kleiner wird y §. 207, d. i. CD iſt die gröſte Ordinate, und jede andre deſto kleiner, je weiter ſie von C iſt.

§. 209. Zuſ. 5. Für $u = \pm\frac{1}{2}a$ iſt $y = 0$, und für $u > \frac{1}{2}a$ wird y unmöglich, §. 207, d. i. die ganze Ellipſe iſt in der Figur 229 enthalten.

§. 210. Zuſ. 6. Gleiche u zu beiden Seiten des Mittelpunkt geben einerley y §. 207, d. i. die kleine Axe theilt ſo wie die groſe Axe §. 202, die Ellipſe in zwey congruente Theile, daß alſo die vier Quadranten congruent ſind.

§. 211. Zuſ. 7. Aus §. 207. folgt $u^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2y^2}{c^2}$ $= a^2\left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{c^2}\right)$ eine Gleichung für die Ellipſe aus verwechſelten Axen und Coordinaten, d. i. wenn man die Abſciſſen auf der kleinen Axe nimmt, daß CE=GH =y, und EG=CH=u wird.

§. 212. Zuſ. 8. Iſt a=c, ſo wird aus §. 207. $y^2 = \frac{1}{4}c^2 - u^2$, und aus §. 205. c=p, d. i. die Ellipſe wird ein Kreis, deſſen Durchmeſſer a=c=p.

§. 213. Aufg. Die Verhältniß der Ordinaten zu finden.

Auflſ. Sind (Fig. 329.) für zwey beliebige Abſciſſen AP, AQ, die Ordinaten PM, QN, ſo iſt aus §. 200 $PM^2 = \frac{P}{a}(a.AP - AP^2)$ und $QN^2 = \frac{P}{a}(a.AQ - AQ^2)$ folglich $PM^2 : QN^2 = AP(a - AP) : AQ(a - AQ) = AP.PB : AQ.QB$, d. i. die Quadrate der Ordinaten verhalten ſich wie die Rectangel aus den Segmenten der großen Axe.

§. 214. Aufg. Den Brennpunkt der Ellipſe zu finden.

Auflſ. Für den Brennpunkt F iſt $y^2 = \frac{1}{4}p^2$ §. 197. $= \frac{c^4}{4a^2}$ §. 205. folglich $\frac{1}{4}a^2 - \frac{c^2}{a^2}.CF^2 = \frac{c^4}{4a^2}$ §. 207. folglich $\frac{1}{4}a^2 - CF^2 = \frac{1}{4}c^2$, folglich $\frac{a^2 - c^2}{4} = CF^2$, und $CF = \pm\frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2}$, welches zwey Brennpunkte F, f auf entgegengeſetzten Seiten in gleicher Weite vom Mittelpunkte C giebt. Vergl. §. 210. Man ſetze dieſe Weite CF, oder Cf, $= e$.

§. 215. Zuſ. 1. Die Weite der Brennpunkte vom Scheitel, AF und Af, iſt $= \frac{1}{2}a \pm e = \frac{a^2 \pm \sqrt{(a^2 - ap)}}{2}$, wo ap für c^2 ſteht, §. 205.

§. 216. Zuſ. 2. Da $CD = \frac{1}{2}c$ §. 205, und $FD^2 = CD^2 + CF^2$: ſo iſt $FD^2 = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}a^2$, folglich $FD = fD = \frac{1}{2}a$.

§. 217.

§. 217 Zuſ. 3. Setzt man fP=w, ſo iſt w=CP+Cf=u+$\frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{2}$ §. 214. folglich u=w−$\frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{2}$, und $u^2=w^2-w\sqrt{(a^2-c^2)}+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}c^2$. Setzt man dieſen Werth für u^2 in §. 207, ſo erhält man $y^2=\frac{c^4}{4a^2}+\frac{c^2\sqrt{(a^2-c^2)}}{a^2}w-\frac{c^2w^2}{a^2}$, eine Gleichung für die Ellipſe aus dem Brennpunkte.

§. 218. Aufg. Die Summe der Linien aus beiden Brennpunkten nach einem beliebigen Punkte der Ellipſe zu finden.

Auflöſ. Es ſey ſolcher Punkt M; man will FM+fM finden.

1) $MF^2=FP^2+PM^2=(e-u)^2+y^2=e^2-2eu+u^2+\frac{1}{4}c^2-\frac{c^2u^2}{a^2}$ §. 207. Nun iſt $e^2=\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}c^2$, und $e=\frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{2}$ §. 214. Folglich iſt $FM^2=\frac{1}{4}a^2-u\sqrt{(a^2-c^2)}+\frac{a^2-c^2}{a^2}u^2$, und $FM=\pm\frac{1}{2}a+\frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}$, wo man die obern Zeichen nimmt, um einen poſitiven Werth zu erhalten, indem $\frac{1}{2}a$ der größte Werth von u ſeyn kann, §. 209.

2) $fM^2=(e+u)^2+y^2$; da man dann auf eben die Art findet $fM=\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}u$.

3) Demnach iſt $FM+fM=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a=a$, d. i. die Summe dieſer Linien iſt der großen Axe gleich.

§. 219. Zuſ. 1. Beſchreibt man aus F und f Kreisbogen mit einem beliebigen Stücke der großen Axe, und mit $a-z$, ſo geben jedesmal die Durchſchnitte zwey Punkte der Ellipſe.

Wird ein Faden, deſſen Länge a, mit beiden Enden in F, f, befeſtigt, und mit einem Stifte in die Lage FMf gebracht, ſo beſchreibt der Stift die Ellipſe mit einer ſtetigen Bewegung.

§. 220. Zuſ. 2. Je näher F, f, an C rücken, deſto kleiner wird e §. 214, folglich $fM - FM = \frac{2u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}$ §. 218. $= \frac{4ue}{a}$ §. 214, deſto mehr nähert ſich die Ellipſe einem Kreiſe, deſſen Mittelpunkt und Halbmeſſer $= \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(FM+fM)$. Für $e=0$ wird ſie völlig dieſer Kreis.

§. 221. Aufg. Eine Vergleichung zwiſchen Ellipſe und Parabel zu finden.

Aufl. (Fig. 228.) Es ſey A der gemeinſchaftliche Scheitel der Ellipſe AM und Parabel AN, desgleichen beider Parameter $= p$. Für eine beliebige Abſciſſe AP ſey PM $= y$, PN $= z$, ſo iſt $z^2 = px$ §. 190, und $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ §. 200, folglich $z^2 - y^2$ d. i. $(z+y)(z-y) = \frac{px^2}{a}$, folglich $z-y = \frac{px^2}{a(z+y)}$. Nun iſt $z+y > z$, d. i. $> \sqrt{px}$. Folglich iſt $z-y < \frac{px^2}{a\sqrt{px}}$, oder wenn man die Glieder des Bruchs mit $\sqrt{px}$ multiplicirt, $z-y < \frac{p\sqrt{x}}{a}$, wo alſo dieſer

ser Unterschied desto kleiner, je kleiner x, und je gröſser a, d. i. die Ellipse von sehr langer Axe nähert sich unweit des Scheitels der Parabel.

§. 222. Erkl. Aehnliche Ellipsen, specie eaedem, heiſsen, an denen die beständigen Linien proportionirt sind.

Bedeuten nämlich a, c, p, und α, γ, π, was Aehnliches für zwey Ellipsen, so muſs a:c = α:γ, oder a:α = c:γ seyn, da dann $\gamma = \frac{\alpha c}{a}$, folglich auch $p : \pi = \frac{c^2}{a} : \frac{\gamma^2}{\alpha}$ §. 205 $= \frac{c^2}{a} : \frac{\alpha^2 c^2}{a^2 \alpha} = 1 : \frac{\alpha}{a} = a : \alpha$.

§. 223. Zus. 1. Die Abscisse aus dem Mittelpunkte gerechnet, sey für die eine Ellipse u, für die andre t, und es sey a:α = u:t, folglich $t = \frac{\alpha u}{a}$, auch aus §. 222. $\gamma^2 = \frac{\alpha^2 c^2}{a^2}$.

Demnach ist aus §. 207. für die erste Ellipse $y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{u^2 c^2}{a^2}$, oder $\frac{y^2}{c^2} = \frac{1}{4} - \frac{u^2}{a^2}$; für die zweyte $z^2 = \frac{1}{4}\gamma^2 - \frac{t^2\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 c^2}{4a^2} - \frac{\alpha^2 c^2}{a^2} \cdot \frac{u^2}{a^2} = \frac{\alpha^2 c^2}{a^2}\left(\frac{1}{4} - \frac{u^2}{a^2}\right) = \frac{\alpha^2 c^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{c^2}$, folglich $z = \frac{\alpha y}{a}$, und az = αy, folglich y:z = a:α, d. i. in ähnlichen Ellipsen verhalten sich die Ordinaten wie die Axen, wenn sich die zugehörigen Abscissen so verhalten.

§. 224.

§. 224. Zuſ. 2. Aehnliche Ellipſen ſind nur der Größe nach unterſchieden, indem alle beſtändige Linien in ihnen proportionirt ſind, und für Abſciſſen, die mit einem Paare zuſammengehöriger beſtändiger Linien proportionirt ſind, auch die Ordinaten damit proportionirt ſind.

§. 225. Anm. Dies giebt den allgemeinen Begriff ähnlicher Curven, da dann alle Parabeln (ſo wie alle Linien, deren Gleichung nur eine beſtändige Größe enthält) einander ähnlich ſind.

Denn für zwey Parabeln ſey $y^2=px$, und $z^2=\pi u$, auch $p:\pi=x:u$, folglich $u=\frac{\pi x}{p}$: ſo iſt $z^2=\frac{\pi^2 x}{p}$, und $y^2:z^2=px:\frac{\pi^2 x}{p}=p^2:\pi^2$, folglich $y:z=p:\pi$.

4. Von der Hyperbel.

§. 226. Erkl. Hyperbel heißt diejenige Linie, für die bey rechtwinklichten Coordinaten $y^2=px+\frac{px^2}{a}$ iſt.

Auch hier iſt p der Parameter, und a die Axe, oder latus transverſum.

§. 227. Zuſ. 1. Dieſe Gleichung entſteht, wenn man in §. 206. $-a$ anſtatt $+a$ ſetzt. Hienach kann man die Hyperbel als eine Ellipſe, deren Axe verneint wäre, anſehen.

§. 228. Zuſ. 2. Für $y=0$ iſt x ſowohl $=0$, als auch $=-a$. Iſt daher (Fig. 230.) A der Anfang der Abſciſſen, AP eine poſitive Abſciſſe, und $AB=-a$, ſo ſind A und B die Scheitel. Vergl. §. 201.

§ 229. Zuſ. 3. Die Hyperbel läuft von jedem Scheitel mit 2 Schenkeln, die immer weiter aus einander gehen, ohne

ohne Ende fort, und wird von der Axe in zwey congruente Theile getheilt. Denn

1) für jedes bejahte $x > 0$ giebt es zwey entgegengesetzte gleiche Ordinaten, die ohne Ende mit x zugleich wachsen.

2) Für jedes verneinte $x > 0$, und $< a$, ist in der Gleichung $y^2 = px + \frac{px^2}{a} = px\left(1 + \frac{x}{a}\right) = \frac{px}{a}(a+x)$ der erste Factor für jedes $-x$ verneint, der zweyte aber für dieses $-x$ bejaht, daß also die Ordinaten unmöglich sind, d. i. daß es keine Punkte der Hyperbel giebt, deren Ordinaten zwischen A und B durchgiengen.

3) Wenn aber ein $-x > a$ ist, so wird auch der zweyte Factor verneint, folglich das Product bejaht, und die Ordinate wieder möglich, und so wie in (1.)

§. 230. Erkl. Der Mittelpunkt der Hyperbel heißt der Axe AB Mitte C, und nach Aehnlichkeit der Ellipse die kleine Axe, latus rectum, γ $ap = c$, daß also auch hier $p = \frac{c^2}{a}$. Vergl. §. 204, 205.

§. 231. Zus. 1. Da es hier keine Ordinate durch den Mittelpunkt giebt, §. 229, wohl aber bey der Ellipse §. 204. so kann man die Hyperbel als eine Ellipse betrachten, deren kleine Axe unmöglich wäre.

§. 232. Zus. 2. Setzt man aus §. 230 den Werth von p in §. 226: so erhält man $y^2 = \frac{c^2}{a}x + \frac{c^2x^2}{a^2}$, eine zweyte Gleichung für die Hyperbel, vergl. §. 206.

§. 233. Zus. 3. Setzt man die Abscisse aus dem Mittelpunkte $CP = u$ (wo also $x = u - \frac{1}{2}a$, und $x^2 = u^2 +$

au

$au + \frac{1}{4}a^2$) so wird aus §. 232. $y^2 = \frac{c^2u}{a} - \frac{1}{2}c^2 + \frac{c^2u^2}{a^2}$ $- \frac{c^2u}{a} + \frac{1}{4}c^2$, oder $y^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$.

Diese Gleichung entsteht auch, wenn man in §. 207. $c\sqrt{-1}$ anstatt c setzt, weil $(c\sqrt{-1})^2 = -c^2$ ist.

§. 234. Zus. 4. Der Perpendikel durch C theile die Hyperbel in zwey congruente Theile, die man insgemein entgegengesetzte Hyperbeln nennt, ob sie gleich eigentlich nur eine Hyperbel ausmachen. Auch liegen innerhalb der vier rechten Winkel um C congruente Theile der Hyperbel §. 229, alles wie §. 210.

§. 235. Aufg. Den Brennpunkt der Hyperbel zu finden.

Auflös. Für den Brennpunkt F ist $y^2 = \frac{1}{4}p^2$ §. 197. $= \frac{c^4}{4a^2}$ §. 230. $= \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$ §. 233. folglich $\frac{c^2}{4} + \frac{a^2}{4} = u^2$ also $u = \pm\frac{\sqrt{(c^2+a^2)}}{2}$, welches zwey Brennpunkte F, f auf entgegengesetzten Seiten in gleicher Weite vom Mittelpunkte C giebt.

§. 236. Zus. Die Weite des Brennpunkts F vom Scheitel A ist $= CF - CA = \frac{\sqrt{(c^2+a^2)} - a}{2}$.

§. 237. Aufg. Die Differenz der Linien aus beiden Brennpunkten nach einem beliebigen Punkte M der Hyperbel zu finden.

Auflös. Da $FM^2 = FP^2 + PM^2$, und $fM^2 = fP^2 + PM^2$, aber $FP = CP - CF$, und $fP = CP + Cf$, so

finder

findet man hieraus wie §. 218, daß $FM = \frac{u(\sqrt{a^2+c^2})}{a} - \frac{1}{2}a$, und $fM = \frac{u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a} + \frac{1}{2}a$ sey. Folglich ist $fM - FM = a$, d. i. die Differenz dieser Linien ist der Axe gleich.

§. 238. Zusatz. Hieraus folge eine Art der Verzeichnung für die Hyperbel, wie bey der Ellipse §. 219.

§. 239. Aufg. Man habe durch den Scheitel A die Linie DE der Mm parallel, und der kleinen Axe §. 230. gleich gemacht, daß AD = AE, auch durch ihre Endpunkte aus C die unbegränzten Linien CR, Cr gezogen, und soll nun den Unterschied der Linien PN, PR, bestimmen.

Auflös. Man setze $AD = \frac{1}{2}c$, $CP = u$, $PM = y$, $PR = z$. Nun ist $CA : AD = CP : PR$, d. i. $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}c = u : z$. Folglich ist $z = \frac{cu}{a}$, folglich $z^2 - y^2$, d. i. $(z+y)(z-y) = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2u^2}{a^2} + \frac{c^2}{4}$ §. 233. $= \frac{c^2}{4}$, folglich $MR = z - y = \frac{c^2}{4(z+y)}$.

§. 240. Zus. Wenn u wächst, so nimmt MR oder $mr = \frac{c^2}{4(z+y)}$ beständig ab, und kann kleiner als jede gegebene Größe, aber niemals nichts werden, so lange u, folglich auch x, y, bestimmte Größen sind. Demnach nähern sich die Schenkel der Hyperbel den geraden Linien CR, Cr, ohne Ende immer mehr und mehr, können aber dieselben niemals erreichen.

§. 241. Erkl. Asymptoten der Hyperbel heißen die unbegränzten geraden Linien CR, Cr, denen sich die Hyperbel ohne Ende mehr nähert, ohne sie je zu erreichen.

§. 242. Zus. 1. Da $MR = z - y$, und $Mr = z + y$, aber $(z+y)(z-y) = \frac{1}{4}c^2$ §. 239, so ist $MR \cdot Mr = \frac{1}{4}c^2$, folglich unveränderlich.

§. 243. Zus. 2. Zieht man MQ der Cr parallel, so sind die Winkel bey M und r, folglich auch die Winkel bey M und R gleich. Folglich ist RQ = QM. Auch ist DE = c, und $Mr = z + y$, ferner $CD^2 = CA^2 + AD^2 = \frac{a^2+c^2}{4}$, und daher $CD = \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2}$.

Nun ist $ED : DC = Mr : CQ$, d. i. $c : \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2} = z+y : CQ$, und daher $CQ = \frac{(z+y)\sqrt{(a^2+c^2)}}{2c}$. Ferner $ED : DC = RM : MQ$, d. i. $c : \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2} = \frac{c^2}{4(y+z)} : MQ$, und daher $QM = \frac{c^2}{4(z+y)} \cdot \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2c}$. Folglich ist $CQ \cdot QM = \frac{a^2+c^2}{16}$.

§. 244. Zus. 3. Setzt man $CQ = p$, $QM = q$, und sieht sie als Coordinaten auf den Asymptoten an, so hat man aus §. 243 $pq = \frac{a^2+c^2}{16}$, eine Gleichung für die Hyperbel zwischen den Asymptoten.

§. 245.

§. 245. Zuſ. 4. Zieht man AG der Cr parallel, ſo iſt aus §. 244. $CG : GA = \frac{a^2+c^2}{16}$. Nun iſt auch, weil AG der Cr parallel, GAC = ACE = ACG, und daher AG = CG. Folglich iſt $CG^2 = \frac{a^2+c^2}{16}$, und heißt die Potenz der Hyperbel.

§. 246. Aufg. Eine in willkührliche Lage gezogene gerade Linie Rr ſchneide die Hyperbel in M, m, und die Aſymptoten in R, r; man ſoll die Verhältniß der Linien MR, mr beſtimmen.

Auflöſ. Man ziehe MQ, mq, den Aſymptoten parallel, ſo iſt $MR : MQ = Rr : Cr = Rm : Cq$, folglich $MR = \frac{MQ \cdot Rm}{Cq}$. Eben ſo iſt $mr : mq = Rr : Cr = Mr : CQ$, folglich $mr = \frac{mq \cdot Mr}{CQ}$. Demnach iſt $MR \cdot mr = MQ \cdot CQ \cdot Rm : mq \cdot Cq \cdot Mr$. Nun iſt $MQ \cdot CQ = mq \cdot Cq$ §. 243. Folglich iſt $MR : mr = Rm : Mr = MR + Mm : Mr + Mm$, d. i. MR = mr.

§. 247. Zuſ. Iſt alſo die Lage der Aſymptoten, nebſt einem Punkte M der Hyperbe gegeben, ſo findet man ihre übrigen Punkte, wenn man durch M mehrere Linien, wie RMr eine iſt, leget, und immer MR = mr macht.

Auch kann man M auf die entgegengeſetzte Seite übertragen, und ſo die übrigen Punkte der entgegengeſetzten Hyperbel finden.

§. 248. Erkl. Eine Hyperbel, deren beide Axen einander, folglich auch dem Parameter gleich ſind, heißt gleichſeitig, auch rechtwinklich.

§. 249. Zuſ. 1. Da für die gleichſeitige Hyperbel CA=AD, folglich ACD=½R, ſo iſt der Aſymptotenwinkel DCE ein rechter.

§. 250. Zuſ. 2. Setzt man a anſtatt c in §. 250. 232, ſo erhält man p=a, und $y^2=u^2-\frac{1}{4}a^2$, die Gleichung für die gleichſeitige Hyperbel.

5. Von Linien höherer Ordnungen.

§. 251. Erkl. (Fig. 231.) In der Linie BC, die auf des Kreiſes Durchmeſſer AB ſenkrecht iſt, nehme man ſo viele Punkte D, als man will, ziehe AD, die den Kreis in E ſchneidet, und mache ſtets AM=DE, ſo liegen alle dergleichen Punkte M in einer krummen Linie AMN, welche die Ciſſoide, Ciſſois Dioclis, heißt.

§. 252. Aufg. Für die Ciſſoide eine Gleichung bey rechtwinklichen Coordinaten zu finden.

Aufl. Man ſetze AB=a, AP=x, PM=y, ſo iſt, weil AP:AB=PM:BD, x:a=y:BD, folglich $BD=\frac{ay}{x}$. Ferner iſt x:a=AM:AD, folglich $AD=\frac{a\,AM}{x}$. Nun iſt $BD^2=DE.AD$ (Geom. §. 283.) Folglich iſt $\frac{a^2y^2}{x^2}=\frac{a.DE.AM}{x}$. Nun iſt DE=AM, und $AM^2=x^2+y^2$. Folglich iſt $\frac{a^2y^2}{x^2}=\frac{a(x^2+y^2)}{x}$, folglich $ay^2=x^3+xy^2$, folglich $y^2=\frac{x^3}{a-x}$ die verlangte Gleichung.

§. 253.

§. 253. Zuſ. 1. Die Ciſſoide iſt eine Linie der dritten Ordnung, oder eine Curve des zweyten Geſchlechts, §. 187.

§. 254. Zuſ. 2. Die Abſciſſenlinie AB theilt die Ciſſoide in zwey congruente Theile, weil $y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{a-x}}$ iſt. Auch erhellet dies daraus, daß eben die Zeichnung für den andern Halbkreis ſtatt findet.

§. 255. Zuſ. 3. Für $x > a$ und für ein negatives x giebt es keine Ordinaten. Alſo iſt von der Ciſſoide nichts über B, noch unter A.

§. 256. Zuſ. 4. Für $x = 0$ iſt $y = 0$, und für $x = a$ iſt $y = \infty$. Auch wächſt y mit x, weil, indem ſtets $x < a$, der Diviſor immer abnimmt. Die Ciſſoide geht alſo mit ihren beiden Schenkeln immer weiter von AB weg, und näher nach BC zu, ohne doch BC jemals zu erreichen, d. i. BC iſt ihre Aſymptote, §. 241.

§. 257. Erkl. (Fig. 232.) In einer geraden Linie CM, die ſtets durch den gegebenen Punkt C geht, und die gegebene Linie BF in Q ſchneidet, nehme man QM einer beſtändigen Linie a gleich, ſo liegen alle dergleichen Punkte M in einer krummen Linie AMN, welche die Muſchellinie, conchois Nicomedis, heißt.

§. 258. Zuſ. Es ſey CEA auf BF ſenkrecht, und es fallen, von zweyen Punkten M, N, der Muſchellinie, auf DE die Perpendikel MR, NT, ſo muß, wenn ECS > ECQ iſt, NST < MQR, folglich, da NS = MQ iſt, NT < MR ſeyn, d. i. die Muſchellinie nähert ſich der Linie BF ohne Ende, welche alſo ihre Aſymptote iſt, §. 241.

§. 259. Aufg. Die Gleichung für die Muſchellinie zu finden.

Aufl. Es sey CE = b, MR = EP = x, ER = PM = y, so ist QR = $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ und EQ = ER − QR = $y - \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Nun ist GE : EQ = CP : PM, d. i. $b : y - \sqrt{(a^2 - x^2)} = b + x : y$. Folglich ist $by = b^2 + xy - (b + x)\sqrt{(a^2 - x^2)}$, oder $(b + x)\sqrt{(a^2 - x^2)} = xy - by$, oder $\sqrt{(a^2 - x^2)} = \frac{xy - by}{b + x}$, folglich $a^2 - x^2 = \frac{x^2y^2 - 2bxy^2 + b^2y^2}{(b + x)^2}$, folglich $(b^2 + 2bx + x^2)(a^2 - x^2) = x^2y^2 - 2bxy^2 + b^2y^2$, oder $x^4 + 2bx^3 + (y^2 + b^2 - a^2)x^2 - 2a^2bx - a^2b^2 = 0$, die verlangte Gleichung.

§. 260. Zus. 1. Die Muschellinie ist also eine Linie der vierten Ordnung, oder eine Curve des dritten Geschlechts, §. 187.

§. 261. Zus. 2. Von den beiden letzten Gleichungen §. 259. giebt die erste $y^2 = \frac{a^2b^2}{x^2} + \frac{2a^2b}{x} + a^2 - b^2 + 2bx - x^2$, wo jedem x zwey entgegengesetzte gleiche y zugehören. Demnach theilt CA die Muschellinie in zwey congruente Theile, wie gleichfalls die Zeichnung lehret. Auch wird, wenn x = 0 ist, $y = \infty$, wegen der Asymptote §. 258.

§. 262. Zus. 3. Aus der Gleichung §. 259. $\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}(b + x)}{x} = my$ folgt, daß keine Ordinate für x > a stattfindet.

§. 263. Zus. 4. Verneinte x geben auf eben die Art noch eine Muschellinie apr auf der entgegengesetzten Seite, daher man diese die zweyte, jene die erste genannt wird, ob sie gleich beide zusammen eigentlich nur eine ausmachen.

§. 264. Anm. Diese wenigen Proben von Linien höherer Ordnungen mögen hier hinreichen. Die bisher betrachteten Linien gebraucht man auch zu der Construction bestimmter Gleichungen, die aber in der neuern Mathematik entbehrlich ist, daher wir diese Lehre hier übergehen. Alles Nöthige davon findet man in

Herrn

Herrn Hofr. Kästners Analysis endlicher Größen §. 497—513. Von den Schenkeln einer Curve, und von den Punkten, worin eine gerade Linie die Curve schneiden kann, s. ebendas. §. 491—496.

6. Von transcendenten Linien.

§. 265. Erkl. (Fig. 234.) In einem Kreise um C, dessen Halbmesser $=r$, und Umfang $=p$, sey CA in unveränderlicher, CP von veränderlicher Lage, und in letzterer CM so genommen, daß allemal $4R : ACP = CA : CM$ sey, so ist der Punkt M in einer Curve, welche die Schneckenlinie, oder Spirallinie, helix s. spiralis Archimedis, heißt.

§. 266. Zus. 1. Setzt man $CM = y$, und den Bogen $AP = x$, so ist $p : x = r : y$, §. 265, folglich $py = rx$, die Gleichung für die Schneckenlinie.

§. 267. Zus. 2. Ist $x = 0$, so ist auch $y = 0$. So lange $x < p$, so ist $y < r$, folglich M innerhalb des Kreises. Ist $x = p$, so ist $y = r$, d. i. M fällt in A, so daß also CMNA die Spirallinie für den ganzen Umkreis ist, wobey man gedenkt, daß sich die Linie CA um C ringsumgedrehet hat.

§. 268. Zus. 3. Die Linie CA kann sich nach vollbrachtem Umlaufe §. 267. noch weiter drehen. Kömmt sie das zweytemal in die Lage CP, so ist nunmehr der Winkel $= 4R + ACP$, und sein Maaß $4p + x$, dahey auch der Punkt M über P hinaus in M′ gekommen, d. i. aus CM nun CM′ geworden ist, so daß man $p : p + x = r : CM'$ hat, folglich $CM' = r + \frac{rx}{p} = r + CM$. §. 266.

Nachdem CA den zweyten Umlauf vollendet, so kann sie auch den dritten, vierten u. s. w. ohne Ende vollenden, daß man also in der verlängerten Linie CP unzählige Punkte, wie M, M′, M″ u. s. w. erhält.

Was von der Spirallinie beym 1, 2, 3ten ꝛc. Umlaufe beschrieben wird, nennt Archimedes die erste, zweyte, dritte ꝛc. Spirallinie, ob es gleich eigentlich von derselben Spirallinie der 1te, 2te, 3te ꝛc. Theil ist.

§. 269. Erkl. (Fig. 233.) Der Kreis um C wälze sich auf der geraden Linie AB, von A gegen B, dergestalt, daß, wenn der Punkt D in T kömmt, die Linie AD der Länge des Bogens AOD gleich ist, da dann auch A in P gekommen, und TKP=ACD ist, so beschreibt der im Umkreise gegebene Punkt A eine Curve APF, welche die Radlinie, Cyclois, heißt, weil ein Nagel A in einem auf ebnem Wege fortrollenden Rade dergleichen Linie beschreibt.

Der Kreis um C heißt der beschreibende Kreis, circulus generator, der Punkt A im Umkreise der beschreibende Punkt, und AB die Grundlinie.

Anmerk. Wenn sich der beschreibende Kreis nicht auf einer geraden Linie, sondern auf der Peripherie eines andern Kreises wälzet, so entsteht eine Epicycloide, und zwar eine obere oder eine untere, je nachdem das Umwälzen auf der convexen oder auf der concaven Seite jener Peripherie geschieht.

§. 270. Zus. 1. Bedeutet $r:\pi$ die Verhältniß des Halbmessers zum Umkreise, also $2r\pi$ die Peripherie des beschreibenden Kreises, und u den Bogen AOD=AT, so ist $2r\pi : u = 4R : ACD$, folglich $\frac{2R.u}{r\pi} = ACD = TKP$.

§. 271. Zus. 2. Für jede Stelle des Mittelpunkts K ist u, also die Stelle von P gegeben, wenn man weiß, welcher Winkel ACD in dem beschreibenden Kreise einem Bogen von gegebener Länge AT zugehöre, welches also die Quadratur des Kreises voraussetzt.

§. 272. Zus. 3. Ist $u=r\pi$, so ist ACD=2R §. 270, d. i. wenn AB=AOG, so ist A in F, und G in E.

§. 273.

§. 273. Zus. 4. Zieht man durch einen beliebigen Punkt P der Radlinie, PM mit AB parallel, die des beschreibenden Kreises Durchmesser in N und M schneidet. so ist AE=AOG=ELF, und AT=AOD=TP=EL, folglich AE—AT=ELF—EL, d. i. TE=LF. Nun ist auch TE=NM=PM—PN=PM—LM=PL, folglich ist PL=FL. Setzt man daher PL=y, und FL=x, so ist y=x die Gleichung für die Radlinie.

§. 274. Zus. 5. Um die Radlinie zu beschreiben, setze man AE der halben Peripherie des beschreibenden Kreises, und die senkrechte EF seinem Durchmesser gleich. Um EF beschreibe man einen Kreis, nehme darin einen beliebigen Punkt L, ziehe dadurch LP mit AB parallel und dem Bogen FL gleich, so ist P ein Punkt der Radlinie, den man eben so auf der entgegengesetzten Seite erhält, wo also auch ein dem APF congrienter Bogen liegt.

§. 275. Zus. 6. Hat der beschreibende Kreis eine Umwälzung auf der Grundlinie vollendet, so kann er sie weiter von neuem auf eben die Art fortsetzen. Solchergestalt besteht die Radlinie aus unzähligen congruenten Stücken.

§. 276. Anm. Auf den Gleichungen für die Spiellinie und die Radlinie sieht man, daß hier Coordinaten von ganz anderer Beschaffenheit vorkommen, vergl. §. 186. Nähere Aufschlüsse über die transcendente Natur dieser Linien findet man in Herrn Hofr. Kästners Anfl. endl. Größen §. 612-622. Desgl. §. 577.

Der fünfte Abschnitt.

Von der Differentialrechnung.

1. Grundlehren der Differentialrechnung.

§. 277. Erkl. Eine Größe wächst ohne Ende, sine fine, wenn sie ohne Aufhören Vermehrungen erhält. Eine Größe wächst unendlich, in infinitum, wenn sie größer werden kann, als jedes Endliche, oder was sich angeben, d. i. mit bestimmten und gegebenen Größen seiner Art vergleichen läßt.

§. 278. Zus. 1. Erhält eine Größe ohne Aufhören immer kleinere und kleinere Vermehrungen, doch ohne daß sie jemals einen bestimmten Werth übersteige, oder nur wirklich erreiche, so wächst sie zwar ohne Ende, aber nicht unendlich. Z. E. die Reihe Algebr. §. 62. $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\ldots$.

§. 279. Zus. 2. Erhält eine Größe ohne Aufhören immer gleiche, oder immer größere und größere Vermehrungen, so kann sie allen bestimmten Werth übersteigen, und wächst alsdann nicht nur ohne Ende, sondern auch unendlich.

§. 280.

§. 280. Erkl. Eine Größe nimmt unendlich ab, decrescit in infinitum, wenn sie kleiner als jede endliche, d. i. als jede angebliche Größe werden kann.

Z. E. In der Reihe $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\ldots\ldots$, wo x jede Zahl >1 bedeuten, nehmen die folgenden Glieder immer mehr ab, und können, da dies ohne Ende fortgeht, kleiner als jede gegebene Größe werden, nehmen folglich unendlich ab.

§. 281. Zus. 1. Es sey $u:b=a:x$, wo u und x veränderliche, aber b und a beständige Größen bedeuten, und man setze, daß u unendlich wachse, so muß x unendlich abnehmen.

Z. E. Ein Rectangel, dessen Grundlinie b und Höhe a ist, wird durch ba ausgedrückt, und man kann allemal ein andres jenem gleiches Rectangel, dessen Grundlinie u und Höhe x sey, annehmen, wofern nur $u:b=a:x$ ist. Je größer man nun u setzt, desto kleiner wird x; sollte also u unendlich zunehmen, so müßte x unendlich abnehmen.

§. 282. Zus. 2. Setzt man $b=a=1$, so wird obige Proportion $u:1=1:x$, folglich $x=\frac{1}{u}$, unendlich abnehmend, wenn u unendlich zunimmt. letztere bezeichnet man durch ∞, erstere durch $\frac{1}{\infty}$.

§. 283. Anm. Um sogleich die Nothwendigkeit und den eigentlichen Endzweck obiger Betrachtungen durch ein Beyspiel zu erläutern, sey aus §. 134. die Function $y=ax+bx^2+cx^3$, worin die veränderliche Größe x jeden so kleinen oder so großen Werth erhalten kann, als man immer will, da dann die Frage entstehe, was aus dieser Function werde, wenn der Werth von x unendlich wächst, oder unendlich abnimmt.

§. 284. Erkl. Eine Größe, deren Unterschied von einem Werth kleiner, als jede endliche Größe werden

kann, nähert sich unendlich diesem Werthe, der alsdann ihre Gränze heißt. Eben so heiße auch eine Verhältniß die Gränze einer andern, wenn sich ihr die andere unendlich nähert.

Z. E. Der Kreis ist die Gränze aller innern und äussern Polygone. Auch ist die Verhältniß 1 : 1, oder die Verhältniß der Gleichheit, die Gränze der Verhältniß des Kreises zum Polygon. Dies heißt: das Polygon kann sich dem Kreise unendlich, d. i. so nähern, daß der Unterschied kleiner als jede gegebene Größe werden kann. Und die Verhältniß des Kreises zum Polygon kann sich der Verhältniß der Gleichheit unendlich, d. i. so nähern, daß der Unterschied davon kleiner als jedes Endliche wird.

§. 285. Grundf. Größen, zwischen denen sich kein Unterschied angeben läßt, sind einander gleich.

§. 286. Zus. Soll sich $y = e + z$ der Gränze e nähern, so muß z unendlich abnehmen, d. i. kleiner als jedes Endliche werden, da man dann $y = e$ setzen kann. §. 285.

§. 287. Lehrs. Wenn in der Gleichung $au + b = z$ die Größe u unendlich wächst, so ist au die Gränze, der sich z unendlich nähert.

Beyw. Aus der Gleichung folgt $1 + \frac{b}{au} = \frac{z}{au}$. Wächst nun u unendlich, so nimmt $\frac{b}{au}$ unendlich ab, §. 282, und $\frac{b}{au}$ nähert sich unendlich der Gränze 1, folglich z der Gränze au. §. 286.

Denn wollte man sagen, daß $\frac{z}{au}$ sich der Gränze 1 nur bis auf eine endliche noch so kleine Größe nähere, und etwa

etwa nie kleiner, als $1+e$ werden könne, so könnte, weil $\frac{z}{au} = 1 + \frac{b}{au}$, auch $1 + \frac{b}{au}$ nie $< 1+e$, folglich $\frac{b}{au}$ nie $< e$ werden, welches offenbar gegen die Voraussetzung ist, daß u so groß als man will, werden kann, wodurch $\frac{b}{au}$ gewiß $< e$ werden muß.

Anm. Denkt man sich $\frac{b}{au}$ in dem Zustande, daß es sich nicht mehr angeben läßt, so kann man ohne Bedenken $\frac{z}{au} = 1$, folglich $z = au$ setzen. §. 285.

Auch kann man obigen Beweis so führen: Da $z = au + b$, so ist $z : au = au + b : au = 1 + \frac{b}{au} : 1$, und nähert sich folglich der Verhältniß $1 : 1$, wenn $\frac{b}{au}$ unendlich abnimmt.

§. 288. Zus. 1. Besteht eine Größe $z = au^m + bu^{m-n}$, wo n eine kleinere bejahte Zahl als m ist, aus verschiedenen Theilen, deren jeder eine verschiedene Potenz von u als Factor enthält, so ist, wenn u unendlich wächst, der Theil au^m, worin sich die höchste Potenz von u befindet, ihre Gränze.

Denn aus der Gleichung folgt $\frac{z}{au^m} = 1 + \frac{bu^{-n}}{a} = 1 + \frac{b}{au^n}$, daher denn 1 die Gränze von $\frac{z}{au^m}$, folglich au^m die Gränze von z ist, §. 287.

§. 289.

§. 289. Zus. 2. Besteht eine Größe $y = \frac{k}{u^m} + \frac{h}{u^{m+n}}$ aus verschiedenen Theilen, deren jeder eine verschiedene Potenz von u als Divisor enthält, so ist, wenn u unendlich wächst, der Theil $\frac{k}{u^m}$, worin sich die niedrigste Potenz von u befindet, ihre Gränze.

Denn $y \cdot u^m = k + \frac{h}{u^n}$, nähert sich der Gränze k, folglich y der Gränze $\frac{k}{u^m}$. Nämlich obiger zweyter Quotient nimmt weit schneller als der erste ab, weil die unendlich wachsende Größe u in seinem Divisor einen größern Exponenten hat.

Auch lassen sich die beiden Quotienten nach §. 282. durch $kx^m + hx^{m+n}$ ausdrücken, wo y sich der Gränze kx^m unendlich nähert, wenn x unendlich abnimmt, also der Theil die Gränze ist, worin sich die niedrigste Potenz von x als Factor befindet, und der zweyte Theil schneller abnimmt, als der erste.

§. 290. Zus. 3. Ein Product aus zwey veränderlichen Größen, $ty = z$, nimmt nicht allemal unendlich zu, wenn der eine Factor y unendlich zunimmt, sondern kann endlich bleiben, wenn nur der andre Factor t alsdann unendlich abnimmt, §. 281.

Nun setze man $y = qu^m$, und $t = px^n$, daß $u = \infty$, $x = \frac{1}{\infty}$, und m, n, bejahte Zahlen sind, so ist $t = px^n = pu^{-n}$, folglich $ty = pqu^{m-n}$, §. 289. Und eben so $y = qu^m = qx^{-n}$, folglich $ty = pqx^{n-m}$. Demnach ist $z = ty = pqu^{m-n} = pqx^{n-m}$, und man kann von diesen beiden Ausdrücken, welchen man will, gebrauchen, nachdem $m <$ oder $> n$ ist. Für $m = n$ ist $u^0 = x^0 = 1$.

2. Grund-

2. Grundregeln des Differentiirens.

§. 291. Erkl. Wenn Z, eine Function von z, den Zuwachs E erhält, indem z um e wächst, d. i. wenn Z+E eben die Function von z+e ist, und die Verhältniß E:e, indem e unendlich abnimmt, sich einer Gränze unendlich nähert, so nennt man diese Gränze die Differentialverhältniß von Z und z, auch das, was alsdann aus e, E wird, die Differentiale von z, Z.

§. 292. Zus. Wird in der gegebenen Function z+e anstatt z gesetzt, wodurch Z+E aus Z wird, so erhält man E, wenn man die Function Z von der Function Z+E subtrahirt. Wenn nun dieser Zuwachs E zugleich mit e unendlich abnimmt, so kann man zwar nicht ihn selbst für diesen Zustand bestimmen; wenn aber die Verhältniß E:e alsdann doch noch endlich bleibt, so läßt sich diese noch angeben. Auch sucht man eigentlich nur die Gränze, der sich obige Verhältniß unendlich nähert, §. 291.

Z. E. (Fig. 235.) Es sey für den Kreis AP=z, AQ=z+e; PM=Z, QN=Z+E; NMt eine Secante, MT eine Tangente, und MS mit AP parallel, so ist E:e =NS:MS=MP:Pt. Nun kann QN nach A zu rücken, und sich der PM unendlich nähern, wodurch auch t nach A zu rückt, und sich dem T unendlich nähert, daß Pt von PT unendlich wenig unterschieden ist. Folglich ist MP:PT die Gränze, der sich E:e unendlich nähert, wenn e unendlich abnimmt, d. i. MP:PT ist die Verhältniß der Differentialen von Z und z.

§. 293. Aufg. Es ist die Function $a-1Z=z^n$ gegeben; man soll die Verhältniß der Differentialen finden.

Auflös. In der gegebenen Function setze man Z+E

anstatt

anstatt Z, und z+e anstatt z, so hat man $a^{n-1}(Z+E)=(z+e)^n$, folglich nach §. 13.

$$a^{n-1}Z+a^{n-1}E=z^n+Az^{n-1}e+Bz^{n-2}e^2\ldots+e^n.$$

und die gegebene Function subtrahirt,

$$a^{n-1}E=Az^{n-1}e+Bz^{n-2}e^2\ldots+e^n, \text{ oder}$$

$$a^{n-1}\cdot\frac{E}{e}=Az^{n-1}+Bz^{n-2}e^2\ldots+e^n.$$

Wäre nun $z=0$, so wäre $a^{n-1}E=e^n$, für jeden Werth von e. Da dies aber nur ein seltner Fall ist, und sonst immer z einen gewissen Werth hat, so nehme man an, wie in dem Exempel §. 292, daß z diesen Werth behalte, indem e, welches Anfangs auch endlich ist, unendlich abnimmt, da dann der Werth der Reihe sich der Gränze Az^{n-1}, d. i. der Gränze nz^{n-1} unendlich nähert.

§. 289. Folglich ist die Verhältniß der Differentialen $\frac{E}{e}$ von der Verhältniß $\frac{nz^{n-1}}{a^{n-1}}$, oder wenn man $a=1$ setzt, von der Verhältniß $\frac{nz^{n-1}}{1}$ um keine angebliche Größe unterschieden, §. 284, folglich ist $\frac{E}{e}=\frac{nz^{n-1}}{1}$, oder $E:e=nz^{n-1}:1$. §. 285, folglich $E=nz^{n-1}e$.

§. 294. Zus. Bezeichnet man das Differential einer Größe mit dem Zeichen d, z. E. $E=dZ$, und $e=dz$, (wo d so wenig, wie l bey den Logarithmen, und $\sqrt{}$ bey den Wurzeln, ein Factor seyn soll) so heißt die Differentialverhältniß §. 293. nunmehr $\frac{dZ}{dz}=\frac{nz^{n-1}}{1}$, folglich $dZ=nz^{n-1}dz$, wobey man in dem Producte, um Zweydeutigkeit

tigkeit zu vermeiden, das Differential allemal zuletzt schreibt.

§. 295. Erkl. Eine Größe Z, die eine Function von z ist, differentiiren, heißt die Verhältniß der Differentiale §. 291. finden. Und die Differentialgleichung zwischen Z und z finden, heißt, aus der endlichen Gleichung zwischen Z und z eine Gleichung zwischen ihren Differentialen ableiten, §. 293.

§. 296. Aufg. Die gegebene endliche Gleichung habe auf der einen Seite blos Z, auf der andern blos z; man soll die Differentialgleichung finden, oder Z differentiiren.

Auflös. Man denke sich, daß Z+E aus Z werde, indem z+e aus z wird, und ziehe die gegebene Gleichung von der neuen ab, wodurch sich also alle Glieder, die nun Z und z, und nicht E und e enthalten, aufheben, und eine Gleichung von der Form E=Pe entsteht, wo P durch z, e und beständige Größen gegeben ist. Demnach hat man $\frac{E}{e}=P$. Nun werde Q aus P, wenn e unendlich abnimmt, so ist E=dZ, und e=dz, folglich $\frac{dZ}{dz}=Q$, oder dZ=Q.dz die verlangte Differentialgleichung.

Zur Erläuterung dieses Verfahrens dient das Exempel §. 293.

§. 297. Zus. 1. Ist eine veränderliche Größe die Summe oder Differenz mehrerer anderer, so ist das Differential jener Größe die Summe oder Differenz der Differentiale dieser Größen.

Z. E. Es sey Z=u+x−y, so ist
Z+dZ=u+du+x+dx−y−dy, folglich
dZ=du+dx−dy.

§. 298.

§. 298. Zus. 2. Das Differential einer veränderlichen Größe ist mit dem Differential der Summe oder Differenz dieser Größe und einer beständigen einerley.

Z. E. Es sey $Z = u + a$, so ist $Z + dZ = u + du + a$, folglich $dZ = du$. Hienach ist $d(a^2x - \frac{2}{3}by + c^2) = a^2dx - \frac{2}{3}bdy$.

Anm. In diesem Sinne sagt man, daß das Differential einer beständigen Größe Null, oder $da = 0$ sey, wenn man mit a, wie mit x in §. 294. verfahren wollte.

§. 299. Zus. 3. Muß in einer Gleichung zwischen zwey veränderlichen Größen die eine abnehmen, indem die andre wächst, so erhalten ihre Differentiale entgegengesetzte Zeichen.

Z. E. Es sey $x + y = a$, so ist $x + dx + y + dy = a$, folglich $dx + dy = 0$, folglich $dx = -dy$, und $dy = -dx$.

Anm. Eine bejahte Größe nimmt zu oder ab, je nachdem ihr Differential bejaht oder verneint ist. Eine verneinte Größe hingegen nimmt zu oder ab, je nachdem ihr Differential verneint oder bejaht ist. Alles nach den gemeinen Regeln der Subtraction.

§. 300. Aufg. Die Differentialgleichung für $xy = Z$, oder das Differential eines Products zu finden.

Auflös. Da $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$ (Arithm. §. 233.) $= 4Z$, so ist $d(x+y)^2 - d(x-y)^2 = 4dZ$. Nun sey

1) $(x-y)^2 = u^2$, folglich $d(x+y)^2 = 2udu$ §. 294.
$= 2(x+y)(dx+dy)$.

2) $(x-y)^2 = v^2$, folglich $d(x-y)^2 = 2vdv$ §. 294.
$= 2(x-y)(dx-dy)$.

Dem-

Demnach iſt

$4\,dZ = 2(x+y)(dx+dy) - 2(x-y)(dx-dy)$ d. i.

$2\,dZ = xdx + ydx + xdy + ydy$, ſubtrahirt:

$xdx - ydx - xdy + ydy$.

$2\,dZ = 2ydx + 2x\,dy$, oder

$dZ = ydx + x\,dy = d(xy)$.

§. 301. Zuſ. Beſteht das Product aus 3 oder mehrern veränderlichen Factoren, ſo multiplicire man das Differential eines jeden mit dem Producte aus den übrigen.

Z. E. $d(xyz) = yzdx + xzdy + xydz$.

Denn ſetzt man $xy = v$: ſo iſt $d(vz) = vdz + zdv$, §. 300, da dann $dv = d(xy) = xdy + ydx$, §. 300.

Hieraus iſt auch $d(axyz) = a.d(xyz) = ayzdx + axzdy + axydz$.

§. 302. Aufg. Die Differentialgleichung für $\frac{x}{y} = v$, oder das Differential eines Quotienten zu finden.

Auflöſ. Aus $v = \frac{x}{y}$ folgt $vy = x$, folglich $ydv + vdy = dx$ §. 300, folglich $dv = \frac{dx - vdy}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$.

§. 303. Aufg. Die Differentialgleichung für $\sqrt[n]{u^m} = w$, oder das Differential einer Wurzelgröße zu finden.

Auflöſ. Da $u^{\frac{m}{n}} = w$, folglich $u^m = w^n$: ſo iſt nach §. 301. $mu^{m-1}du = nw^{n-1}dw = nu^{\frac{m}{n}(n-1)}dw =$

$nu^{m-\frac{m}{n}}dw$, folglich $\frac{mu^{m-1}du}{nu^{m-\frac{m}{n}}} = \frac{m}{n}u^{\frac{m}{n}-1}du = dw = d\left(u^{\frac{m}{n}}\right)$.

§. 304. Aufg. Die Differentialgleichung für $\frac{1}{v^r} = y$, oder das Differential von v^{-r} zu finden.

Auflöf. Da $y = v^{-r} = \frac{1}{v^r}$: so ist $dy = d(v^{-r})$ und $yv^r = 1$, folglich nach §. 300. 294. $ryv^{r-1}dv + v^r dy = 0$, folglich $dy = \frac{-ryv^{r-1}dv}{v^r} = -ryv^{-1}dv = -rv^{-r-1}dv = \frac{-rdv}{v^{r+1}} = d(v^{-r})$.

Z. E. $d\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-2dx}{x^3}$, und $d\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{-3dx}{x^4}$.

§. 305. Zuf. 1. In der Formel §. 304. kann r einen bejahten Bruch bedeuten, §. 303.

§. 306. Zuf. 2. Wenn $x^\varepsilon = t$, so ist allgemein $\varepsilon x^{\varepsilon-1} dx = dt$, was auch ε für eine Zahl seyn möge.

Denn ε ist eine bejahte ganze Zahl §. 294. ein bejahter Bruch §. 303, eine verneinte ganze Zahl §. 304, ein verneinter Bruch §. 305. Auch kann ε eine Irrationalzahl, ja selbst eine unmögliche Größe seyn, weil jene sich allemal als einen Bruch betrachten läßt, und für diese keine andere Regeln der Rechnung hier zu beobachten sind. Es wird nämlich das Differential einer Potenz blos durch das zweyte Glied der Potenz $(x + dx)^\varepsilon$ bestimmt, §. 293, welches für alle obige Werthe von ε einerley Ausdruck hat.

§. 307.

§. 307. Anm. 2. Man kann alle Differentialen, von denen bisher die Rede war, nach der Form §. 294. $d(z^n) = nz^{n-1}dz$ machen, wie man an folgenden Beyspielen sehen kann:

1. $d(ax) = d(ax^1) = 1.ax^{1-1}dx = ax^0dx = adx.$

2. $d(\sqrt[m]{x}) = d(x^{\frac{1}{m}}) = \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}dx = \frac{1}{m}x^{\frac{1-m}{m}}dx = \frac{dx}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}.$

3. $d(a\sqrt{x}) = d(ax^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{adx}{2\sqrt{x}}.$

4. $d\left(\frac{a}{x}\right) = d(ax^{-1}) = -1ax^{-2}dx = \frac{-adx}{x^2}.$

5. $d\left(\frac{x}{y}\right) = d(xy^{-1}) = y^{-1}dx - xy^{-2}dy = \frac{ydx}{y^2} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$

6. $d\left(\frac{ay^3}{x^2}\right) = d(ay^3x^{-2}) = 3ax^{-2}y^2dy - 2ay^3x^{-3}dx = \frac{3axy^2dy - 2ay^3dx}{x^3}.$

7. $d\left(\frac{a^2b}{xy}\right) = d(a^2bx^{-1}y^{-1}) = -2a^2by^{-1}x^{-2}dx - 2a^2bx^{-1}y^{-2}dy = \frac{-a^2bydx}{y^2x^2} - \frac{a^2bxdy}{y^2x^2}.$

8. $d\left(\frac{a}{\sqrt[3]{x^3}}\right) = d(ax^{-\frac{3}{3}}) = -\frac{3}{2}ax^{-2}dx = \frac{-3adx}{2\sqrt{x}}.$

§. 308. Anm. 2. Auch folgen hier einige Beyspiele für das Differentiiren zusammengesetzter Größen:

1. Soll die Function für den Kreis $y = \sqrt{(ax - x^2)}$ differentiirt werden, so ist $y^2 = ax - x^2$, folglich $2ydy = adx - 2xdx = (a - 2x)dx$, folglich $dy = \frac{(a-2x)dx}{2y} = \frac{(a-2x)dx}{2\sqrt{(ax-x^2)}}$.

2. Soll $\frac{x+y}{z}$ differentiirt werden, so setze man $x + y = u$ da dann $d\left(\frac{u}{z}\right) = \frac{zdu - udz}{z^2} = \frac{zdx + zdy - xdz - ydz}{z^2}$.

3. Soll $\frac{a^2+bx}{a-x}$ differentiirt werden, ſo ſetze man den Zähler z, den Nenner y; da dann $d\left(\frac{z}{y}\right)=\frac{ydz-zdy}{y^2}$ $=\frac{(a-x)bdx+(a^2+bx)dx}{(a-x)^2}=\frac{(a^2+ab)dx}{(a-x)^2}$.

4. Soll man $y=(a+bx^n)^m$ differentiiren, ſo ſetze man $a+bx^n=P$, da dann $dP=nbx^{n-1}dx$, und $d(P^m)=mP^{m-1}dP$, folglich $dy=nmbx^{n-1}dx(a+bx^n)^{m-1}$.

5. Soll man $u=(a+bx^2)^3(c+fx)^2$ differentiiren, ſo ſetze man $a+bx^2=P$, und $c+fx=Q$, da dann $u=P^3.Q^2$, und $du=P^3.2QdQ+Q^2.3P^2dP$. Nun iſt $dQ=fdx$, und $dP=2bxdx$. Folglich iſt $du=2(c+fx)(a+bx^2)^3.fdx+2.3(c+fx)^2(a+bx)^2bxdx$.

§. 309. Anm. 5. Um die bisherigen Lehren von den Differentialen ſogleich anzuwenden, ſoll nunmehr die Allgemeinheit des binomiſchen Lehrſatzes mittelſt derſelben bewieſen, und hierauf ihr Gebrauch bey den krummen Linien gezeigt werden.

§. 310. Aufg. Die Potenz n des Binomium $1+x$ zu finden, was auch für einen Werth n haben möge.

Auflöſ. Man ſetze, wie §. 2, $(1+x)^n=1+Ax+Bx^2+Cx^3....+Px^m+Qx^{m+1}....=w$ ſo iſt $dw=n(1+x)^{n-1}dx$, folglich $(1+x)dw=n(1+x)^ndx$, folglich $(1+x)\frac{dw}{dx}=n(1+x)^n=nw$, folglich $(1+x)\frac{dw}{dx}-nw=0$. Nun, iſt $dw=Adx+2Bxdx+3Cx^2dx....$ folglich $\frac{dw}{dx}=A+2Bx+3Cx^2....$ folglich

$$(1+x)\frac{dw}{dx}=\frac{aBx}{+A}+3Cx^2....+\frac{(m+1)Qx^m}{+mP}$$
$$-nw=-n-nA-nB....-nP.$$

Dem-

Demnach iſt nach §. 152.

$A+n=0$, folglich $A=n$.

$2B+A-nA=0$, folglich $B=\frac{n-1}{2}A$

$3C+2B-nB=0$, folglich $C=\frac{n-2}{3}B$ u. ſ. w.

$(m+1)Q+(m-n)P=0$, folglich $Q=\frac{n-m}{m+1}P$.

Alles wie §. 10, nur daß dort n blos ganze Zahlen bedeutet, hier aber jeden Werth haben kann, §. 306.

Demnach iſt auch die Formel $(a+b)^n$ §. 13. ganz allgemein, was auch für einen Werth n haben mag.

Iſt der Exponent der Potenz ein Bruch, ſo ſetze man in die Formel §. 16. $\frac{u}{v}$ anſtatt n. Dies giebt

$$(a+b)^{\frac{u}{v}}=\alpha+\frac{u}{v}\alpha\theta+\frac{u-v}{2v}\beta\theta+\frac{u-2v}{3v}\gamma\theta+\frac{u-3v}{4v}\delta\theta\ldots$$

Iſt n keine ganze bejahte Zahl, ſo läuft die Reihe ohne Ende fort, weil in den Zählern der Coëfficienten Factoren von der Form $n-1$, $n-2$ u. ſ. w. ſind, wo n immer um eine ganze Zahl vermindert wird, daß alſo das Glied x_n nicht vorkömmt, welches auch deshalb nicht geſchehen kann, weil hier, wie dort, x lauter ganze Zahlen zu Exponenten hat.

Anmerk. Obigen Beweis hat Herr Hofr. Käſtner gegeben. Vergl. Deſſen Anal. des Unendl. §. 48. Auch findet man daſelbſt §. 56—62 die Formel für die unbeſtimmte Potenz des Polynomium.

3. Von den Tangenten der krummen Linien.

§. 311. Erkl. (Fig. 236.) Die Tangente einer krummen Linie LMN iſt die gerade Linie γMT,

die einen Punkt M, den Berührungspunkt, mit der krummen Linie so gemein hat, daß beyde beide von diesem Punkte an auslaufende Bogen ML, MN. auf einer Seite der geraden Linie liegen.

§. 312. Zus. 1. Zieht man die Sehnen der Bogen ML, MN, so nähert sich ihr Winkel LMN der Summe von zwey rechten Winkeln ohne Ende desto mehr, je mehr sich der Punkt L, oder N, oder beide, dem Punkte M nähern. Nämlich ein Punkt, der durch den Bogen LM geht, nimmt einen andern Weg, als durch die Sehne LM. Dieser Unterschied wird immer kleiner, je näher L an M rückt, und wird unendlich vermindert, wenn L unendlich nahe an M rückt. Und eben so verhält es sich auch mit dem Bogen NM. Demnach müssen die beyderseitigen Sehnen von einer einzigen geraden Linie unendlich wenig unterschieden werden, d. i. ihr Winkel der Summe von zwey rechten unendlich nahe kommen.

§. 313. Anmerk. Ist L dem Punkte M unendlich nahe gekommen, so ist die gerade Linie LM von dem Bogen LM unendlich wenig unterschieden, daß man beide für eins halten kann; vergl. Geom §. 314. In diesem Verstande sagt man, die krumme Linie bestehe aus unendlich kleinen geraden Linien, die man ihre Elemente nennt.

§. 314. Zus. 2. Zwischen dem Bogen ML und seiner Tangente MT geht durch M keine gerade Linie, welche nicht den Bogen ML schnitte, weil sonst die Sehne LM von der Tangente TM stets um einen Winkel, den obgedachte Linie mit der Tangente macht, noch unterschieden wäre, folglich sich der Tangente nicht unendlich nähern könnte, welches gegen §. 312. streitet.

§. 315. Zus. 3. Die Tangente des Bogens ML ist demnach die gerade Linie MT, die mit dem Bogen im Berührungspunkte einen unendlich kleinen Winkel macht. Ist LMN ein zusammenhängender Bogen einer krummen

Li-

Linie, wie von uns angenommen wird, ſo liegt derſelbe ganz auf einer Seite der Tangente TMV, und hat an einem Punkte nur eine Tangente. Aber von zwey Bogen verſchiedener Schenkel, die einander in einem Punkte ſchneiden, kann jeder ſeine eigne Tangente, oder beide können auch im Durchſchnittspunkte eine gemeinſchaftliche Tangente haben.

§. 316. Erkl. (Fig. 236.) Ein Bogen LMN iſt nach der Gegend zu hohl, concavus, nach welcher der Sehnen Winkel LMN allemal weniger als zwey rechte Winkel beträgt. Nach der entgegengeſetzten Seite iſt der Bogen erhoben, convexus.

§. 317. Zuſ. 1. Der Bogen fällt zwiſchen der Tangente und der Seite, nach der er hohl iſt, und die Tangente zwiſchen dem Bogen und der Seite, nach der er erhoben iſt. Schneidet die Tangente die krumme Linie irgendwo, oder iſt dieſe gegen die Tangente irgendwo hohl, ſo giebt es eine Stelle, einen Wendungspunkt, punctum flexus contrarii, wo der Bogen nach der Gegend erhoben wird, nach welcher er vorhin hohl war.

§. 318. Zuſ. 2. (Fig. 236. 237.) Iſt QN der Ordinate PM, und MS der Abſciſſe AP parallel, ſo iſt MNS = MVS ± VMN; das obere Zeichen für den hohlen Bogen Fig. 236, das untere für den erhobenen Fig. 237.

§. 319. Zuſ. 3. Da VMN unendlich abnehmen kann, ſo nähert ſich MNS unendlich dem MVS.

§. 320. Zuſ. 4. Da VS : MS = ſin VMS : ſin MVS. und MS : NS = ſin MNS : ſin NMS; ſo iſt VS : NS = ſin VMS . ſin MNS : ſin NMS . ſin MVS. Nun nähern ſich VMS, NMS einander unendlich §. 315, und eben ſo MNS und MVS, §. 319. Folglich nähert ſich VS : NS unendlich der Verhältniß 1 : 1, und die Verhältniß VS : SM nähert ſich unendlich der Verhältniß NS : SM.

§. 321. Erkl. (Fig. 236. 237.) Trifft die verlängerte Tangente die Abscissenlinie in T, so heißt das von der Tangente und Ordinate begränzte Stück der Abscissenlinie, PT, die Subtangente.

§. 322. Aufg. (Fig. 236.) Die Verhältniß der Ordinate zur Subtangente zu finden.

Auflös. Da VQ mit MP, und MS mit AQ parallel: so ist PM : PT = VS : SM. Nähert sich nun VQ der PM unendlich: so nähert sich VS:SM, also auch PM : PT, unendlich der Verhältniß NS:SM, §. 320, d. i. der Verhältniß mR:RM, und ist ihr gleich, wenn N in m unendlich nahe bey M ist. Alsdann aber sind mR, RM, die Differentiale der Ordinate und Abscisse, oder dy, dx, und es ist also dy : dx = y : PT, folglich $PT = \frac{ydx}{dy}$. Auch ist AT = PT — AP.

§. 323. Zus. 1. Ist die Ordinate zugleich mit der Abscisse zu- oder abnehmend, wie in den angenommenen Figuren, folglich dx, dy, beide zugleich bejaht oder verneint: so ist der Quotient $\frac{dx}{dy}$, folglich auch die Subtangente für ein bejahtes y bejaht, und T, A, fallen auf eine Seite der Ordinate.

Nähmen aber Ordinate und Abscisse nicht zugleich zu oder ab, wie, wenn man sich die Abscisse von G nach A gedenkt, so wird nach §. 299. $\frac{dx}{dy}$, folglich auch die Subtangente für ein bejahtes y verneint, und T, G, fallen auf verschiedene Seiten der Ordinate.

Für ein verneintes y ist die Subtangente im ersten Falle verneint, im zweyten bejaht.

§. 324.

§. 324. Zuſ. 2. Die Subtangente und der Anfang der Abſciſſen liegen entweder auf einer, oder auf verſchiedenen Seiten der Ordinate, je nachdem Subtangente und Ordinate entweder einerley oder verſchiedene Zeichen haben.

§. 325. Anmerk. Man findet die Subtangente für eine beſtimmte Curve in endlichen Größen, wenn man aus der Gleichung für die Curve den Quotienten $\frac{dx}{dy}$ nach den Regeln des Differentilirens ſucht, wovon nun einige Beyſpiele folgen.

§. 326. Aufg. Die Subtangente für die Parabel zu finden.

Auflöſ. Aus der Gleichung für die Parabel $y^2=px$ hat man $2ydy=pdx$, folglich $\frac{2y}{p}=\frac{dx}{dy}$. Demnach iſt die Subtangente $\frac{ydx}{dy}=\frac{2y^2}{p}=\frac{2px}{p}=2x$, die Abſciſſen vom Scheitel an gerechnet, daher $AT=x$. Vergl. §. 324.

§. 327. Aufg. Die Subtangente für die Ellipſe und Hyperbel zu finden.

Auflöſ. Aus der Gleichung $y^2=px\mp\frac{px^2}{a}$ hat man $2ydy=pdx\mp\frac{2pxdx}{a}=\left(\frac{apx\mp 2px}{a}\right)dx$, folglich $\frac{dx}{dy}=\frac{2ay}{(a\mp 2x)p}$, folglich die Subtangente $\frac{ydx}{dy}=\frac{2ay^2}{(a\mp 2x)p}=\frac{2x(a\mp x)}{a\mp 2x}$, die Abſciſſen vom Scheitel an genommen, daher $AT=PT-x=\frac{ax}{a\mp 2x}$. (Vergl. §. 324. Für $a=\infty$ wird $AT=x$, §. 287.

§. 328. Zusatz. Ist bey der Ellipse $x = \frac{1}{2}a$: so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{(a-2x)p}{2ay} = \frac{0}{\frac{1}{2}ay}$, folglich verschwindet dy gegen dx, d. i. die Ordinate nimmt da unendlich weniger, als die Abscisse, zu. Folglich nimmt der Winkel mMR unendlich ab, d. i. die Tangente wird der Abscissenlinie parallel, wie auch für diesen Fall $PT = \frac{a \cdot \frac{1}{2}a}{0} = \infty$ beweist.

Allgemein also: Wird für eine gewisse Abscisse $\frac{dy}{dx} = 0$, also $\frac{dx}{dy} = \infty$, so ist die Tangente der Abscissenlinie parallel, folglich senkrecht auf eine Linie, die, wie AD, auf die Abscissenlinie senkrecht ist; wird aber $\frac{dy}{dx} = \infty$, also $\frac{dx}{dy} = 0$, so ist die Tangente einer Linie parallel, die, wie AD, der Ordinate parallel ist.

§. 329. Erkl. (Fig. 236. 237.) Wenn MO auf der Tangente MT senkrecht ist, und die Abscissenlinie in O schneidet, so heißt sie eine Normallinie, und das von ihr und der Ordinate begränzte Stück der Abscissenlinie, OP, die Subnormallinie.

§. 330. Aufg. (Fig. 236.) Die Subnormallinie jeder krummen Linie mit senkrechten Coordinaten zu finden.

Auflös. Wegen der rechten Winkel bey M und bey P ist TP : PM = PM : PO, d. i.

$\frac{ydx}{dy} : y = y : PO$, folglich $PO = \frac{y^2 dy}{ydx} = \frac{ydy}{dx}$.

§. 331.

§. 331. Zuſ. 1. Für die Parabel iſt $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$ §. 326, folglich $PO = \frac{1}{2}p$, alſo unveränderlich, und dem halben Parameter gleich.

§. 332. Zuſ. 2. Für die Ellipſe und Hyperbel iſt $\frac{dy}{dx} = \frac{(a \mp 2x)p}{2ay}$ §. 327, folglich $PO = \frac{(a \mp 2x)p}{2a}$.

§. 333. Zuſ. 3. Bey der Ellipſe iſt für $x = \frac{1}{2}a$, $PO = o$, §. 328, und für $p = a$, da ſich die Ellipſe in einen Kreis verwandelt, $PO = \frac{a - 2x}{2} = \frac{1}{2}a - x$, wenn nämlich LMN der Kreis um O iſt, weil alsdann alle Normallinien durch den Mittelpunkt gehen.

§. 334. Zuſ. 4. (Fig. 238.) In dem Kreiſe um O ſind Mm, mn, zwey nach einander folgende gleiche Bogen, und MV, mS, die Tangenten in M, m. Man ſetze $MOm = mOn = u$, und ziehe die Sehnen Mm, mn: ſo iſt $OMm = OmM = R - \frac{1}{2}u = VMO - VMm$, alſo $VMm = \frac{1}{2}u$, folglich $VSm = u$.

Läßt man nun die Sehnen Mm, mn, ihren Bogen unendlich nähern, und in Elemente des Kreiſes verwandeln, daß u unendlich abnimmt: ſo erhellet, daß zwey ſolche Elemente verlängert einen Winkel mit einander machen, der dem jeden Elemente zugehörigen Centriwinkel gleich iſt, und daß der Winkel eines Elements mit dem Halbmeſſer um die Hälfte dieſes Centriwinkels von einem rechten Winkel unterſchieden ſey, daß man alſo $OMm = R$ ſetzen kann, und nur, wenn man die unendlich kleinen Veränderungen der Winkel ſucht, $OMm = R - \frac{1}{2}u$ annehmen muß.

§. 335. Aufg. (Fig. 239.) Nach einem Punkte M in der Ellipſe gehen von den Brennpunkten F, G, ge-

gerade Linien FM, GM; man ſoll die Winkel beſtimmen, welche dieſe Linie mit der Tangente an M machen.

Auflöſ. Es ſey MN eine Sehne der Ellipſe: ſo iſt FM + MG = FN + NG, §. 218. folglich, wenn man NG + FM ſubtrahirt, MG — GN = FN — FM.

Sind nun MQ, MS Kreisbogen durch M aus den Brennpunkten F, G, die alſo auf verſchiedene Seiten der Sehne MN fallen: ſo iſt GS = GM, und FQ = FM, folglich nach Obigem GS — GN = FN — FQ, d. i. NS = NQ.

Ferner iſt in den Triangeln FMN, MNG, der äußere Winkel TMF, GNV, den beiden innern entgegengeſetzten gleich, d. i. TMF = MNF + MFN, und GMV = GNV — MGN.

Nun laſſe man N ſich dem Punkte M unendlich nähern, daß MN ein Element der Ellipſe und TV die Tangente wird, §. 314: ſo nehmen die Winkel an F, G, unendlich ab, und TMF, GMV nähern ſich unendlich den Werthen MNF, GNV; zugleich nähern ſich die Bogen MQ, NS, unendlich ihren Sehnen, oder werden Elemente, die ſich als gerade Linien anſehen laſſen.

Demnach iſt es verſtattet, die Figuren MNQ, MNS, als geradlinigte Triangel zu betrachten, worin NQ = NS, MN gemein, und bey Q und S Winkel, die von rechten unendlich wenig unterſchieden, §. 334. alſo für gleich zu halten ſind. Folglich ſind dieſe Triangel gleich, folglich iſt MNS = MNF. Nun iſt MNS = GNV. Folglich ſind die Winkel MNF, GNV, gleich, folglich auch die Wirbel TMF, GMV, die ſich jenen unendlich nähern, d. i. die Linien FM, GM, machen mit der Tangente auf beiden Seiten gleiche Winkel.

§. 336. Anm. 1. Nach den Geſetzen der Reflexion des Lichts werden alle Strahlen aus F nach G, und aus G nach F, von der El-

Ellipſe zurückgeworfen, daher auch F, G, Brennpunkte heißen.

§. 337. Anm. 2. Für die Hyperbel zeigen aus §. 227 ähnliche Betrachtungen, daß die Stralen aus dem einen Brennpunkte ſo zurückgeworfen werden, daß ſie rückwärts verlängert durch den andern Brennpunkt gehen. Für die Parabel rückt G unendlich weit hinaus, §. 221. daß alſo MG der Axe parallel wird, folglich die Parabel alle Stralen, die mit ihrer Axe parallel einfallen, in F vereinigt, daher ſie auch die Brennlinie heißt. Umgekehrt wirft ſie alle Stralen aus dem Brennpunkte F, mit der Axe parallel zurück.

§. 338. Aufg. (Fig. 236.) Die Lage der Aſymptoten einer krummen Linie zu finden.

Auflöſ. Da $AT = TP - AP = \frac{ydx}{dy} - x$: ſo iſt, weil $PT : PM = AT : AK$, $\frac{ydx}{dy} : y = \frac{ydx}{dy} - x : AK$, folglich $AK = y - \frac{xdy}{dx}$. Nun ſuche man dieſe Werthe erſt für ein unbeſtimmtes endliches x, und dann für $x = \infty$. Erhält man hiedurch beſtimmte Werthe für AT und AK in gegebenen Größen ausgedrückt, ſo iſt dadurch die Lage der Aſymptote gefunden, die ſich als die Tangente TM für einen unendlich entfernten Punkt M betrachten läßt.

Z. E. Bey der Hyperbel iſt $AT = \frac{ax}{a+2x}$ §. 327, und $AK = y - \frac{px(a+2x)}{2ay} = \frac{2ay^2 - pax - 2px^2}{2ay} = \frac{2apx + 2px^2 - apx - 2px^2}{2ay} = \frac{px}{2y}$; da dann für $x = \infty$

AT

$AT = \frac{1}{2}a$, und $x : y = x : \sqrt{\left(px + \frac{px^2}{a}\right)} = x : \sqrt{\frac{px}{a}}$ $= \sqrt{a} : \sqrt{p}$, folglich $AK = \frac{\sqrt{ap}}{2} = \frac{1}{2}c$, daß alſo T der Hyperbel Mittelpunkt, 2TA die große, und 2AK die kleine Axe iſt. Vergl. §. 230. 240.

Da auch $AK = \frac{\sqrt{ap}}{2}$ zwey entgegengeſetzte gleiche Werthe hat, ſo giebt es noch eine zweyte Aſymptote unter der Axe, die man findet, wenn man $-x$ unendlich ſetzt, da dann $AT = \frac{-px}{a-2x} = \frac{1}{2}a$.

§. 339. Anm. 1. Wird bey obiger Vorausſetzung $AT = \infty$, AK aber endlich oder $= 0$, ſo zeigt dieß an, daß im erſten Falle die Aſymptote in dem Abſtande AK der Abſciſſenlinie parallel ſey, im zweyten aber die Abſciſſenlinie ſelbſt eine Aſymptote ſey.

2. Verſtattet die Gleichung für die krumme Linie zwar unendliche Abſciſſen, giebt aber unter dieſer Vorausſetzung für AT und AK unendliche oder gar unmögliche Werthe, ſo zeigt dieß an, daß ſie keine Aſymptoten von der Art habe. Z. E. für die Parabel iſt $AT = x$, und $AK = \frac{1}{2}\sqrt{px}$, folglich für $x = \infty$ AT und AG unendlich, und für $-x = \infty$ AG unmöglich.

3. Verſtattet die Gleichung keine unendlichen Abſciſſen, ſo drücke man AT und AK durch y und bekannte Größen aus, und ſetze alsdann $y = \infty$. Dieß findet Statt, wenn die Aſymptote in einem endlichen Abſtande vom Anfange der Abſciſſen mit den Ordinaten parallel iſt, oder wenn die Ordinate des Anfangs ſelbſt ſchon unendlich groß, und daher eine Aſymptote iſt.

§. 340. Aufg. (Fig. 240.) Tangenten für krumme Linien zu ziehen, deren Ordinaten aus einem Punkte gehen.

Nämlich eines Kreiſes um C Halbmeſſer $CA = r$ ſey gegeben, daß von ihm der veränderliche Bogen $AP = x$ gerechnet werde, und es ſey MN der Bogen einer krummen

Li-

Linie, deren Punkt M im Halbmesser CP befindlich, und wozu die Ordinate CM=y gehöre, auch sey eine Gleichung zwischen AP und CM gegeben: Man soll an M eine Tangente legen.

Auflös. Es sey CT auf CP senkrecht, und treffe die gesuchte Tangente in T. Man ziehe Cp unendlich nahe bey CP, und mit dem Halbmesser CM den Bogen MS, daß also Pp, Ms, Mm, Elemente obgedachter Curven sind, so ist, weil CP : Pp = CM : MS, $r : dx = y : MS$, folglich $MS = \frac{ydx}{r}$, auch auf CP, Cp senkrecht, §. 334, folglich mS : SM = mC : CT = MC : CT, weil m unendlich nahe bey M ist, d. i. $dy : \frac{ydx}{r} = y : CT$, folglich $CT = \frac{y^2dx}{rdy}$.

§. 341. Zus. 1. Da CT und CA auf einerley oder auf verschiedenen Seiten von CP liegen, je nachdem CMm $\succ$ oder $\prec$ CMS ist, §. 334. d. i. Cm $\succ$ oder $\prec$ CM ist, also dx und dy einerley oder verschiedene Zeichen haben, §. 299, folglich CT bejaht oder verneint ist, so zeigt dieses, ob man in dem Perpendikel CT den Punkt T oberhalb oder unterhalb CP annehmen soll. Vergl. §. 324.

§. 342. Zus. 2. Für die Archimedische Spirallinie §. 265. ist $py = rx$, folglich $pdy = rdx$, und $\frac{dx}{dy} = \frac{p}{r}$, folglich $CT = \frac{y^2dx}{rdy} = \frac{py^2}{r^2} = \frac{xy}{r}$, daß man also den Bogen $AP = x$ rectificiren müßte, um die Tangente zu ziehen.

§. 343. Anm. Wir müssen es bey diesen ersten Kapiteln der Differentialrechnung hier bewenden lassen, die auch zu der Absicht, den Anfängern einen Vorschmack von dieser Wissenschaft zu geben, völlig hinreichen.

Der

Der sechste Abschnitt.

Von der Integralrechnung.

1. Grundbegriffe vom Integriren.

§. 344. Erkl. Eine gegebene Differentialgröße integriren, heißt diejenige Größe finden, durch deren Differentiirung die gegebene Größe entstanden ist. Die gefundene Größe heißt das Integral der gegebenen, welches man mit dem vor das Differential gesetzten Zeichen ſ bezeichnet. Z. E. ſ(adx)=ax.

§. 345. Zuſ. 1. Wenn man das gefundene Integral differentiirt, so muß, wofern man richtig gerechnet hat, das gegebene Differential herauskommen, welches die Probe des Integrirens ist.

§. 346. Zuſ. 2. Aus obigen Lehren von der Differentialrechnung hat man

ſ(dx + dy) = x + y = a. §. 299.
ſ(ydx + xdy) = xy. §. 300.
$$\int\left(\frac{ydx - xdy}{y^2}\right) = \frac{x}{y}.$$ §. 302.
ſ(nx^{n−1}dx) = x^n. §. 294.

§. 347.

§. 347. Zuſ. 3. Das letztere Differential in §. 346. kömmt am häufigſten vor, und begreift auch die übrigen unter ſich, §. 307. Man erhält ſein Integral durch ein dem Differentiiren entgegengeſetztes Verfahren, wenn man nämlich den Exponenten der veränderlichen Größe mit der Einheit vermehrt, und das ſo Erhaltene mit dem Product aus dem neuen Exponenten in das Differential der veränderlichen Größe dividirt. Z. E.

$$\int(nx^{n-1}dx)=\frac{nx^{n-1+1}dx}{(n-1+1)dx}=x^n.$$

$$\int(bx^{n-1}dx)=\frac{bx^ndx}{ndx}=\frac{bx^n}{n}$$

$$\int(ax^n\quad dx)=\frac{ax^{n+1}dx}{(n+1)dx}=\frac{ax^{n+1}}{n+1}$$

$$\int(a\sqrt{x}dx)=\int(ax^{\frac{1}{2}}dx)=\frac{ax^{\frac{1}{2}+1}dx}{(\frac{1}{2}+1)dx}=\frac{ax^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}ax\sqrt{x}$$

$$\int\left(x^{\frac{m}{n}}dx\right)=\frac{x^{\frac{m}{n}+1}dx}{(\frac{m}{n}+1)dx}=\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}$$

$$\int\left(\frac{dx}{\sqrt{x}}\right)=\int\left(x^{-\frac{1}{2}}dx\right)=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}dx}{(-\frac{1}{2}+1)dx}=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{x}.$$

Anm. 1. Dieſe Methode reicht in allen obigen und ähnlichen Fällen zu, nur darf in dem gegebenen Differential der Exponent der veränderlichen Größe weder ſelbſt veränderlich noch $=-1$ ſeyn, weil die im Vorigen zum Grunde gelegte Differentialformel §. 294. $d(Z^n)=nZ^{n-1}dZ$ auf dem Grunde des §. 293 beruhet, daß n eine ſolche beſtändige Größe ſey, für die z^n veränderlich iſt. Aber für $n=0$ wäre $z^0=1$ offenbar eine beſtändige Größe.

Anm. 2. Ueberhaupt iſt hier zu bemerken, daß man zwar Regeln hat, alle Größen zu differentiiren, wiewohl noch nicht alle dieſe Regeln in dem Vorhergehenden gegeben worden; daß aber die bisher bekannten Regeln des Integrirens noch nicht für alle

Fälle hinreichen, daß hier mancherley Schwierigkeiten zu überwinden sind, und die vorgelegte Differentiale oft mancherley Vorbereitungen erfordern, ehe sie zum Integriren geschickt werden; daß man also nur allmälig in diesem Geschäfte fortschreiten könne, und die ersten Anfänger sich vorerst nur an den nöthigsten Fällen begnügen müssen.

§. 348. Zus. 4. Da die beständige Größe, die durch + oder − mit der veränderlichen verbunden ist, beym Differentiiren wegfällt, §. 298. so muß man dieselbe, unter dem Zeichen C (Constans) dem gefundenen Integral beyfügen. Hienach sind die §. 346 angezeigten Integrale eigentlich vollständig $xy+C$, $\frac{x}{y}+C$, x^n+C; wobey C eine bejahte sowohl als eine verneinte Größe bedeutet, die aus den Umständen der jedesmaligen Aufgabe bestimmt werden muß, wovon Beyspiele im Folgenden vorkommen werden.

2. Quadratur der krummen Linien.

§. 349. Aufg. (Fig. 236.) Das Differential der Fläche CMP einer krummen Linie CMN zu finden.

Auflös. Wächst die Abscisse AP um PQ, und man ziehet QN mit PM, desgleichen MS, NB mit AQ parallel, so wächst die Fläche CMP um das Stück PMNQ, oder um PMSQ + MNS, da dann letzterer Theil kleiner als das Rectangel BS, und größer als der Triangel MNS ist. Nennt man daher die Fläche Z, und ihr endliches Wachsthum ΔZ, so ist

$\Delta Z < PM.PQ + NS.PQ$, und

$\Delta Z > PM.PQ + \frac{1}{2}NS.PQ$, oder der Quotient

$\frac{\Delta Z}{PM.PQ} < 1 + \frac{NS}{PM}$, und $> 1 + \frac{NS}{QPM}$.

Nun

Nun kann NQ der Ordinate PM unendlich nahe rücken, wodurch $\frac{NS}{PM}$ und $\frac{NS}{2PM}$ unendlich abnehmen, und der Quotient $\frac{\triangle Z}{PM \cdot PQ}$ der Gränze 1 unendlich nahe kömmt, d. i. $= 1$ wird. Denn wollte man ihm $= 1 + R$ setzen: so wäre $1 + R < 1 + \frac{NS}{PM}$, oder $R < \frac{NS}{PM}$, und es ließe sich R nicht angeben, da $\frac{NS}{PM}$ unendlich abnehmen kann. Für diesen Fall aber wird dZ aus $\triangle Z$, und dx aus PQ. Demnach ist $\frac{dZ}{ydx} = 1$, folglich $dZ = ydx$.

§. 350. Aufg. Jede krumme Linie zu quadriren, d. i. ihren Flächeninhalt durch x und y auszudrücken.

Auflös. Da die Fläche Z eine solche Function von x und y seyn muß, deren Differential, für jede Abscisse und die ihr zugehörige Ordinate, $= ydx$ ist, §. 349. so findet man Z, wenn man solche Function findet, d. i. wenn man ydx integrirt. Nämlich da $dz = ydx$ ist, so ist $z = f(ydx)$ welches sich aber unter den Formen §. 346. nicht befindet, und erst zum Integriren zubereitet werden muß, (vergl. §. 347.) indem man aus der Natur der vorgelegten krummen Linie y durch x, dx durch y und dy ausdrückt, wie die nun folgenden Beyspiele lehren werden.

§. 351. Aufg. Die Parabel, deren Gleichung $y^2 = px$ ist, zu quadriren.

Auflös. Hier ist $y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, folglich $dZ = ydx = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$, folglich $Z = p^{\frac{1}{2}} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x \sqrt{px} = \frac{2}{3} xy$, oder vollständig $Z = \frac{2}{3} xy + C$. §. 348.

Diese C zu bestimmen, die für jedes x, also auch für $x=0$ einerley bleibt, setze man $x=0$, da dann auch $=Z_0$, folglich $c=C$ ist. Demnach ist vollständig $Z=\frac{2}{3}xy$, d. i. $\frac{2}{3}$ des Rectangels, aus den Coordinaten, also $=\frac{2}{3}$ CP. PM.

§. 352. Zus. 1. Von dem ganzen Rectangel CP. PM, Z abgezogen, bleibt für das Stück außen an der Parabel $\frac{1}{3}xy$, und von der Fläche Z den Triangel CMP abgezogen, bleibt, für das Segment des Bogens CM, $\frac{2}{3}xy$.

§. 353. Zusatz 2. Wollte man die Fläche PMNQ quadriren, so setze man CP=a, PQ=x, QN=y, folglich hier die Gleichung für die Parabel $y^2=p(a+x)$, oder $y=\sqrt{(ap+px)}$, folglich $ydx=(ap+px)^{\frac{1}{2}}dx$.

Dies zu integriren, setze man $ap+px=u$, folglich $pdx=du$, und $dx=\frac{du}{p}$, folglich $ydx=\frac{u^{\frac{1}{2}}du}{p}$, folglich $\int ydx=\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}p}=\frac{2u\sqrt{u}}{3p}$, und anstatt u seinen Werth gesetzt $\int ydx=\frac{2(ap+px)\sqrt{(ap+px)}}{3p}+C=\frac{2}{3}(a+x)\sqrt{(ap+px)}+C$, welches, für $x=0$, auch $=0$ wird. Hiedurch hat man $0=\frac{2}{3}a\sqrt{(ap)}+C$, folglich $C=-\frac{2}{3}a\sqrt{ap}$, folglich PMNQ $=\frac{2}{3}(a+x)\sqrt{(ap+px)}-\frac{2}{3}a\sqrt{ap}$, d. i. $\frac{2}{3}$CQ. QN $-\frac{2}{3}$CP. PM.

§. 353. Aufg. (Fig. 241.) Die Hyperbel, deren Gleichung $y=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ ist, zu quadriren.

Auf-

Auflöſ. Seyn nämlich A der Anfang der Abſciſſen, ſo iſt für $x=o$, $AF=\infty$, und für $x=\infty$, $AE=\infty$. Da auch ein bejahtes ſowohl als ein verneintes x einerley bejahtes y giebet, ſo zieht ſich dieſe Hyperbel an beiden Seiten der Aſymptote AF, aber nur an einer Seite der Aſymptote eAE hin.

Nun iſt $\int ydx = a^3 \int x^{-1} dx$, folglich iſt $Z = \frac{a^3 x^{-1+1}}{-1+1} + C = \frac{-a^3}{x} + C$. Setzte man hier $x=o$, ſo würde $\frac{a^3}{o} = \infty$, und $o = \frac{-a^3}{x} + C$, folglich $C = \frac{a^3}{x} = \infty$, welches nicht ſeyn kann. Dies zeigt alſo an, daß das Integral für $x=AP$ nicht den Raum AFBMP bedeuten könne, und man findet hier, daß es den Raum DMPE bedeuten müſſe, weil das Differential $ydx = PM \cdot Pp$ ſo gut von jenem als von dieſem Raume ein Differential ſeyn kann. Daß aber letzteres hier ſtatt finde, erhellet daraus:

1). weil $Z = \frac{-a^3}{x}$ alſo negativ iſt. Denn da ein bejahter Werth von Z den Raum vom Anfange der Abſciſſen A bis zum Ordinate PM anzeigt, ſo bedeutet der negative Werth den Raum an der entgegengeſetzten Seite dieſer Ordinate PM.

2) weil der Werth $\frac{a^3}{x}$ abnimmt, wenn x wächſt, welches nicht bey jenem, ſondern nur bey dieſem Raume ſtatt findet.

Demnach iſt $DEPM = \frac{-a^3}{x} + C = o$ für $x=\infty$, wodurch $C=o$ wird. Folglich iſt $DEPM = \frac{-a^3}{x}$.

Setzte man $Z=0$, für $x=b$: so ist $C=\frac{a^3}{b}$, folglich $Z=\frac{-a^3}{x}+\frac{a^3}{b}=\frac{-a^3b+a^3x}{bx}=\frac{a^3x-b}{bx}$, welches für $AG=b$ den Raum $GOMP$ giebt.

3. Die logarithmischen Differentiale.

§. 355. Aufg. (Fig. 242.) Eine krumme Linie zu verzeichnen, deren Abscissen die Logarithmen des zugehörigen Ordinaten vorstelle, und welche daher die logarithmische Linie, oder die Logistik, logarithmica, l. logistica, heißt.

Auflös. Durch den Anfang der Abscisse A sey AB senkrecht, und $AP=AB=1$, auch $PC=c$ mit AB parallel, und es laufe durch B und C eine krumme Linie so, daß für $x=AR$, und $y=RE$, $AB:RE=p(AB:PC)$ sey, wann $\frac{AR}{AP}=p$ ist; p mag nun eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn: so stellen die Abscissen dieser krummen Linie die Logarithmen der zugehörigen Ordinaten vor, und es ist $\frac{RE}{AB}$ so groß, als des Quotienten $\frac{PC}{AB}$ Potenz, deren Exponent $\frac{AR}{AP}$ ist, folglich, weil $AB=AP=1$ gesetzt wird, $y=c^x$.

§. 356. Zus. 1. Für eine andere Abscisse $x+m$ setze man die Ordinate $y+n$, daß also $y+n=c^{x+m}$ sey: so muß, weil $y=c^x$ ist, $\frac{y+n}{y}=\frac{c^{x+m}}{c^x}=c^m$ seyn. Soll

dem-

demnach $z:z+p=y+n$ ſeyn, ſo iſt allemal $\frac{z+p}{z}=c^m$, d. i. wenn zwey Paar Ordinaten einerley Verhältniß haben ſollen, ſo iſt das Stück der Abſciſſenlinie zwiſchen jedem dieſer Paare gleich groß, und umgekehrt, wenn dieſes iſt, ſo iſt jenes. Z. E. Iſt PQ=QR: ſo iſt PC:QD=QD:RE.

Demnach ſtellt dieſe Linie ein logarithmiſches Syſtem vor, wo PC=c die Zahl bedeutet, deren Logarithmus =1 iſt.

§. 357. Zuſ. 2. (Fig. 243.) Wäre AB=AP=1, und PC=c, oder PG=f: ſo hätten die beyden krummen Linien BC, BG, nur den Punkt B gemein, daß für die erſte $y=c^x$, für die zweyte $y=f^x$ wäre, und ſtellten alſo zwey Syſteme vor, in deren einem der Logarithmus von c, im andern aber von f, =1 wäre.

§. 358. Zuſ. 3. Da die Ordinaten, von A nach R zu, unendlich wachſen, ſo nehmen ſie von A nach O zu unendlich ab, und c^{-x}, wo $c>1$, wird immer kleiner, behält aber immer noch einen Werth, d. i. die Abſciſſenlinie nähert ſich der Curve immer mehr, doch ohne ſie je zu treffen, und iſt alſo ihre Aſymptote.

§. 359. Zuſ. 4. Iſt AP=1 in r Theile getheilt, deren jeder m §. 357, daß alſo $1=r.m$, wobey r eine ganze Zahl bedeutet: ſo ſey für das erſte m von A an, die Ordinate 1+q, ſo daß $r(1:1+q)=1:c$ wird. Demnach iſt $c^m=(1+q)^m=1+q$, folglich $c^m-1=q$. Hieraus erhellet:

1) wenn r, d. i. m und c, nach Belieben feſtgeſetzt iſt, daß dadurch q beſtimmt ſey.

2) wenn c und q nach Belieben feſtgeſetzt iſt, daß dadurch r, d. i. m beſtimmt ſey.

§. 360. Zuſ. 5. Für zwey Ordinaten $y+n$ und y, §. 356. iſt der Unterſchied $n = c^{x+m} - c^x = c^x(c^m - 1) = y.q$, §. 359. Folglich iſt $\frac{y}{n} = \frac{1}{q}$, folglich $\frac{ym}{n} = \frac{m}{q}$ eine Größe, die für alle y einerley iſt. §. 359.

Wächſt nun x unendlich, ſo nehmen m und n unendlich ab, und $\frac{ym}{n}$ verwandelt ſich in $\frac{ydx}{dy}$, d. i. in die Subtangente, daß alſo die Subtangente der logarithmiſchen Linie $= \frac{m}{q}$ unveränderlich iſt, aber auch endlich, weil eine Linie, deren Subtangente $= 0$ oder $= \infty$ wäre, der Abſciſſenlinie ſenkrecht oder parallel ſeyn müßte, beides aber bey der logarithmiſchen Linie nicht ſtatt findet.

Demnach iſt $\frac{ydx}{dy} = a$ die Gleichung für die logarithmiſche Linie, wobey a eine unveränderliche endliche Größe bedeutet.

§. 361. Zuſ. 6. Aus voriger Gleichung hat man $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{y}$, folglich $\frac{x}{a} = \int\left(\frac{dy}{y}\right)$ d. i. $\frac{x}{a}$ muß eine ſolche Function von y ſeyn, daß, wenn man ſie durch y ausdrückt, ihr Differential $\frac{dy}{y}$ ſey.

Nun iſt $y = c^x$ §. 355, folglich $ly = xlc$, oder, weil $lc = 1$ iſt, $ly = x$. Folglich iſt $d(\log y) = \frac{ady}{y}$, und $\frac{ly}{a} = \int\left(\frac{dx}{y}\right)$.

Weiß man alſo, wie groß a iſt, d. i. wie ſich die Subtan-

tangente zu AB verhält, und kann man $\frac{dy}{y}$ integriren, so giebt dies Integral mit a multiplicirt den Logarithmus von y in diesem Systeme.

§. 362. Anm. Das Integral von $\frac{dy}{y}$ (wo im Zähler das Differential der veränderlichen Größe des Nenners befindlich ist) kann keine Potenz von y seyn, oder $\frac{dy}{y}$ läßt sich nicht als das Differential einer Potenz von y betrachten. Denn wollte man $y^{-1}dy$ wie gewöhnlich integriren: so erhielte man $\frac{y^0}{0}+C=\frac{1}{0}+C$, welches offenbar ungereimt ist, weil das Integral weder unveränderlich noch unendlich seyn kann. Man vergleiche auch §. 347.

4. Reihen für die Logarithmen.

§. 363. Aufg. Den einer gegebenen Zahl zugehörigen Logarithmus durch eine unendliche Reihe auszudrücken.

Auflös. Die Zahl heiße y, ihr Logarithmus x, und man setze $y=1+u$, daß u eine Zahl, welche man will, bedeute: so ist $x=l(1+u)$ folglich aus §. 361, $dx=\frac{adu}{1+u}$, und wenn man nach Arithm. §. 192 dividirt, $dx=a(du-udu+u^2du-u^3du....)$ und integrirt $x=a(u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4+\frac{1}{5}u^5....)$

Für die Constante setze man $u=0$, so ist, weil $\log 1=0$ ist, $x=0$, folglich $0=C$, also das gefundene Integral vollständig. Soll nun dasselbe convergiren, so muß $u<1$, folglich $y<2$ seyn.

§. 364. Zuſatz. Hieraus, oder auf eben die Art findet man $l(1-u)=a(-u-\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{3}u^3\ldots)$

§. 365. Aufg. Die einem gegebenen Logarithmus x zugehörige Zahl y durch eine unendliche Reihe auszudrücken.

Auflöſ. Da $y=1+u$: ſo braucht man nur u zu ſuchen. Nun war §. 363. $dx=\frac{adu}{1+u}$. Folglich iſt $dx+udx=adu$, folglich $du=\frac{dx}{a}+\frac{udx}{a}=A$, und $\frac{dx}{a}=du-\frac{udx}{a}=B$. Um hieraus u durch x zu beſtimmen, verfahre man auf folgende Art:

Das erſte Glied in A iſt $\frac{dx}{a}$, welches integrirt $\frac{x}{a}$ zum erſten Gliede für u giebt. Setzt man nun $u=\frac{x}{a}+p$: ſo wird in B das zweyte Glied $-\left(\frac{x}{a}+p\right)\frac{dx}{a}=-\frac{xdx}{a^2}-\frac{pdx}{a}$, daher in A das zweyte Glied $+\frac{xdx}{a^2}+\frac{pdx}{a}$, daher in u, $p=+\frac{x^2}{2a^2}+\ldots$ folglich $+\frac{pdx}{a}=+\frac{x^2dx}{2a^3}+\ldots$ daher in u nunmehr $p=+\frac{x^2}{2a^2}+\frac{2x^3}{3.2.a^3}+\ldots$ Fährt man nun auf dieſe Art ferner fort, ſo erhält man nach einander die Glieder folgender Reihen:

A. $du=\frac{dx}{a}+\frac{xdx}{a^2}+\frac{x^2dx}{2a^3}+\frac{x^3dx}{3.2.a^4}\ldots$

B.

B. $\frac{-udx}{a} = \frac{-xdx}{a^2} - \frac{x^2dx}{2a^3} - \frac{x^3dx}{3.2.a^4} \ldots$

C. $u = \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3.2.a^3} + \frac{x^4}{4.3.2.a^4} \ldots$

Hieraus erhellet allgemein:

1. daß alle Glieder in C bejaht werden, wenn das erste bejaht ist, weil ein bejahtes Glied in C ein verneintes in B, folglich in A ein bejahtes giebt;

2. daß, wenn in C irgend ein Glied $= \frac{x^n}{n.n-1\ldots.2a^n}$ ist, dieses in B und A $\frac{x^ndx}{n.n-1\ldots.2a^{n+1}}$ bringe, und durch die Integration das nächstfolgende Glied in C $\frac{x^{n+1}}{n+1.n.n-1\ldots.2a^{n+1}}$ gebe.

Um nun auch die Constante zu finden, setze man $u=0$, da dann $x = l(1+u) = \log 1 = 0$ ist, folglich auch die Constante $=0$ giebt, daß also das gefundene Integral vollständig ist.

§. 366. Aufg. (Fig. 242.) Diejenige Ordinate, deren Abscisse der Subtangente gleich ist, zu finden.

Auflös. In der Reihe u §. 365. setze man $x=a$: so ist $y = 1+u = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}\ldots = 2,718281$ 828459 045235 360286 1 vergl. Hrn. Langsdorfs Erläuterungen der Kästnerschen Anal. des Unendl. S. 138. Diese Zahl, welche e heißen soll, ist also gegeben, und bleibt nicht nur für alle Stellen einer gegebenen logarithmischen Linie, sondern auch, da sie von c nicht abhängt, für alle logarithmischen Linien einerley, so wie die Ludolphische Zahl π für alle Kreise.

Es

Es ſey demnach eine logarithmiſche Linie BCE gegeben, und man ziehe in der Weite e eine Linie mit der Aſymptote parallel, welche die logarithmiſche Linie in D ſchneide: ſo iſt DQ die geſuchte Ordinate, und AQ = a.

§. 367. Aufg. Für den Logarithmus einer gegebenen Zahl §. 363 eine ſchneller convergirende Reihe zu finden.

Auflöſ. Aus §. 363. 364 hat man

$\log(1+u) = a(u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 \ldots)$
$\log(1-u) = a(-u - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{5}u^5 \ldots)$ folglich

$\log\frac{1+u}{1-u} = a(2u + \frac{2}{3}u^3 + \frac{2}{5}u^5 \ldots)$

$= a.2.(u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 \ldots) = a.2u(1 + \frac{1}{3}u^2 + \frac{1}{5}u^4 \ldots)$

welche Reihe, da die Glieder immer um zwey Grade ſteigen, ſich ſchneller als die §. 363. nähert.

§. 368. Anm. Herr Langsdorf in der Erläuterung der Käſtn. Anal. des Unendl. S. 140 ſtellet bey dieſer Gelegenheit folgende nützliche Betrachtungen an:

1. Man ſieht hieraus die Möglichkeit, die Baſis c einer logarithmiſchen Linie, d. i. die Zahl, deren Logarithmus 1 iſt, durch die gegebene Subtrangente a zu beſtimmen.

Denn aus §. 367 hat man $\log\frac{1+u}{1-u} : 2a = u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 \ldots$ Setzt man nun $c = \frac{1+u}{1-u}$, folglich $\log\frac{1+u}{1-u} = 1$: ſo iſt $\frac{1}{2a} = u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 \ldots$, oder $\frac{1}{2a} - u - \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 \ldots = 0$. Könnte man aus dieſer Gleichung, welche A heißen ſoll, die Wurzel finden, ſo hätte man $\frac{1+u}{1-u} = e$.

2. Die Gleichung A enthält unendlich viele Glieder, die alle, auſſer dem erſten, verneint ſind. Sie hat alſo nur eine einzige

Ab-

Abwechselung der Zeichen, aber unzählig viele Folgen, und enthält daher nur eine mögliche bejahte, aber unzählig viele entweder verneinte oder unmögliche Wurzeln. Ersteres kann nicht seyn. Denn wäre u verneint, so wären alle ungerade Potenzen von u, die hier blos vorkommen, auch verneint, folglich alle mit + bezeichnete Glieder bejaht, und ihre Summe müßte mit dem bejahten $\frac{1}{2a}$ die Null ausmachen, welches offenbar nicht seyn kann. Demnach hat u in der Gleichung einen möglichen bejahten, und unzählig viele unmögliche Werthe.

1. Aus diesen Beweise erkennet man also, daß es für $c=\frac{1+u}{1-u}$ folglich allgemein für $y=c^x$, also auch für lc und ly, nur einen möglichen, aber unzählig viele unmögliche Werthe gebe, d. i. »in »jedem logarithmischen Systeme gehören jeder Zahl nur ein mög»licher, aber unzählig viele unmögliche Logarithmen zu.«

Nämlich die Abscisse der logarithmischen Linie, welche dieser Zahl, als Ordinate angesehen, zugehört, ist nur der mögliche Logarithmus.

§. 369. Zus. Man setze eine willkührliche ganze Zahl $N=\frac{1+u}{1-u}$: so ist $1+u=N-Nu$, folglich $u+Nu$, d. i. $u(N+1)=N-1$, folglich $u=\frac{N-1}{N+1}$ allemal ein ächter Bruch, der desto größer, je größer N ist, da z. E. für $N=1001$, $u=\frac{1000}{2001}$ wäre. Demnach nähert sich die Reihe §. 367, was auch N sey, und es erhellet hieraus wenigstens die Möglichkeit, wenn a bekannt ist, den Logarithmus einer jeden Zahl unmittelbar zu finden. Denn in der Ausübung sucht man lieber die Logarithmen kleiner Zahlen (woraus man die für größere haben kann) aus Reihen, die sich schneller nähern.

§. 370. Exempel. Sucht man die Größe von a, da-

damit log 10 = 1 werde: ſo iſt hier $\frac{1+u}{1-u} = 10$, folglich $u = \frac{9}{11}$, und $1 = a \cdot 2\left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3 \cdot 11^3} + \frac{9^5}{5 \cdot 11^5} \cdots\right)$ woraus ſich a ergiebt, welches aber §. 377. bequemer berechnet werden wird.

Dieſes a iſt demnach die Subtangente für das Briggiſche Syſtem, deſſen Baſis = 10 iſt.

§. 371. Erkl. Natürliche Logarithmen heißen diejenigen, für welche a = 1 iſt.

§. 372. Zuſ. Im natürlichen logarithmiſchen Syſteme gehört alſo x = a = 1 als Logarithmus zur Zahl e. §. 366. daß alſo e die Baſis dieſes Syſtems iſt.

§. 373. Aufg. Die natürlichen Logarithmen der erſten 10 Zahlen mittelſt der Reihe §. 367. zu finden.

Auflöſ. Man ſetze u nach und nach $\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{99}$: ſo wird $\frac{1+u}{1-u}$ nach und nach $\frac{3}{1}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{50}{49}$, wofür man die Logarithmen leicht findet. (Vergl. Hrn. Langsdorfs Erläuterung der Käſtnerſchen Anal. des Unendl. S. 148.) aus denen ſich die Logarithmen der erſten 10 Zahlen, wie man ſie in L. Euleri introductio in anal. infin. P. I. §. 123. findet, auf folgende Art ergeben:

$l\frac{3}{2} + l\frac{4}{3} = l2.$	$l2 + l3 = l6.$	$3l2 = l8.$
$l\frac{3}{2} + l2 = l3.$	$2l5 + l2 = l50.$	$2l3 = l9.$
$2l2 = l4.$	$l50 - l\frac{50}{49} = l49.$	$l2 + l5 = l10.$
$l\frac{5}{4} + l4 = l5.$	$\frac{1}{2}\log 49 = l7.$	

§. 374. Anmerk. Herr Langsdorf a. a. O. S. 152 f leitet aus dem Vorhergehenden noch zwey andere Formeln ab, die zur wirklichen Berechnung der natürlichen Logarithmen, beſonders wenn man die §. 373 berechneten Logarithmen bereits vorausſetzt, vorzüglich geſchickt ſind. Nämlich

1. Aus

1. Aus §. 363. hat man für natürliche Logarithmen $l(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 \ldots$

Setzt man $\alpha u = z$, folglich $u = \frac{z}{\alpha}$, und bringe diesen Werth in vorstehende Gleichung, so erhält man

$$l\frac{\alpha+z}{\alpha} = \frac{z}{\alpha} - \frac{z^2}{2\alpha^2} + \frac{z^3}{3\alpha^3} - \frac{z^4}{4\alpha^4} \ldots$$

Nun ist $l\frac{\alpha+z}{\alpha} = l(\alpha+z) - l\alpha$. Folglich ist

$$l(\alpha+z) = l\alpha + \frac{z}{\alpha} - \frac{z^2}{2\alpha^2} + \frac{z^3}{3\alpha^3} - \frac{z^4}{4\alpha^4} \ldots,$$ folglich für $z = 1$,

$$l(\alpha+1) = l\alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{1}{3\alpha^3} - \frac{1}{4\alpha^4} \ldots$$

2. Aus §. 364 erhält man auf vorige Art

$$l\alpha - z) = l\alpha - \left(\frac{z}{\alpha} + \frac{z^2}{2\alpha^2} + \frac{z^3}{3\alpha^3} \ldots\right)$$ folglich

$$l(\alpha+z) - l(\alpha-z) = \frac{2z}{\alpha} + \frac{2z^3}{3\alpha^3} + \frac{2z^5}{5\alpha^5} \ldots$$ folglich für $\alpha = 1$,

$$l(z+1) = l(\alpha-1) + \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{3\alpha^3} + \frac{2}{5\alpha^5} \ldots$$

Den Gebrauch dieser Formel hat durch ein Beyspiel erläutert Herr Langsdorf a. a. O. S. 155–157.

§. 375. Lehrs. (Fig. 243.) Die Logarithmen von einerley Zahl in zwey Systemen verhalten sich wie die Subtangenten.

Bew. In den einen logarithmischen Linie sey die Subtangente a, in der andern b, und für die Ordinate y die Abscisse dort x, hier v: so ist zu beweisen, daß $x : v = a : b$ sey.

Da für die erste Linie $y = c^x$, und für die zweyte $y = f^v$ §. 357, und der Ordinate e die Abscissen a, b, zugehören, §. 366,

§. 366, so ist $c=e$, und $f=e$, oder $c=e^{\frac{x}{a}}$, und $f=e^{\frac{v}{b}}$, folglich $y=e^{\frac{x}{a}}$, und $y=e^{\frac{v}{b}}$, folglich $\frac{x}{a}=\frac{v}{b}$ d. i. $x:v=a:b$.

§. 376. Zus. 1. Für $a=1$ ist x der natürliche, und v der künstliche Logarithmus von ein und eben Zahl y. Jener heiße ly, und dieser Ly. Demnach ist $Ly=b:ly$, und $ly=\frac{Ly}{b}$.

§. 377. Zus. 2. Soll $L\,10=1$ seyn, so hat man $1=b.l10$, folglich $b=\frac{1}{l10}$ aus §. 373. Hier ist b, was a in §. 370 war, aber viel bequemer zu berechnen. Aus L. Euleri l. c. §. 124. ist dieses $b=$

0,434294 48190325 18276 51128 9

§. 378. Zus. 3. Für das Briggische System, wo $L\,10=1$ ist, berechnet man den Logarithmus einer jeden Zahl, wenn man den natürlichen Logarithmus eben der Zahl mit der Zahl b in §. 377 multiplicirt. So würden sich die Briggischen Logarithmen viel leichter finden lassen, als man sie wirklich gefunden hat.

§. 379. Zus. 4. Hienach ist auch log. Brigg. $e=b$. log. nat. $e=b.1$, also die Zahl b in §. 377, oder die Subtangente des Briggischen Systems, §. 370.

§. 380. Zus. 5. Die Zahl, deren natürlicher Logarithmus $=1$, ist das e in §. 366. Ist also (Fig. 242.) $AP=AB=1$, und $PC=e$: so stellt diese logarithmische Linie die natürlichen Logarithmen vor, und ihre Subtangente ist $=AB$.

§. 381. Aufg. (Fig. 241.) Es sey BCD eine gleichseitige Hyperbel zwischen ihren Asymptoten AF, AE;

AE; man sucht den Raum GCMP, wenn GC, PM, mit AF parallel sind.

Auflös. 1. Aus §. 243. war $CQ\,QM=\frac{a^2+c^2}{16}$. Folglich ist hier, wo $a=c$ §. 248, $AP\,PM=\frac{2a^2}{16}=\frac{a^2}{8}$, folglich $PM=\frac{a^2}{8AP}$. Nun sey $GCMP=Z$, und $Pp=dAP$: so ist $dZ=PMmp=PM\,Pp=\frac{a^2}{8}\cdot\frac{dAP}{AP}$. Folglich ist dZ das Differential des Logarithmus von AP für ein logarithmisches System, dessen Subtangente $\frac{a^2}{8}$ ist. Da also AP als eine Zahl anzusehen ist: so nehme man für sie AG zur Einheit an, so daß das Integral von $\frac{dAP}{AP}$ der natürliche Logarithmus von $\frac{AP}{AG}$ ist: so wird $Z=\frac{a^2}{8}\cdot l\frac{AP}{AG}+C$. Um hier C zu bestimmen, setze man $AP=AG$, daß $Z=o$ sey: so ist $o=\frac{a^2}{8}l\frac{AP}{AG}+C$. Nun ist für $AP=AG$, $l\frac{AP}{AG}=l1=o$. Folglich ist $o=C$, und daher das vollständige Integral $Z=\frac{a^2}{8}\cdot l\frac{AP}{AG}$.

2. Hiebey kann man AG willkührlich, nur nicht $=B$ annehmen. Denn setzte man $AG=o$: so würde die Fläche Z unendlich, welches anzeigt, daß der Raum FAPMo

unendlich wäre, anders als der gleichfalls unendliche Raum einer andern Hyperbel. §. 354.

3. Man setze, AC halbire den Asymptotenwinkel, und sey also zugleich die halbe Axe: so wird GAC = 45 Grad, folglich AG = GC, folglich $2AG^2 = AC^2$, oder $AG^2 = \frac{AC^2}{2}$ und $AG = \frac{AC}{\sqrt{2}}$, wo $AC = \frac{a}{2}$, also $AG = \frac{a}{2\sqrt{2}}$, folglich für AG = 1, $1 = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ folglich $2\sqrt{2} = a$, die Axe der Hyperbel.

Anmerk. Dies giebt $4.2 = a^2$, folglich $1 = \frac{a^2}{8}$, folglich $Z = l\frac{AP}{AG}$, so wie umgekehrt die Voraussetzung $\frac{a^2}{8} = 1$, auch AG = 1 giebt, wo nämlich AG die Abscisse ist, deren zugehörige Ordinate den Scheitel C trifft.

4. Setzt man also GP = u: so ist AP = 1 + u, folglich die Fläche Z = log. nat. (1 + u), und läßt sich durch die Reihe §. 263 finden, wenn u < 1 ist, folglich die Reihe convergirt.

Hiezu setze man AP = N, §. 369, und suche daraus $u = \frac{N-1}{N+1}$. Dies giebt §. 367 $\log AP = \left(1 + \frac{N-1}{N+1}\right) : \left(1 - \frac{N-1}{N+1}\right)$ folglich $Z = \log AP = 2u\left(1 + \frac{1}{3}u^2 + \frac{1}{5}u^4 + \frac{1}{7}u^6 \ldots.\right)$ wo man anstatt u nur $\frac{AP-1}{AP+1}$ setzen darf.

§. 382. Zus. Die letztere Gleichung für Z §. 381. ist also ein allgemeiner Ausdruck für die Quadratur der gleichseitigen Hyperbel zwischen ihren Asymptoten. Könnte man daher

daher die natürlichen Logarithmen genau angeben, so hätte man auch obgedachte Quadratur, und umgekehrt ließen sich aus dieser Quadratur die natürlichen Logarithmen genau angeben. Demnach hängen die natürlichen Logarithmen mit der Quadratur der Hyperbel genau zusammen, und heißen daher auch hyperbolische Logarithmen.

§. 383. Anmerk. Man hat drey Hauptsysteme von Logarithmen:

1. Das gemeine, oder das Briggische, dessen Basis $=10$ ist, und dessen man sich gewöhnlich zur Abkürzung der Rechnung bedient.

2. Das natürliche, oder hyperbolische, dessen Basis $=e$ §. 366. ist, welches zwar blos zur Abkürzung der Rechnungen nicht gebraucht wird, aber doch unentbehrlich ist, wenn die natürlichen Logarithmen als absolute Größen in Rechnungen mit vorkommen. Man findet von ihnen zwey brauchbare Tafeln in des H. Vega logarithmische, trigonometrische und andere Tafeln. Wien 1783. Tab. III. IV.

Auf die hyperbolischen Logarithmen hat man auch die Erfindung der parabolischen gegründet, die sinnreich, aber ohne Nutzen ist. Von diesen findet man zwey Abhandlungen in Brendelii opusc. mathem. et medic. Götingae 1769. p. 32. 46.

3. das Nepersche, dessen Basis noch ungewiß ist. H. Hofr. Karsten Lehrbegriff der Mathematik. II. Th. 2. Abthl. 1786 Algebr. §. 148. nimmt dafür die Zahl 9999999 an. H. Hofr. Kästner Astron. Abh. II. Sammi. S. 68 findet sie $=9999999,0000005$. Die Gleichung daselbst S. 65. log. nat. $\frac{y}{m} = -\frac{1}{m}$ log. Nep. y. wo $m = 10000000$ ist, lehrt allgemein, daß die natürlichen Logarithmen von den Nepersche nicht in den Zahlen selbst, sondern nur in der Bezeichnung der Decimalstellen und den Zeichen + und − verschieden sind; wie Herr Langsdorf Erläuterung der Kästn. Annal. das Umendl. S. 162 bemerkt, wo er auch noch beyfügt, daß Neper seine Logarithmen eben solche Zahlen gesetzt hat, die den zugehörigen nur überaus nahe kommen.

5. Umgekehrte Methode der Tangenten.

§. 384. Erkl. Das Verfahren, aus den gegebenen Eigenschaften der Tangenten oder Subtangenten, der Normalen oder Subnormalen einer krummen Linie, die Gleichung für die krumme Linie selbst zu finden, heißt die umgekehrte Methode der Tangenten, methodus tangentium inversa, im Gegensatz von dem Verfahren im Vorhergehenden aus der gegebenen Gleichung für die Linie die Eigenschaften ihrer Tangenten oder Normalen abzuleiten, welches nun zum Unterschiede die gerade Methode der Tangenten, methodus tangentium directa, heißt.

§. 385. Aufg. Die krumme Linie zu finden, deren Subtangente $= \frac{y^n}{r+x}$ ist.

Auflös. Da $\frac{ydx}{dy} = \frac{yy}{r+x}$, oder mit $\frac{y}{dy}$ dividirt, $dx = \frac{ydy}{r+x}$, folglich $rdx + xdx = ydy$: so ist $rx + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}y^2 + C$, wo $C=0$, wenn x und y zugleich $=0$ sind. Demnach ist $rx + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}y^2$; oder $2rx + x^2 = y^2$, d. i. die gesuchte Linie eine gleichseitige Hyperbel, wo $b=a=2r$. §. 248. 226.

§. 386. Aufg. Die krumme Linie zu finden, deren Subnormale unveränderlich ist.

Auflös. Da $\frac{ydy}{dx} = a$, oder $ydy = adx$: so ist $\frac{1}{2}y^2 = ax + C$. Wäre nun $y=b$, für $x=0$, also $\frac{1}{2}b^2 = 0 + C$, d. i. $C = \frac{1}{2}b^2$: so wäre $\frac{1}{2}y^2 = ax + \frac{1}{2}b^2$, oder $y^2 = 2ax + b^2$, oder $\frac{y^2}{2a} = x + \frac{b^2}{2a}$, wo man allemal $x = u - \frac{b^2}{2a}$ setzen kann.

kann. Hiedurch iſt $\frac{y^2}{2a} = u$, folglich $y^2 = 2au$, d. i. die geſuchte Linie eine Parabel, deren Parameter $= 2a$ iſt.

§. 387. Zuſ. Schon §. 331. iſt gefunden, daß bey der Parabel die Subnormale unveränderlich ſey. Aber hier zeigt es ſich, daß blos die Parabel dieſe Eigenſchaft haben könne, weil das gefundene allgemeine Integral allemal die Parabel giebt. Demnach kann man mittelſt der umgekehrten Methode der Tangenten verſuchen, welche von den durch die gerade Methode gefundenen Sätzen ſich umkehren laſſen.

6. Rectification der krummen Linien.

§. 388. Aufg. (Fig. 236.) Das Differential des Bogens CM einer krummen Linie zu finden.

Auflöſ. Der Bogen CM heiße s, und wachſe um $MN = \Delta s$. Da nun offenbar der Bogen MN > als die Sehne MN, aber dieſe Sehne $MN = \sqrt{(MS^2 + NS^2)}$ iſt: ſo iſt $\frac{\Delta s}{\sqrt{(MS^2+NS^2)}} > 1$. Setzt man dieſen Quotienten $= 1 + p$: ſo kann NQ unendlich nahe an PM rücken, folglich p kleiner als jede endliche Größe werden, da dann $\frac{ds}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = 1$, folglich $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ wird. (Vergl. Bew. §. 349.)

§. 389. Aufg. Jede krumme Linie zu rectificiren, d. i. ihre Länge s zu finden.

Auflöſ. Aus der gegebenen Gleichung der krummen Linie drücke man $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ entweder durch x, dx, oder durch y, dy aus, und integrire: ſo erhält man s. §.

§. 390. Aufg. Die Neilische Parabel, für welche $y^3 = ax^2$ ist, zu rectificiren.

Auflösung. Setzt man $a = 1$, so ist $y^{\frac{3}{2}} = x$, folglich $\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}dy = dx$, also $\frac{9}{4}ydy^2 = dx^2$; folglich aus §. 388. $ds = \sqrt{(\frac{9}{4}ydy^2 + dy^2)} = dy\sqrt{(1 + \frac{9}{4}y)}$.

Dies zu integriren, setze man $1 + \frac{9}{4}y = z$, folglich $\frac{9}{4}dy = dz$, oder $dy = \frac{4}{9}dz$; wodurch obige Gleichung sich verwandelt in $ds = \frac{4}{9}z^{\frac{1}{2}}dz$. Folglich ist $s = \frac{4}{9}z^{\frac{3}{2}} : \frac{3}{2} + C = \frac{8}{27} \cdot (1 + \frac{9}{4}y)^{\frac{3}{2}} + C$.

Um C zu finden, setze man $y = 0$, wofür $s = 0$ ist, folglich $0 = \frac{8}{27} + C$, oder $C = -\frac{8}{27}$. Hiedurch wird das vollständige Integral $s = \frac{8}{27}(1 + \frac{9}{4}y)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}$.

§. 391. Anm. Wegen der Integralrechnung ist hier §. 343 zu wiederholen, auch noch mit §. 347, Anm. 2. zu vergleichen.

Nach

Nachtrag zu Analysis §. 23.
aus Käſtners Analyſis des Endlichen §. 310.

1. Aufgabe. Die Reihen der Unterſchiede von der Potenz m zu finden. (Arithm. §. 254.)

Auflöſung. 1) Für x^m wachſe x immer um eine beliebige unveränderliche Größe e, daß nach und nach $x+e$, $x+2e$, $x+3e$ u. ſ. w. aus x werde: ſo iſt zuerſt $(x+e)^m = x^m + Ae.x^{m-1} + Be^2.x^{m-2} + Ce^3.x^{m-3} \ldots\ldots$ folglich, wenn $\Delta 1$ die erſte Differenzreihe, und $1\Delta 1$ deren erſtes Glied bedeutet, $1\Delta 1 =$

$Ae.x^{m-1} + Be^2.x^{m-2} + Ce^3.x^{m-3} \ldots$

welches m Glieder enthält.

2) Auf eben die Art gäbe $(x+2e)^m - (x+e)^m$ das zweyte Glied der erſten Differenzreihe, oder $2\Delta 1$, welches man aber auch erhalten kann, (wie Arithm. §. 254.) wenn man $x+e$ anſtatt x in $1\Delta 1$ ſetzt, da dann

$2\Delta 1 = Ae(x+e)^{m-1} + Be^2.(x+e)^{m-2} \ldots\ldots$

worin jeder Theil eine Reihe giebt, alſo alle Theile m Reihen geben, ſo viele Glieder in $1\Delta 1$ ſind.

3) In jeder dieſer m Reihen iſt das höchſte Glied (d. i. worin x in der höchſten Potenz vorkömmt) einerley

mit demjenigen Gliede in $1\Delta 1$, aus dem ſolche Reihe entſteht, das zweyte Glied aber um einen Grad niedriger.

Z. E. das erſte Glied in $Ae(x+e)^{m-1}$ iſt Aex^{m-1}, einerley mit dem erſten Gliede in $1\Delta 1$; aber das zweyte Glied iſt $Ae^2.(m-1)x^{m-2}$. Eben ſo das erſte Glied in $Be^2(x+e)^{m-2}$ iſt Be^2x^{m-2}, einerley mit dem zweyten Gliede in $1\Delta 1$; aber das zweyte Glied iſt $Be^3(m-2)x^{m-3}$ u. ſ. w.

4) Da alſo in $1\Delta 1$ jedes Glied um einen Grad höher, als ſein nächſtfolgendes iſt: ſo iſt in $2\Delta 1$ das zweyte Glied jeder Reihe um einen Grad höher, als das zweyte Glied der nächſtfolgenden Reihe, oder es werden die zweyten Glieder dieſer Reihen nach der Ordnung immer um einen Grad niedriger, d. i. das zweyte Glied der erſten Reihe in $2\Delta 1$ iſt das höchſte unter allen zweyten Gliedern, folglich auch unter allen folgenden Gliedern, die durchgängig niedriger als die zweyten ſind.

5) Nun iſt $2\Delta 1 - 1\Delta 1 = 1\Delta 2$, d. i. dem erſten Gliede der zweyten Differenzreihe. Durch dieſen Abzug heben ſich die erſten Glieder der Reihen in $2\Delta 1$ auf, weil ſie mit den Gliedern in $1\Delta 1$ einerley ſind, und es bleiben blos ihre zweyten und folgenden Glieder übrig, unter denen das zweyte Glied der erſten Reihe von $2\Delta 1$, nämlich $Ae^2(m-1)x^{m-2}$, das höchſte iſt, folglich auch das höchſte in $1\Delta 2$.

6) Setzt man nun ferner $x+e$ anſtatt x in $1\Delta 2$: ſo iſt $2\Delta 2 = Ae^2(m-1)(x+e)^{m-2}$ ..... wo wiederum jeder Theil eine Reihe giebt, auch eben die Schlüſſe, wie vorher, ſtatt finden; daß das höchſte Glied in jeder dieſer Reihen einerley iſt mit demjenigen Gliede in $1\Delta 2$, aus dem ſolche Reihe entſteht, und daß das zweyte Glied der erſten Reihe in $2\Delta 2$, nämlich $Ae^3(m-1)(m-2)x^{m-3}$ unter allen zweyten und folgenden Gliedern das höchſte ſey.

7) Nun giebt wiederum $2\Delta 2 - 1\Delta 2$ das erſte Glied der dritten Differenzreihe, oder $1\Delta 3$, da ſich dann durch ſolchen Abzug die erſten Glieder der Reihen in $2\Delta 2$ aufheben, und unter den übrigbleibenden Gliedern das zweyte Glied der erſten Reihe in $2\Delta 2$ das höchſte iſt, folglich auch das höchſte in $1\Delta 3$.

8) Setzt man nun für den Binomialcoëfficienten A ſeinen Werth m: ſo iſt das höchſte Glied in

$1\Delta 1 = m.e.x^{m-1}$

$1\Delta 2 = m.m-1.e^2.x^{m-2}$

$1\Delta 3 = m.m-1.m-2.e^3.x^{m-3}$

$1\Delta n = m.m-1.\ldots.m-n+1.e^n.x^{m-n}$

5. Lehrſatz. Gilt das Geſetz in (1. Auflöſ. 8.) für irgend einen Unterſchied der Potenz m: ſo gilt es auch für den nächſtfolgenden Unterſchied.

Beweis. Es ſey $1\Delta n = \alpha.x^{m-n} + \beta.x^{m-n-1}\ldots$ und man ſetze hier $x+e$ anſtatt x: ſo iſt $2\Delta n = \alpha(x+e)^{m-n} + \beta(x+e)^{m-n-1}\ldots$ wo wiederum nach obigen Schlüſſen das zweyte Glied der erſten Reihe, $\alpha(m-n)e.x^{m-n-1}$ oder $\alpha x^{m-n}.(m-n)e.x^{-1}$, das höchſte unter allen zweyten und folgenden Gliedern, folglich auch das höchſte Glied in $2\Delta n - 1\Delta n = 1\Delta(n+1)$ iſt.

Nun war das höchſte Glied in $1\Delta n = \alpha x^{m-n} = m.m-1.\ldots.m-n+1.e^n.x^{m-n}$, welches, in $(m-n)e.x^{-1}$ multiplicirt, das höchſte Glied in $1\Delta(n+1)$ giebt. Folglich iſt dieſes $= m.m-1\ldots.m-n+1.m-n.e^{n+1}.x^{m-n-1}$, wo wieder daſſelbe Geſetz ſtatt findet.

3. Zuſatz 1. Da nun ſolches Geſetz für die drey erſten Unterſchiede der Potenz m gilt, ſo gilt es auch für den vierten Unterſchied, folglich auch für den 5ten u. ſ. w. ohne Ende und iſt alſo allgemein.

4. Zuſaz 2. Für den mten Unterſchied iſt $m=n$, folglich $1\Delta^m=m.m-1\ldots 1.e^m.x^{m-m}$, wo $x^{m-m}=x^0=1$ iſt. Nun enthält kein Glied in irgend einem Unterſchiede, x mit einem verneinten Exponenten, ſondern in jedem Unterſchiede iſt das Glied, welches x^0 enthält, das niedrigſte. Folglich iſt das hier gefundene höchſte Glied des mten Unterſchiedes zugleich ſein niedrigſtes, oder es iſt der mte Unterſchied ganz. Da nun x hier gar nicht mehr zu finden iſt: ſo iſt kein $m+1$ter Unterſchied möglich, und es hat alſo x^m m Unterſchiede, wovon der lezte unveränderlich iſt.

Sezte man z. E. für x blos ganze Zahlen, ſo iſt $e=1$, alſo auch $e^m=1$, folglich der mte Unterſchied für dieſen Fall $=m.m-1\ldots 1$, alſo die Regel Arithm. §. 255. allgemein.

5. Zuſ. 3. Hat man von der Hauptreihe $m+1$ Glieder durch die unmittelbare Erhebung der Zahlen x, $x+e$, $x+2e$ u. ſ. w. auf die Potenz m gefunden, ſo geben ſie m erſte Unterſchiede; dieſe ferner $m-1$ zweyte; dieſe weiter $m-2$ dritte u. ſ. w. bis man auf zwey $m-1$te Unterſchiede kömmt, die einen mten geben. Da nun dieſer unveränderlich iſt, ſo giebt er zu den bereits gefundenen unterſten $m-1$ten addirt, einen neuen $m-1$ten, dieſer zu den bereits gefundenen $m-2$ten addirt, einen neuen $m-2$ten u. ſ. w. da man dann endlich auf ein neues Glied der Hauptreihe kömmt, wie Arithm. §. 254.

Nachtrag zu Anal. §. 24 und 33.

die Käſtnerſchen Beweiſe der daſelbſt angegebenen allgemeinen Formeln.

1. Aufgabe. Von den nach einem gewiſſen Geſetze fortgehenden Gliedern einer beliebigen Reihe ſind einige unmittelbar auf einander folgende gegeben; man ſoll die Glieder der erſten, zweyten und folgenden Differenzreihen durch die Glieder der Hauptreihe ausdrücken.

Auflöſ. 1) Die gegebenen Glieder heißen

$$y, y_1, y_2, y_3 \ldots y(n-1)\, y_n$$

wo die beygeſetzten Zahlen nicht Exponenten, ſondern nur die Folge der Glieder bedeuten, ſo daß y oder y_0 das 1ſte, y_1 das 2te u. ſ. w. $y(n-1)$ das nte, y_n das $n+1$te Glied anzeigt.

2) $\Delta 1, \Delta 2, \Delta 3 \ldots \Delta n$ bedeuten die 1te, 2te, 3te, nte Differenzreihe, und die vorgeſetzten Zahlen die Folge der Glieder in jeder Differenzreihe. Z. E. $1\Delta n$, $2\Delta n$, $3\Delta n$ u. ſ. w. das 1ſte, 2te, 3te Glied der nten Differenzreihe.

3) Sub-

3) Subtrahirt man nun jedes vorhergehende Glied der Hauptreihe von seinem nachfolgenden: so hat man die Glieder der ersten Differenzreihe, und kann aus diesen eben so die zweyte Differenzreihe, aus dieser die 3te u. s. w. machen. Anal. §. 22. Dies giebt folgende Tafel:

	erste Differenz		zweyte Differenz	
y				
y_1	$1\Delta 1$	$y_1 - y$		
y_2	$2\Delta 1$	$y_2 - y_1$	$1\Delta 2$	$y_2 - 2 . y_1 + y$
y_3	$3\Delta 1$	$y_3 - y_2$	$2\Delta 2$	$y_3 - 2 . y_2 + y_1$
y_4	$4\Delta 1$	$y_4 - y_3$	$3\Delta 2$	$y_4 - 2 . y_3 + y_2$

2. Zus. 1. Für die ersten Glieder dieser Differenzreihen erblickt man folgende Gesetze:

1) Die Glieder der Hauptreihe fangen mit demjenigen Gliede an, welches mit der Differenzreihe einerley Benennung hat, und gehen bis zum ersten Gliede.

2) Ihre Coëfficienten sind die Binomialcoëfficienten derjenigen Potenz, deren Exponent die Zahl der Differenzreihe ist.

3) Ihre Zeichen wechseln ab.

Z. E. der dritten Differenzreihe erstes Glied ist

$y_3 - 3 . y_2 + 3 . y_1 + y_0$.

3. Zus. 2. Wären diese Gesetze (in 2.) allgemein: so hätte man $1\Delta n =$

$y_n - A . y_{(n-1)} + B . y_{(n-2)} \ldots . \pm R . y_{(n-r)} \ldots$

wo $R = \pm \frac{n, n-1 \ldots . n-r+1}{1 . 2 \ldots . r}$ Anal. §. 10. der 1te Coëfficient Anal. §. 6. in $y_{(n-r)}$ multiplicirt, und der $r+1$te $= \pm R . \frac{n-r}{r+1}$ Anal. §. 11. in $y_{(n-r-1)}$ multiplicirt.

4. Zu-

4. Zuſatz 3. Für die folgenden Glieder einer jeden Differenzreihe findet man eben dieſe Geſetze, nur daß ihre Theile ſich immer mit dem zunächſt folgenden Gliede der Hauptreihe anfangen, und ihrer nur eben ſoviele ſind, als im erſten Gliede. Z. E. für die dritte Differenzreihe hat man (in 1.)

$$1\Delta 3 = y3 - 3.y2 + 3.y1 + y0$$
$$2\Delta 3 = y4 - 3.y3 + 3.y2 + y1$$
$$3\Delta 3 = y5 - 3.y4 + 3.y3 + y2$$

Oder allgemein: $2\Delta n$ entſteht aus $1\Delta n$, wenn man in allen Gliedern von $1\Delta n$, blos $n+1$ anſtatt n ſetzt. Hiernach hat man (aus 3.) $2\Delta n = y(n+1) - A.yn + B.y(n-1) \ldots \mp R.y(n-r) \ldots$

5. Zuſatz 4. Wenn man die Conſtruction (in 1.) betrachtet, z. E. $1\Delta 3 = 2\Delta 2 - 1\Delta 2$, d. i.

$$2\Delta 2 = y3 - 2.y2 + y1$$
$$1\Delta 2 = \qquad y2 - 2.y1 + y$$
$$1\Delta 3 = y3 - 3.y2 + 3.y1 - y$$

ſo erhellet, daß z. E. der 3te Theil in $1\Delta 3$ entſtehe, wenn man vom 3ten in $2\Delta 2$ den 2ten Theil in $1\Delta 2$ ſubtrahirt; oder allgemein, daß der $r+1$te Theil in $1\Delta(n+1)$ entſtehe, wenn man vom $r+1$ten Theile in $2\Delta n$ den $r$ten Theil in $1\Delta n$ ſubtrahirt.

6. Lehrſatz. Nimmt man an, daß die Geſetze (in 3.) für irgend eine Differenzreihe Δn gelten, ſo müſſen ſie auch von der zunächſt folgenden $\Delta(n+1)$ gelten.

Beweis. Da (aus 3.) der $r+1$ Theil von $1\Delta n = R.\frac{n-r}{r+1}.y(-n-r)$: ſo iſt (nach 4.) der $r+1$te Theil von $2\Delta n = R.\frac{n-r}{r+1}.y(n-r)$ folglich (nach 5.) der

$r+1$

$r+1$ Theil von $1\Delta(n+1) = +(R+R.\frac{n-r}{r+1})$.

$y(n-r)$ wo der Coëfficient $= (1+\frac{n-r}{r+1})R = \frac{n+1}{r+1}$.

$R = \frac{n+1.\ n.\ n-1 \ldots n-r+1}{1.\ 2.\ 3 \ldots r+1}$ (nach 3.) und das Zeichen — oder + gilt, nachdem r gerade oder ungerade ist. (nach 2.)

Was man nun hier durch den wirklichen Abzug (nach 5.) gefunden, dasselbe findet man auch, wenn man blos $n+1$ anstatt n in das $r+1$te Glied von $1\Delta n$ (in 3.) setzt, also das für $1\Delta n$ geltende Gesetz unmittelbar auf $1\Delta n(+1)$ anwendet, welches daher für $\Delta(n+1)$ gelten muß, wenn es für Δn gilt.

7. Zusatz. Da nun das Gesetz (in 3.) für die drey ersten Differenzreihen (in 1.) gilt: so gilt es auch für die 4te, folglich für die 5te u. s. w. ohne Ende für alle.

Demnach ist hierdurch allgemein erwiesen, daß $1\Delta n = yn - A.y(n-1) + B.y(n-2) - \ldots$ wo A, B, C u. s. w. die Binomialcoëfficienten der nten Potenz, und yn, $y(n-1)$, $y(n-2)$ u. s. w. die rückwärts auf einander folgenden Glieder jeder Hauptreihe bedeuten.

8. Aufgabe. Durch die ersten Glieder der Differenzreihen, und das erste Glied der Hauptreihe (in 1.) die übrigen Glieder der Hauptreihe auszudrücken.

Auflös. Man hat (aus 1.)

1) $y1 - y = 1\Delta 1$, folglich $y1 = y + 1\Delta 1$

2) $y2 - y1 = 2\Delta 1$, folglich $y2 = y + \Delta 1$
$= y + 1\Delta 1 + 2\Delta 1$

Nun ist $2\Delta 1 - 1\Delta 2 = 1\Delta 2$, also $2\Delta 1 = 1\Delta 1 + 1\Delta 2$.

Folg-

Folglich iſt $y_2 = y + 2.1\Delta_1 + 1\Delta_2$

3) $y_3 - y_2 = 3\Delta_1$, folglich $y_3 = y_2 + 3\Delta_1$

Nun iſt $2\Delta_2 - 1\Delta_2 = 1\Delta_3$, alſo $2\Delta_2 = 1\Delta_2 + 1\Delta_3$ und $3\Delta_1 - 2\Delta_1 = 2\Delta_2$, alſo $3\Delta_1 = 2\Delta_1 + 2\Delta_2$ d. i. $3\Delta_1 = 1\Delta_1 + 2.1\Delta_2 + 1\Delta_3$; auch war

$$y_2 = y + 2.1\Delta_1 + 1\Delta_2$$

Folglich iſt $y_3 = y + 3.1\Delta_1 + 3.1\Delta_2 + 1\Delta_3$.

9. Zuſ. 1. Hieraus erhellet:

1) Daß die Glieder der Hauptreihe durch lauter erſte Glieder der Reihen nach der Ordnung beſtimmt werden.

2) Daß die Coëfficienten dieſer erſten Glieder die Binomialcoëfficienten derjenigen Potenz ſind, deren Exponent die beygeſetzte Zahl des Gliedes iſt.

3) Daß jedesmal, außer dem erſten Gliede der Hauptreihe, die erſten Glieder von ſo vielen Differenzreihen vorkommen, als obgedachte Zahl Einheiten hat.

Z. E. $y_3 = y + 3.1\Delta_1 + 3.1\Delta_2 + 1\Delta_3$

10. Zuſ. 2. Wäre das Geſetz (in 9.) allgemein: ſo hätte man $y_n =$

$$y + A.1\Delta_1 + B.1\Delta_2 \ldots + R.1\Delta_r + S.1\Delta_{(r+1)} \ldots$$

wo wiederum wie (in 3.) $R = \frac{n.n-1.\ldots.n-r+1}{1.\ldots.r}$

und $S = R.\frac{n-r}{r+1}$.

11. Zuſatz 3. Auf ähnliche Art, wie das erſte Glied aus den erſten Gliedern, laſſen ſich die folgenden Glieder der Hauptreihen aus den zweyten Gliedern der Reihen berechnen; z. E. aus 1. iſt

1) $y_2 = y_1 + 2\Delta_1$

2) $y_3 = y_2 + 3\Delta_1 = y_1 + 2.2\Delta_1 + 2\Delta_2$

3) $y_4 = y_3 + 4\Delta_1 = y_1 + 3.2\Delta_1 + 3.2\Delta_2 + 2\Delta_3$

12. Lehrſatz. Nimmt man an, daß das Geſetz (in 10.) für irgend ein Glied der Hauptreihe y_n gelte, ſo muß es auch für das zunächſt folgende Glied $y_{(n+1)}$ gelten.

Be-

Beweis. Da $y(n+1)$ gegen die zweyten Glieder der Reihen völlig dieſelbe Lage hat, wie yn gegen die erſten, und die zweyten Glieder der Reihen für $y(n+1)$ völlig daſſelbe ſind, was die erſten Glieder für yn waren, (vergl. 11.) ſo wird, wenn das Geſetz (in 10.) richtig iſt, auch Folgendes richtig ſeyn: $y(n+1) =$
$y1 + A.2\Delta 1 + B.2\Delta 2, \ldots + R.2\Delta r + S.2\Delta(r+1)\ldots.$

Nun entſteht das zweyte Glied jeder Reihe, wenn man zum erſten Gliede dieſer Reihe das erſte Glied der folgenden Reihe addirt, (vergl. 8.) Demnach iſt auch $y(n+1) =$
$y + 1\Delta 1$
$+A.1\Delta 1 + A.1\Delta 2$
$+B.1\Delta 2 \ldots + R.1\Delta(r+1)$
$+S.1\Delta(r+1)\ldots.$

Da dann (nach 6.) der $r+1$te Coëfficient $R+S = \frac{n+1.n.n-1\ldots n-r+1}{1.2.3\ldots r+1}$, in $\Delta(r+1)$ multiplicirt.

Was man nun hier durch die Natur der Reihe gefunden, daſſelbe findet man auch, wenn man blos $n+1$ anſtatt n in das $r+1$te Glied von yn ſetzt, alſo das für yn geltende Geſetz unmittelbar auf $y(n+1)$ anwendet, welches daher für $y(n+1)$ gelten muß, wenn es für yn gilt.

13. Zuſatz. Da nun dieſes Geſetz (in 10.) für $y2$, $y3$, $y4$ (nach 8.) gilt: ſo gilt es auch für $y4$, folglich für $y5$ u. ſ. w. ohne Ende für alle folgende.

Demnach iſt hierdurch allgemein erwieſen, daß $yn =$
$y + A.1\Delta 1 + B.1\Delta 2 + C.1\Delta 3\ldots.$
wo A, B, C u. ſ. w. die Binomialcoëfficienten, y das erſte Glied der Hauptreihe, und $1\Delta 1$, $1\Delta 2$ u. ſ. w. die erſten Glieder der in der Ordnung folgenden Differenzreihen bedeuten.

14. Aufgabe. Die Glieder einer der figurirten Reihen in Anal. §. 32. zu finden.

Auf-

Auflöſ. Man ſehe eine ſolche Reihe als Hauptreihe an, und leite daraus die erſten Glieder der Differenzreihen, ſo läßt ſich hieraus jedes Glied der angenommenen Hauptreihe nach der Formel für yn in Anal. §. 24. beſtimmen.

Z. E. 1) die II. Columne als Hauptreihe betrachtet, worin, wie immer, das erſte Glied $=0$, das zweyte $=1$ iſt, giebt $1\Delta 1=1$, und $1\Delta 2=0$. Folglich iſt aus Anal. §. 24. dieſer Columne $n+1$tes Glied oder $yn=0+A.1+B.0=A=n$. Für $n=9$ wäre das 10te Glied $=9$.

2) Die III. Columne als Hauptreihe betrachtet, worin die beiden erſten Glieder $=0$, das dritte $=1$ iſt, giebt $1\Delta 1=0$, $1\Delta 2=1$, $1\Delta 3=0$. Folglich iſt für dieſe Columne $yn=0+0+B.1+0=B=\frac{n.n-1}{1.2.}$

Für $n=9$ wäre das 10te Glied $=\frac{9.8}{1.2}=36$.

3) Für die IV. Columne iſt auf eben die Art nur erſt $1\Delta 3=1$, daher $yn=C=\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$. Für $n=9$ wäre das 10te Glied $=\frac{9.8.7}{1.2.3}=84$.

15. Aufg. Eine allgemeine Formel für die Glieder der figurirten Reihen zu finden.

Auflöſ. In der $m$ten Columne als Hauptreihe betrachtet ſind $m-1$ Glieder $=0$, Anal. §. 31, folglich yn oder das $n+1$ Glied ſo lange $=0$, bis $n+1=m$, d. i. $n=m-1$ wird, da dann $yn=1$ iſt. Folglich iſt auch ſo lange $1\Delta n=0$, als $n<m-1$, und wird $=1$, wenn $n=m-1$, aber wieder $=0$, wenn $n>m-1$ iſt.

Demnach ist aus Anal. §. 24 der mten Columne $n+1$tes Glied oder $yn = n.n-1....n-r+1.1\Delta^r$, wenn $r=m-1$ ist, weil y allemal $=0$, und alle erste Glieder der Differenzreihen vor und nach der $m-1$ten $=0$ sind. Setzt man nun $m-1$ anstatt r, so ist $1\Delta(m-1)=1$, also

$$yn = \frac{n.n-1....n-m+2}{1.\quad 2.\quad\quad m-1}$$

Z. E. für $m=4$, und $n=9$ ist das 10te Glied der IV. Columne $= \frac{9.8.7}{1.2.3} = 84$.

16. Zusatz. Da in der mten Columne die ersten $m-1$ Glieder $=0$ sind: so ist das erste wirkliche Glied das mte, das 2te das $m+1$te u. s. w. folglich das rte das $m+r-1$te. Setzt man daher in der gefundenen Formel $n+1 = m+r-1$, oder $n = m+r-2$: so erhält man das rte wirkliche Glied der mten Columne

$$= \frac{(m+r-2)(m+r-3)....r}{1.\quad 2.\quad\quad m-1}.$$

Setzt man in letzterer Formel für r nach und nach die Zahlen 1, 2, 3 u. s. w. so giebt sie das 1, 2, 3te Glied der mten Columne:

r

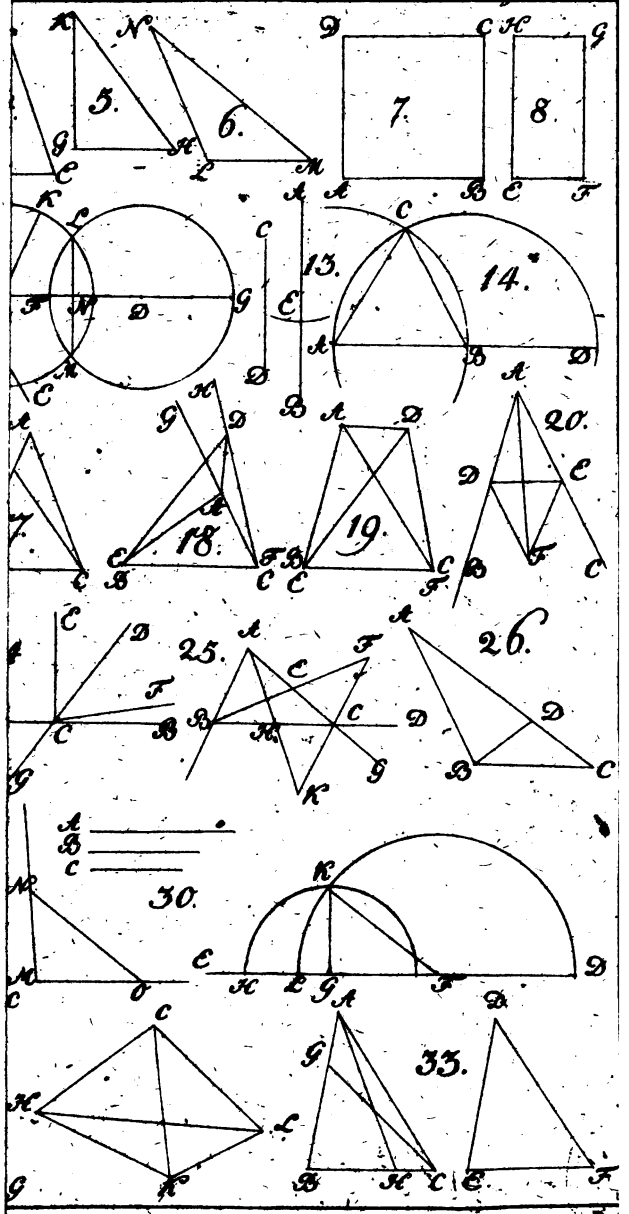
1. $\frac{m-1.m-2....1}{1.\quad 2.\quad\quad m-1} = 1$,

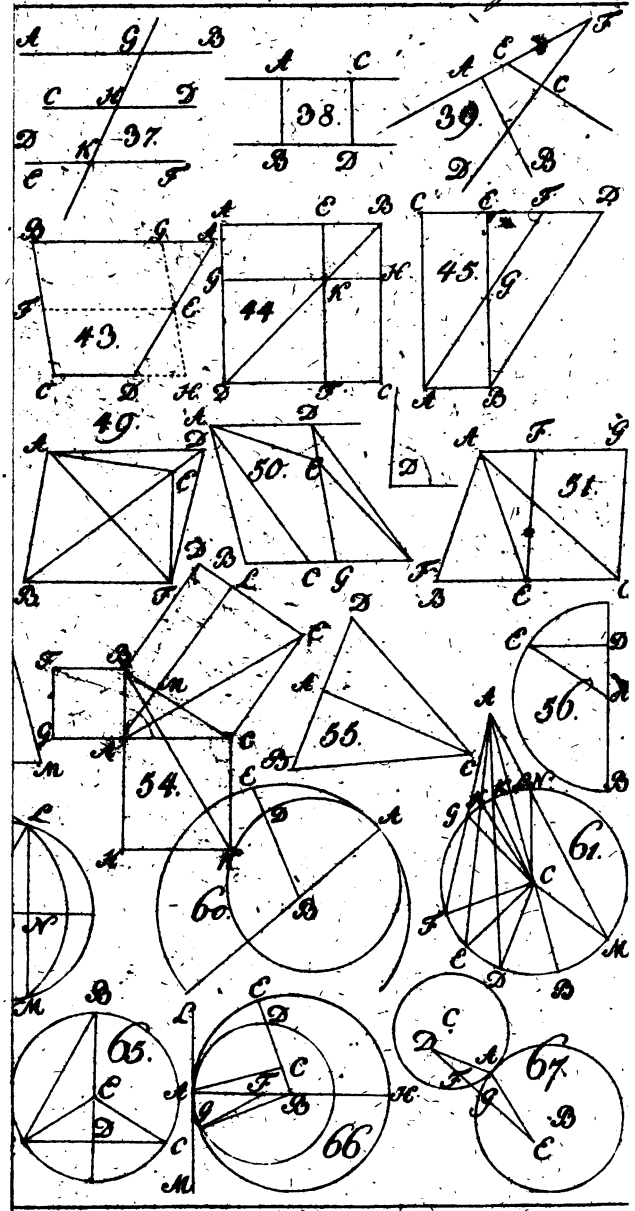
2. $\frac{m.\ m-1\ .\ .\ .\ 2}{1.\quad 2.\quad\quad m-1} = m$.

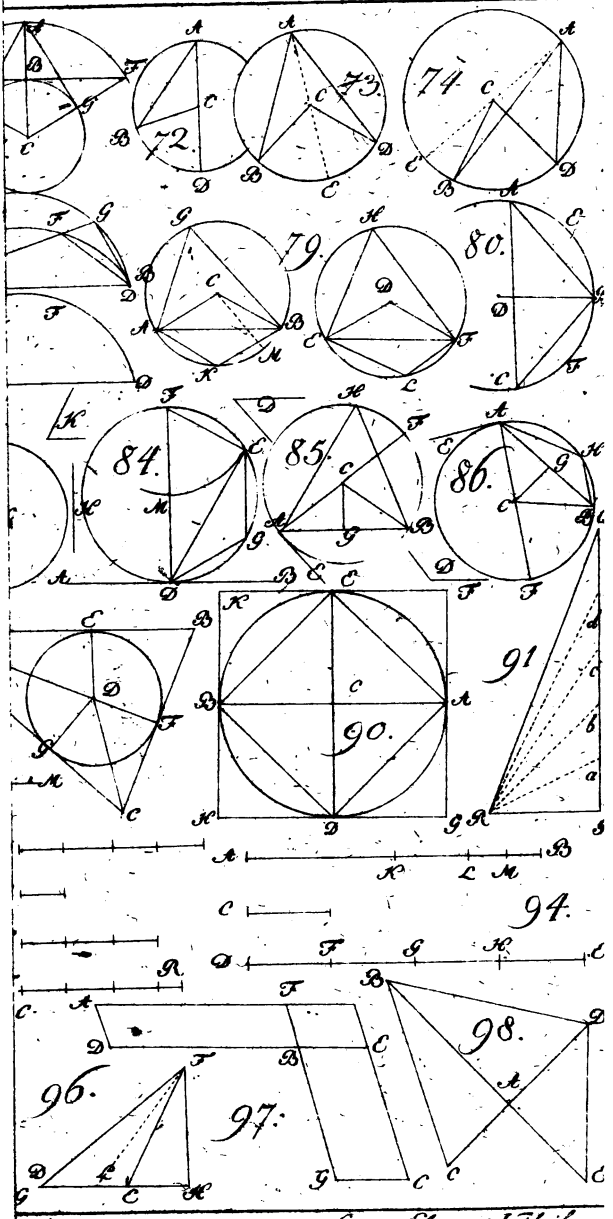
3. $\frac{m+1.m.m-1...3}{1.\quad 2.\quad 3...m-1} = \frac{m+1.m}{1.\quad 2}$ u. s. w.

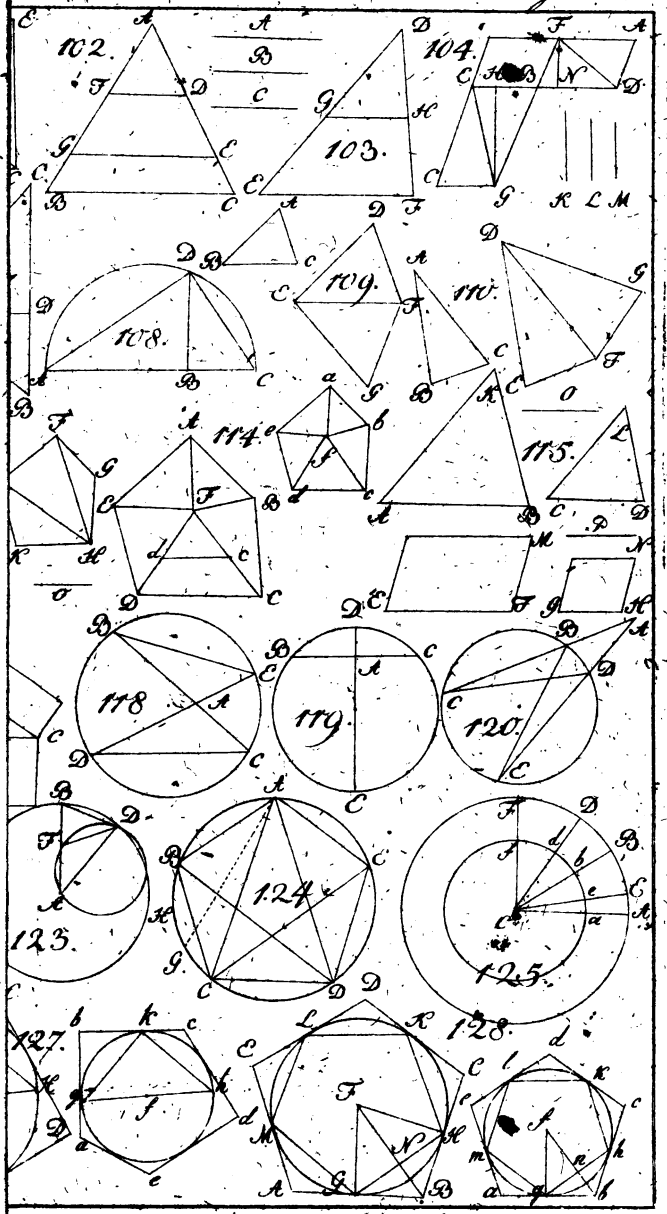
Ende des ersten Theils.

NOV 14 1921

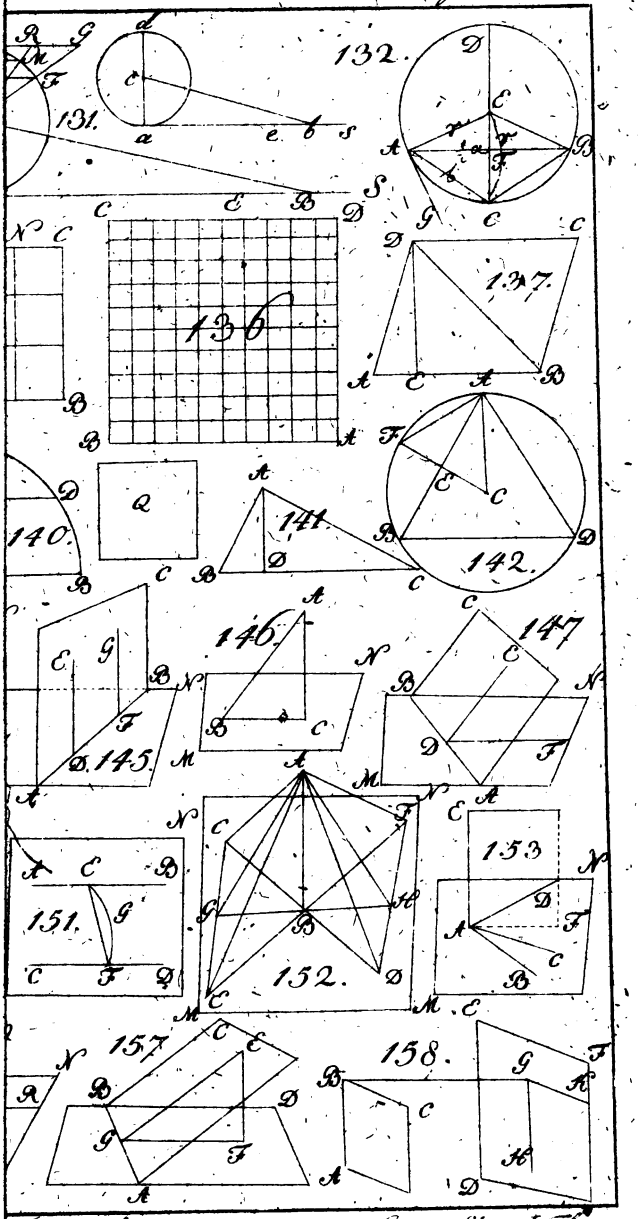

5.
6.
7.
8.
13.
14.
18.
19.
20.
25.
26.
30.
33.


37.
38.
39.
43.
44.
45.
49.
50.
51.
54.
55.
56.
60.
61.
65.
66.
67.

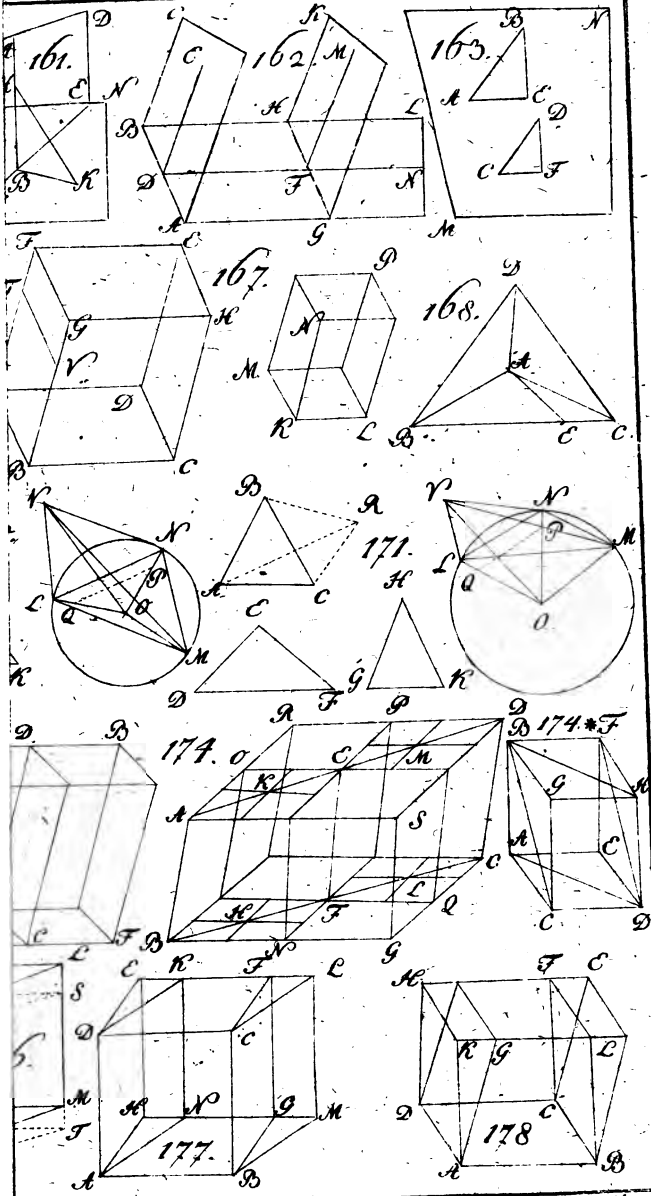

72.
73.
74.
79.
80.
84.
85.
86.
90.
91
94.
96.
97.
98.

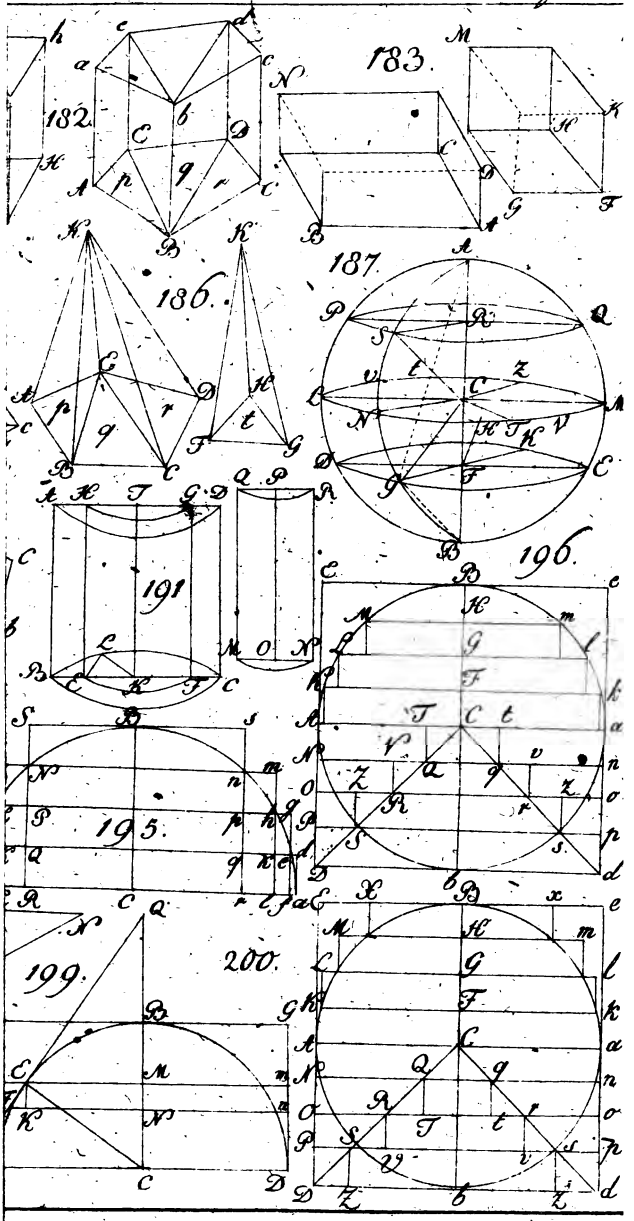

102.
103.
104.
108.
109.
110.
114.
115.
118.
119.
120.
123.
124.
125.
127.
128.

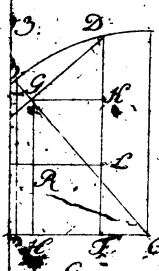
5. Tafel.

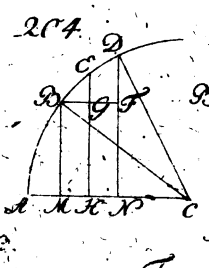


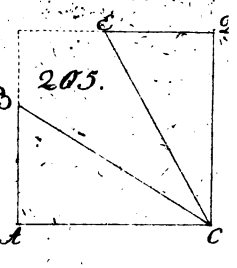
Lorenz. Sem: I. Th:

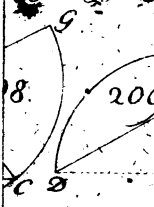

161.
162.
163.
167.
168.
171.
174.
174.*
177.
178

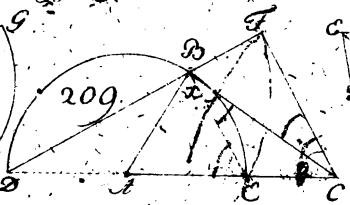

182.
183.
186.
187.
191.
196.
195.
199.
200.

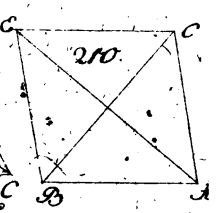


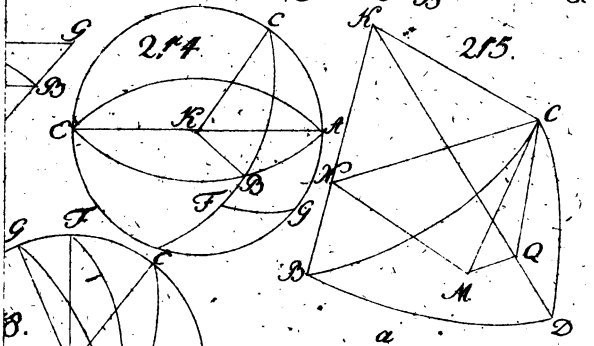


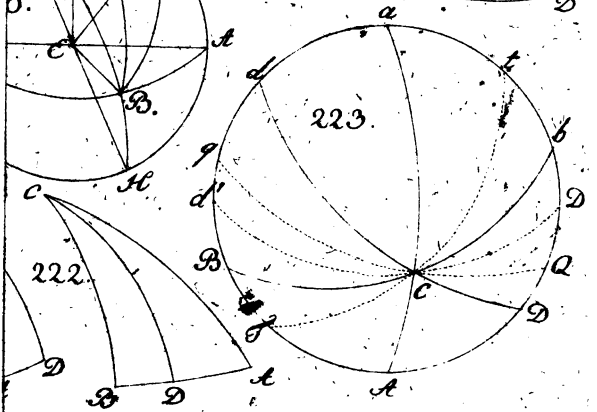


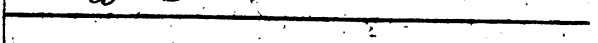




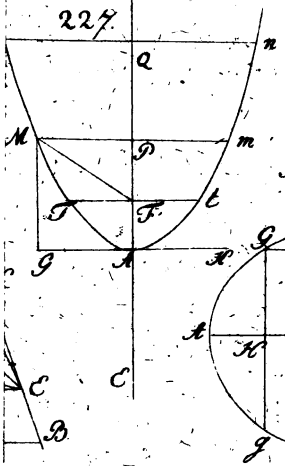




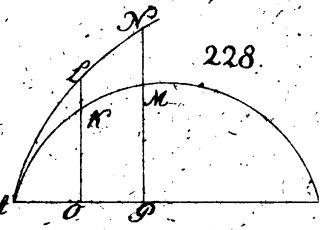




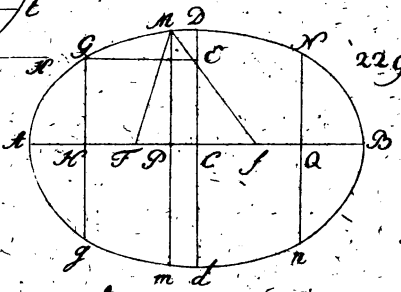
227.

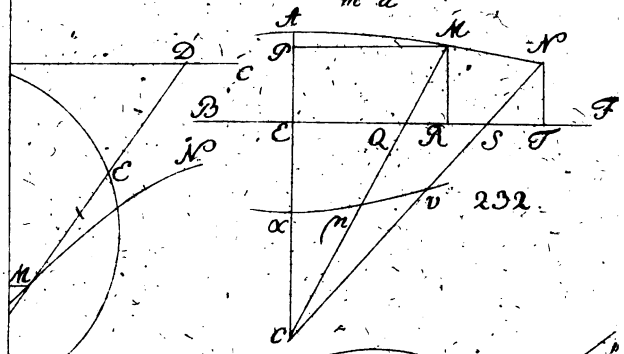


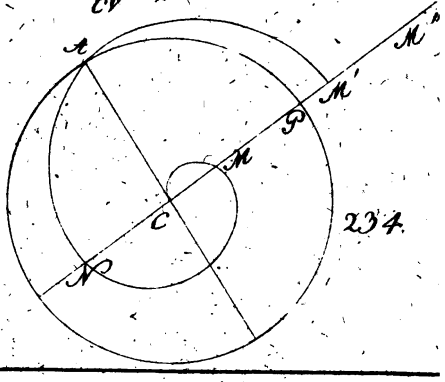
228.



229.







233.

B

Peter